Ciencias Sociales
Universidad de la República
URUGUAY

Matemática II
Examen, 2 de Agosto de 2024

Nombre:____

C.I.: ____________________ Libre ☐ Reglamentado ☐

Para aprobar el examen, los alumnos que rinden de forma reglamentada deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE; los alumnos que rinden el examen de forma libre deben obtener el 50 % de los puntos de la PRIMERA PARTE y 50 % de los puntos de la SEGUNDA PARTE.
La duración de la prueba es de 2 horas para el examen reglamentado y de 3 horas para el examen libre.

PRIMERA PARTE (REGLAMENTADOS Y LIBRES)

Ejercicio 1

Un conjunto de historiadores económicos está intentado reconstruir el registro de empresas en una provincia de un pequeño país durante la primer mitad del sigo XX. Las empresas se clasifican en 3 rubros posibles: agreopecuarias, industriales y servicios. Si bien los registros fiscales se han perdido en un incendio, es posible reconstruir indirectamente las cantidades de empresas dentro de cada rubro.

Se contrata a un grupo de técnicos que analizan los datos disponibles e intentan reconstruir la información faltante. El equipo de técnicos llega a tres conclusiones:

- La cantidad de empresas agropecuarias sumadas a 5 veces la cantidad de empresas de industria superan en 2500 a la cantidad de empresas de servicio.
- La suma de empresas de industria y servicio totaliza 400 empresas.
- La suma de empresas agropecuarias e industriales supera en 900 a 5 veces la cantidad de empresas de servicios.

Deducir la cantidad de empresas dentro de cada rubro. Si no existe ninguna solución, justificarlo. Si existe solo una, hallarla. En caso de que exista más de una, determinar cuantas son las soluciones posibles.

Solución

$$\left\{\begin{array}{rcr} a+5i &=& 2500+s \\ i+s &=& 400 \\ a+i-5s &=& 900 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcr} a+5i-s &=& 2500 \\ i+s &=& 400 \\ a+i-5s &=& 900 \end{array}\right. \underset{E_3-E_2}{\overset{E_1-5E_2}{\longrightarrow}} \left\{\begin{array}{rcr} a-6s &=& 500 \\ i+s &=& 400 \\ a-6s &=& 500 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a-6s &=& 500 \\ i+s &=& 400 \end{array}\right.$$

EL sistema es compatible determinado y la solución analítica del sistema (sin tener en cuenta la interpretación de las variables) es

$$S=\{(a,i,s)\in\mathbb{R}^3/s\in\mathbb{R}, i=400-s, a=500+6s\}$$

Como necesitamos que se cumpla $a \geq 0$, $i \geq 0$ y $s \geq 0$, entonces la variable i tiene que cumplir $0 \leq i \leq 400$. Además, las variables toman valores naturales, por lo tanto concluimos que existen 401 ternas de soluciones válidas.

Ejercicio 2

Una empresa planea instalar un negocio a partir de enero del 2025. Realiza un estudio de mercado y a partir del mismo obtiene un modelo predictivo sobre la evolución de sus utilidades. Dicho modelo está dado por la siguiente función

$$U : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / U(t) = 300 + \frac{22000 - 22000t}{e^t}$$

donde t son meses a partir de comienzos de enero del 2025 y $U(t)$ corresponde a la utilidad (en dólares.)

1. ¿Que predicción a largo plazo realiza el modelo sobre la utilidad de la empresa?
2. ¿El modelo predice que existe algún techo para las utilidades?
3. ¿El modelo predice que habrá pérdidas en algún momento?

Solución

1. Tenemos que $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{22000-22000t}{e^t} = 0$, por ordenes. Así concluimos que

$$\lim_{t \to +\infty} U(t) = 300 + 0 = 300$$

y podemos afirmar que el modelo predice que a largo plazo las utilidades tenderán a 300 dólares

2.

$$\begin{aligned} U'(t) &= \frac{-22000e^t - (22000 - 22000t)e^t}{(e^t)^2} \\ &= \frac{-22000 - (22000 - 22000t)}{e^t} \\ &= \frac{-44000 + 22000t)}{e^t} \end{aligned}$$

$$sg\ \frac{-44000+22000t}{e^t} \quad \begin{array}{ccccc} \nexists & & - & 0 & + \\ \hline 0 & & & 2 & \end{array}$$

Por otro lado, tenemos que $U(0) = 22300$. Este resultado, junto al obtenido en la parte 1., nos permite afirmar que el máximo absoluto de utilidades se alcanza en $t = 0$ y vale 22300 dólares.

3. Del diagrama de signo obtenido en la parte anterior sabemos que el mínimo absoluto de utilidades se alcanza en $t = 2$ y además tenemos $U(2) \approx -2677$. Por lo tanto, se puede afirmar que hubo perdidas en $t = 2$.

Ejercicio 3

Un banco registra sus actividades financieras durante los primeros 3 trimestres del 2024. A partir de dichos registros, se construye una función que describe la tasa de utilidades del banco, a lo largo del tiempo:

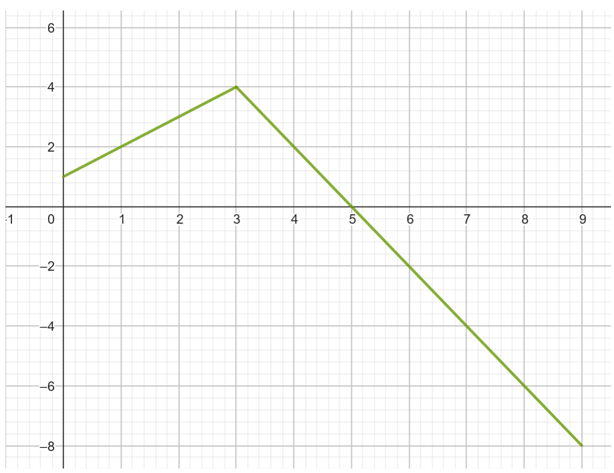
$$f : [0,9] \to \mathbb{R} / f(t) = \begin{cases} t+1 & , \quad 0 \leq t \leq 3 \\ -2t+10 & , \quad 3 < t \leq 9 \end{cases}$$

donde t corresponde a meses a partir de comienzos del 2024 y $f(t)$ es la tasa de utilidades (en millones de dólares/mes) en tiempo t

1. Representar gráficamente la función f.
2. Calcular el saldo neto de utilidades desde comienzos de enero hasta finales de mayo.
3. Sabemos que el banco dispone de 100 millones de dólares de fondos a comienzos de enero del 2024. Los fondos del banco dependen exclusivamente de la tasa de utilidades dada por f. ¿En algún momento del período considerado el banco dispondrá de 96 millones de dólares de fondo? Justifique
4. ¿En que momento del período considerado los fondos del banco alcanzan su valor máximo?

Solución

1.



2.

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(t)dt &= \int_0^3 f(t)dt + \int_3^5 f(t)dt \\ &= (\frac{t^2}{2} + t)|_0^3(-t^2+10t)|?_3^5 \\ &= 7{,}5 + 4 = 11{,}5 \end{aligned}$$

Concluimos que en los primeros 5 meses de actividad el saldo neto de utilidades fue de 11,5 millones de dólares.

3. Sabemos que en los primeros 5 meses de actividad los fondos aumentan (ya que la tasa de utilidades es positiva) hasta llegar a los 111,5 millones de dólares. A partir de comienzos de Junio la tasa de utilidades es negativa, por lo que los fondos del banco disminuirán en este período. Observemos que es posible calcular $\int_5^9 f(t)dt$ fácilmente, calculando el área del triangulo formado por la gráfica. Así vemos que $\int_5^9 f(t)dt = -16$. Esto implica que al final del período (en $t = 9$) los fondos del banco son $111{,}5 - 16 = 95{,}5$ millones. Podemos concluir así que existe algún momento T (con $5 < T < 9$) donde los fondos del banco son de 96 millones.
   Si quisieramos determinar el valor exacto de T, tendríamos que resolver la ecuación

$$\begin{aligned} 100 + \int_0^T f(t)dt &= 96 \\ 100 + \int_0^5 f(t)dt + \int_5^T f(t)dt &= 96 \\ 100 + 11{,}5 + \int_5^T (-2t + 10)dt &= 96 \\ 100 + 11{,}5 - T^2 + 10T - (-5^2 + 10(5)) &= 96 \end{aligned}$$

4. Como la tasa de utilidades es positiva en el intervalo $[0, 5)$ y negativa en el intervalo $(5, 9]$, sabemos que los fondos crecen en el primer intervalo y decrecen en el último. Eso implica que el máximo absoluto de fondos se obtiene en $t = 5$

SEGUNDA PARTE (SOLAMENTE LIBRES)

Ejercicio 4

El mercado de TV por cable se ha visto sacudido por la creciente demanda de servicios de "*TV on demand*" del tipo NETFLIX, haciendo que la función de servicios de TV por cable en la localidad de "Las Rocas" sea:

$$f : D \to \mathbb{R} / f(x, y) = x^2 + y^3 - 4xy - 10x + 17y + 800$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 30\}$, x es el precio en dólares por mes de la TV por cable e y es el precio en dólares por mes del servicio de NETFLIX, y $f(x, y)$ es la cantidad de clientes que tiene la TV por cable en la localidad de "Las Rocas".

1. Calcule $f(20, 10)$ e interprete el resultado obtenido.
2. Determine las derivadas parciales f_x y f_y.
3. Calcule $f_y(20, 10)$ e interprete el resultado en el contexto de este ejercicio.

Solución

1. $f(20, 10) = (20)^2 + (10)^3 - 4(20)(10) + 17(10) - 10(20) + 800 = 1370$ Si el precio de la TV por cable es de 20 dólares y el de NETFLIX es de 10 dólares, la cantidad de abonados de TV por cable en la localidad de "Las Rocas" sera de 1370.

2. Las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - 4y - 10 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 - 4x + 17 \end{aligned}$$

3. Las derivadas parciales evaluadas en (20,10):
$$f_y(20,10) = 3(10)^2 - 4(20) + 17 = 237$$
Interpretación $f_y(20,10)$: Dado el precio de la TV por cable de US$20 y un precio de NETFLIX de US$10 por mes, por cada dólar que aumenta el precio NETFLIX, dejando constante el precio de la TV por cable, la cantidad demandada de servicios de TV por cable aumenta aproximadamente en 237 unidades.

Ejercicio 5

Un complejo turístico se inaugura a comienzos del 2024 y recibe 21.000 visitantes en su primer año. Debido a una serie de malas gestiones, la cantidad de visitantes se reduce anualmente un 15 %.

1. Suponiendo que a comienzos de 2044 la cantidad de visitantes deja de disminuir y se mantiene constante en 800, determinar una expresión que describa como evoluciona la cantidad de visitantes del complejo a lo largo de los años.
2. Suponiendo que cada visitante paga un monto fijo de $10 a comienzos de cada año. ¿Cuanto acumula de ingresos el complejo turístico durante las primeras 3 décadas desde su inauguración?
3. Considerando desde el momento de su inauguración, ¿en que momento el complejo va a haber acumulado $1.000.000 de ingresos?

Solución

1. $$a_n = \begin{cases} 21.000(0{,}85)^n & \text{si } 0 \leq n \leq 20 \\ 800 & \text{si } 20 < n \end{cases}$$
2. $$\begin{aligned} 10\sum_{n=0}^{29} a_n &= 10\left[\sum_{n=0}^{20} a_n + \sum_{21}^{29} a_n\right] \\ &= 10\sum_{n=0}^{20} a_n + 10\sum_{21}^{29} a_n \\ &= 10(21.000)\left(\frac{0{,}85^{21}-1}{0{,}85-1}\right) + 10(9)(800) \\ &= 1.353.876 + 7.200 \end{aligned}$$
3. De la solución de la parte anterior sabemos que durante los primeros 20 años se alcanzan el $1.000.000, por lo tanto podemos plantear
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{k} a_n &= \$1.000.000 \\ 10(21.000)\left(\frac{0{,}85^{21}-1}{0{,}85-1}\right) &= \$1.000.000 \\ 0{,}85^{21} - 1 &= \frac{2}{7} \\ k + 1 &= \log_{0{,}85}^{\frac{2}{7}} \\ k &\approx 6{,}7 \end{aligned}$$