Segundo parcial - Matemática para las Ciencias Sociales

9 de julio de 2020

1. Sea la función:

$$C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / C(x, y) = x^2 + y^3 - 4xy - 16y + 70$$

   a) Encuentre todos los puntos estacionarios y clasifíquelos.

$$f_x = 2x - 4y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

$$f_y = 3y^2 - 4x - 16 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 4(2y) - 16 = 0 \Rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4(3)(-16)}}{2(3)}$$

$$y = \frac{8 \pm 16}{6} \Rightarrow y = \frac{-4}{3} \quad x = \frac{-8}{3} \quad \text{o} \quad y = 4 \quad x = 8$$

Los puntos estacionarios son: $\left(\frac{-8}{3}, \frac{-4}{3}\right)$ y $(8, 4)$

$$f_{xx} = 2$$
$$f_{xy} = f_{yx} = -4$$
$$f_{yy} = 6y$$

La matriz Hessiana en $\left(\frac{-8}{3}, \frac{-4}{3}\right)$ es

$$H_f\left(\frac{-8}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$$

Dado que $\left|H_f\left(\frac{-8}{3}, \frac{-4}{3}\right)\right| = -32$ concluimos que C alcanza un punto de silla en $\left(\frac{-8}{3}, \frac{-4}{3}\right)$.
La matriz Hessiana en $(8, 4)$ es

$$H_f(8, 4) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 24 \end{pmatrix}$$

Dado que $|H_f(8, 4)| = 32$ y que $f_{xx} = 2 > 0$ concluimos que C alcanza un mínimo relativo en $(8, 4)$.

Suponga que esta función describe la cantidad de contagios diarios por el nuevo SARS-CoV2 que se producen en Uruguay, donde x es la cantidad de personas a las que se realiza el test por cada infectado, e y la cantidad de días que pasan desde que se tuvo contacto con una persona infectada. En función de estos datos se pide:

b) Determine el dominio razonable en el nuevo contexto.

$$D = \{(x, y) \in R/x \geq 0, y \geq 0\}$$

c) ¿Qué punto estacionario es el que tiene sentido si $C(x, y)$ es la función que describe los contagios diarios?

En el contexto de este problema tanto x como y deben ser mayores o iguales a 0, por lo que el punto $(8, 4)$ es el único punto estacionario que tiene sentido. En este caso, se obtiene un mínimo relativo. Ese mínimo de contagios implica realizar 8 test por cada persona que tuvo contacto con un infectado, a los 4 días que se produjo el contacto.

d) Evalúe f_x en el punto (4,1) e interprete su resultado en el contexto de este ejercicio.

$$f_x(4, 1) = 2x - 4y = 2(4) - 4(1) = 4$$

Si la cantidad de días hasta realizar el test desde que se tuvo contacto con un infectado permanece fijo en 1 y se incrementa en 1 persona la cantidad de test a realizar cuando se realizan 4 tests, entonces la cantidad de contagios aumentan aproximadamente en 4 personas por día.

2. *a*)

$$a_n = \begin{cases} 550(1{,}06)^n & \text{si } 0 \leq n \leq 23 \\ 2100{,}8 & \text{si } 23 < n \end{cases}$$

b)

$$\begin{aligned} 550(1{,}06)^n &= 1750 \\ 1{,}06^n &= \frac{175}{55} \\ n &\approx 19{,}9 \end{aligned}$$

c) Queremos encontrar k que resuelve la siguiente ecuación:

$$30 \sum_{n=0}^{k} a_n = 1900000$$

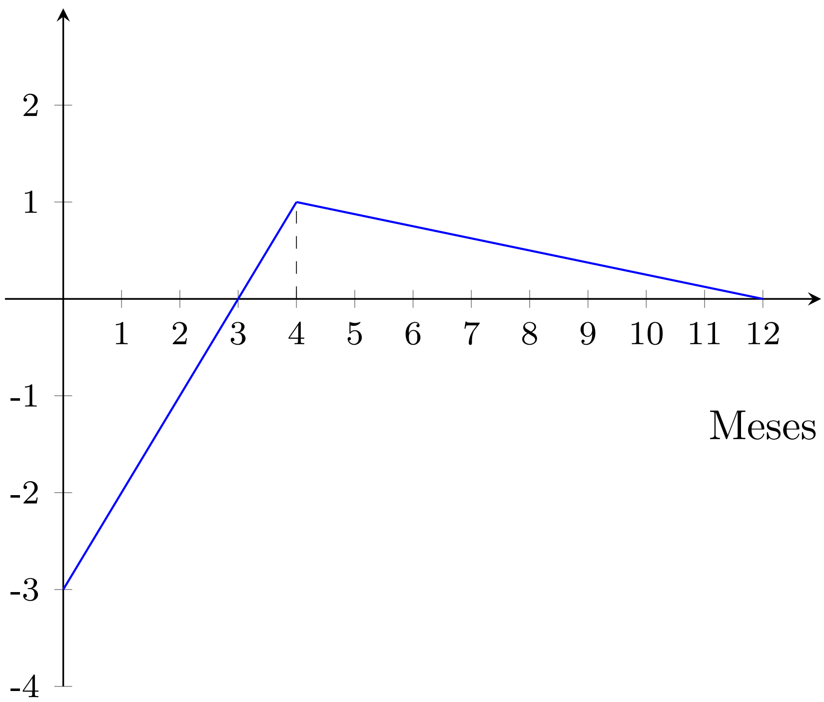
La inversión durante los años 2020 y 2021 es de

$$30 \sum_{n=0}^{23} a_n = 30 \sum_{n=0}^{23} 550(1{,}06)^n = 838457$$

Por lo tanto, el k que buscamos es mayor a 23.

$$\begin{aligned} 30 \sum_{n=0}^{k} a_n &= 1900000 \\ 30 \left(\sum_{n=0}^{23} a_n + \sum_{n=24}^{k} a_n \right) &= 1900000 \\ 838457 + 30 \sum_{n=24}^{k} 2100{,}8 &= 1900000 \\ 838457 + 30(k - 23)2100{,}8 &= 1900000 \\ k &\approx 39{,}8 \end{aligned}$$

3. *a*)



b) $\int_0^4 f(t)dt = \int_0^4 t - 3dt = \frac{t^2}{2} - 3t\Big|_0^4 = -4$
Respecto a comienzos de Enero, el banco ve reducidas sus reservas en 4 millones de dolares a fines de Abril.

c)

$$\begin{aligned} 10 + \int_0^k f(t)dt &= 6 \\ 10 + \frac{t^2}{2} - 3t\Big|_0^k &= 6 \\ 10 + \frac{k^2}{2} - 3k &= 6 \\ \frac{k^2}{2} - 3k + 4 &= 0 \end{aligned}$$

La última ecuación tiene soluciones $k = 2$ y $k = 4$, por lo que el banco cuenta con reservas por 6 millones de dolares a finales de Febrero y a finales de Abril.