Segundo parcial - Matemática para las Ciencias Sociales

10 de julio de 2020

1. Una empresa busca minimizar la función de costos medio de producir una unidad de producto. La función que describe el costo medio, medido en dólares, está dado por la función:

$$CMe : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/CMe(x,y) = 6x^2 - 16x + y^2 - 6y + 12{,}5$$

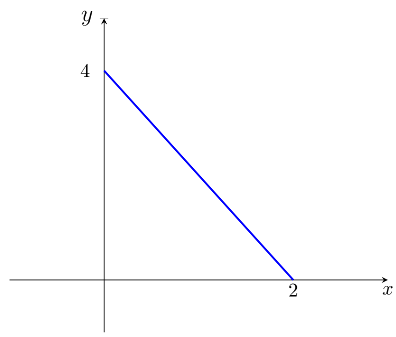
donde x es la cantidad horas de trabajo que se necesitan para producir una unidad de producto, e y la inversión necesaria de capital (en miles de dólares). Para minimizar costos, la empresa debe cumplir con la siguiente relación entre horas y capital: $2x + y = 4$. En función de estos datos se pide:

a) Plantee el problema como un problema de minimización con la restricción que corresponda.

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & 6x^2 - 16x + y^2 - 6y + 12{,}5 \\ s.a. \quad & 2x + y = 4 \end{aligned}$$

b) Represente gráficamente el conjunto de combinaciones posibles de horas de trabajo y la cantidad de capital que es necesario invertir.

$$D = \left\{(x,y) \in R^2 / 0 \geq x \geq 2, 0 \geq y \geq 2\right\}$$



c) Determine cuántas horas de trabajo e inversión de capital deberá realizar la empresa para minimizar el costo medio. Justifique su respuesta.

Dado que $x \geq 0$ y $y \geq 0$, a partir de la restricción $2x + y = 4$ concluimos que $0 \leq x \leq 2$. Despejando y de la restricción y sustituyendo en la función de utilidad, obtenemos:

$$h(x) = CMe(x, 4 - 2x) = 6x^2 - 16x + (4 - 2x)^2 - 6(4 - 2x) + 12{,}5$$

El problema se reduce a determinar el máximo absoluto de h en el intervalo $[0, 2]$

$$\begin{aligned} h'(x) = &= 12x - 16 + 2(4 - 2x)(-2) + 12 \\ &= 12x - 16 - 16 + 8x + 12 = 20x - 20 \Rightarrow 0 = 20x - 20 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el diagrama de signo de h' es

$$sg(h'(x)) \qquad \begin{array}{ccccc} \nexists & - & 0 & + & \nexists \\ \hline 0 & & 1 & & 2 \end{array}$$

Concluimos así que h alcanza su mínimo absoluto en $x = 1$. Por lo tanto, la empresa minimiza el costo medio de producir una unidad cuando contrata una hora de trabajo y 2 mil dolares de capital.

d) Calcule el costo medio mínimo.

El costo medio mínimo surge de sustituir en la función de $CMe(1, 2) = 0{,}5$. Por lo tanto, cada unidad de producto le cuesta medio dolar.

2. Una empresa realiza una importación mensual de cierto articulo. La empresa importó 2500 unidades a comienzos de enero, 2300 a comienzos de febrero, 2116 a comienzos de marzo del 2020. Desde comienzos del 2020 hasta finales del 2021 la cantidad de unidades mensuales importadas bajó un porcentaje fijo mensual. A comienzos del 2022 la empresa deja de disminuir la cantidad comprada y la mantiene constante cada mes.

a) Dar una expresión para la cantidad de artículos importados por mes, n meses después de comienzo de 2020.

$$a_n = \begin{cases} 2500(0{,}92)^n & \text{si } \ 0 \leq n \leq 23 \\ 367 & \text{si } \ 23 < n \end{cases}$$

b) ¿En qué momento se alcanzan los 550 artículos importados mensualmente?

$$\begin{aligned} a_n &= 550 \\ 2500(0{,}92)^n &= 550 \\ n &= \log_{0{,}92} \frac{550}{2500} \approx 18{,}2 \end{aligned}$$

c) ¿Cuántos artículos fueron importados por la empresa desde comienzos del 2020 hasta finales del 2023?

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{47} a_n &= \sum_{n=0}^{23} 2500(0{,}92)^n + \sum_{24}^{47} 367 \\
&= 2500\left(\frac{0{,}92^{24}-1}{0{,}92-1}\right) + 24(367) \\
&\approx 35.833{,}7
\end{aligned}$$

3. Un grupo de demógrafos está analizando la evolución de la cantidad de inmigrantes en cierto país. A partir de los datos disponibles, realizan una proyección sobre la evolución de los inmigrantes de acuerdo al siguiente modelo:

$$g : [1, 13] \to \mathbb{R}/g(t) = -\frac{4}{t} - t + \frac{17}{2}$$

donde $t = 1$ corresponde a comienzos de enero de 2020, $t = 2$ comienzos de febrero de 2020, etc., y $g(t)$ representa la tasa de inmigrantes por mes (en miles) en el mes t.

a) Calcular el saldo neto de inmigración al país durante enero del 2020.
La función $G(t) = -4ln(t) - \frac{t^2}{2} + \frac{17}{2}t$ es una primitiva de g, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_1^2 g(t)dt &= G(2) - G(1) \\
&= -4ln(2) + 7 \\
&\approx 4{,}23
\end{aligned}$$

b) Suponiendo que a comienzos del 2020 la población de inmigrantes en el país alcanza los 100.000 individuos, determinar una función que describa la cantidad de inmigrantes presentes en el país en el tiempo t.
La cantidad de inmigrantes en el país puede expresarse como $I : [1, 13] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
I(t) &= 100 + \int_1^t g(x)dx \\
&= 100 + G(t) - G(1) \\
&= 92 - 4ln(t) - \frac{t^2}{2} + \frac{17}{2}t
\end{aligned}$$

c) ¿En qué momento la cantidad de inmigrantes el país crece?¿en que momento se alcanza la máxima cantidad de inmigrantes presentes en el país?
Dado que $I'(t) = g(t)$ para describir el crecimiento de I basta analizar el signo de g

$$g(t) = -\frac{4}{t} - t + \frac{17}{2} = \frac{-8 - 2t^2 + 17t}{2t}$$

$$\begin{array}{lccccc}
 & \nexists & 0 & + & 0 & - \\
sg\ g(t) & & | & & | & \rightarrow \\
 & & 0 & & 8 &
\end{array}$$

La cantidad de inmigrantes presentes en el país crece de enero a agosto, alcanzando el máximo en este último mes.