Primer parcial - Matemática para las Ciencias Sociales

8 de mayo de 2021

GRUPO 1

Ejercicio 1

1. Determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+4z & = & 2 \\ x+y+2z & = & 1 \\ 2x+4y+8z & = & 4 \end{array}\right. \Rightarrow E_1 - E_2 \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+4z & = & 2 \\ y+2z & = & 2 \\ 2x+4y+8z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 2E_1 - E_3 \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+4z & = & 2 \\ y+2z & = & 2 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow y = 1 - 2z$$

Sustituyendo en la primer ecuación obtenemos que $x = 0$. Por lo tanto, el sistema es compatible e indeterminado, siendo su solución:

$$S = \{(x,y,z) = (0, 1-2z, z), z \in R\}$$

Alternativamente:

$$S = \left\{(x,y,z) = (,y,\frac{y-1}{2}y), y \in R\right\}$$

2. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando su respuesta: "Si el sistema de ecuaciones tiene mayor número de ecuaciones que de variables, no es posible que la solución al sistema sea única."

La afirmación es falsa. Un sistema de ecuaciones con más ecuaciones que variables puede tener una solución única. Por ejemplo en un sistema de 2 variables y 3 ecuaciones puede suceder que 2 ecuaciones tengan una solución compatible e indeterminada, pero la tercer ecuación solamente tenga un punto de contacto con éstas. Un sistema concreto que cumple lo anterior es:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ 2x+4y & = & 6 \\ x+y & = & 1 \end{array}\right.$$

(Alternativamente pueden hacer un gráfico dibujando las soluciones de distintas ecuaciones de un sistema 3×2).

Ejercicio 2

La matriz P contiene la proporción de vacunas Pfizer y Sinovac (primer y segunda columna, respectivamente) que van a ser entregadas en las próximas semanas al norte y al sur del Río Negro (primer y segunda fila, respectivamente), y el vector t contiene el total de vacunas que se entregan al norte y al sur del Río Negro.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 320.000 \\ 730.000 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. ¿Qué condición se tiene que cumplir para que exista P^{-1}? ¿Se cumple dicha condición en este ejercicio?

   Para que exista la inversa de una matriz es condición necesaria que su determinante sea diferente de cero. En este caso, el determinante es: det $= 0{,}4 \times 0{,}7 - 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}1$, por lo que se cumple la condición.

2. Resuelva la ecuación $PX = t$.

$$PX = t \Rightarrow X = P^{-1}t \Rightarrow \frac{1}{0{,}1} \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}3 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320.000 \\ 730.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50.000 \\ 1.000.000 \end{pmatrix}$$

3. ¿Qué interpretación se le da a la matriz X?

   La matriz X respresenta la cantidad total de vacunas de Pfizer y Sinovac que se cuenta para distribuir: hay 50 mil de Pfizer y 1 millon de Sinovac.

Ejercicio 3

1. Considerese la siguiente función

$$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / g(t) = te^{-t} + \frac{1}{2}$$

   Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} g(t)$

2. Las utilidades de una empresa a lo largo del tiempo se corresponden con la función.

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / f(x) = ln(te^{-t} + \frac{1}{2}) + 3$$

   Donde t corresponde a meses a partir del inicio de actividades de la empresa y $f(t)$ está expresado en miles de dolares. Probar que, si el modelo de utilidades es correcto, la empresa nunca da pérdidas.

   Sugerencia 1: investigar si f posee mínimo absoluto.
   Sugerencia 2: puede ser de utilidad saber que el diagrama de signo de g es

$$\begin{array}{lccc} & \nexists & + & + \\ sg\ g(t) & \longrightarrow & | & \longrightarrow \\ & & 0 & \end{array}$$

Solución Ejercicio 3

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} te^{-t} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2. $$f'(t) = \frac{\left(te^{-t} + \frac{1}{2}\right)'}{te^{-t} + \frac{1}{2}} = \frac{e^{-t} - te^{-t}}{te^{-t} + \frac{1}{2}} = \frac{e^{-t}(1-t)}{te^{-t} + \frac{1}{2}}$$

   El diagrama de signo de $f'(t)$ podemos calcularlo

   $$\begin{array}{lccc} & + & 0 & - \\ sg\ e^{-t}(1-t) & \longrightarrow & | & \longrightarrow \\ & & 1 & \end{array}$$

   $$\begin{array}{lccc} & \nexists & + & + \\ sg\ te^{-t} + \frac{1}{2} & \longrightarrow & | & \longrightarrow \\ & & 0 & \end{array}$$

   $$\begin{array}{lccccc} & \nexists & + & + & 0 & - \\ sg\ f'(t) & \longrightarrow & | & \longrightarrow & | & \longrightarrow \\ & & 0 & & 1 & \end{array}$$

   Por otro lado, tenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t) = ln(\frac{1}{2}) + 3$ y $f(0) = ln(\frac{1}{2}) + 3$.
   Por lo tanto, el mínimo absoluto se alcanza en $t = 0$ y vale $ln(\frac{1}{2}) + 3 > 0$. Lo anterior implica que $f(t) > 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$ y por lo tanto podemos afirmar que no hay pérdidas.

GRUPO 2

Ejercicio 1
En el mes de marzo de 2021 se detectó la presencia de la variante P1 del nuevo Coronavirus en Uruguay. La matriz C contiene el promedio de casos diarios detectados en marzo y abril de este año (filas de la columna C, respectivamente) para la variante original del Coronovarius (columna 1) y para la variante P1 (columna 2). Por otra parte, se sabe que el promedio de personas fallecidas por día con Covid-19 en marzo y en abril son de 16 y 55, respectivamente.

$$C = \begin{pmatrix} 1300 & 150 \\ 500 & 2500 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Escriba el vector (f) que contenga el promedio de fallecidos diarios con Covid-19 en Uruguay en los meses de marzo y abril.

$$f = \begin{pmatrix} 16 \\ 55 \end{pmatrix}$$

2. Resuelva la ecuación $CX = f$.

$$CX = f \Rightarrow X = C^{-1}f \Rightarrow \frac{1}{1300 \times 2500 - 150 \times 500}\begin{pmatrix} 2500 & -150 \\ -500 & 1300 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}02 \end{pmatrix}$$

3. ¿Qué interpretación se le da a la matriz X?

   La matriz X se puede interpretar como la tasa de mortalidad de la variante original (0.01 por cada caso confirmado) y de la variante P1 (0.02 por cada caso confirmado).

Ejercicio 2

Un laboratorio quiere comparar la patente de un nuevo medicamento para comenzar a fabricarlo en Uruguay. El laboratorio sabe que la función de costos está dada por la siguiente ecuación:

$$C : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / C(x) = 0{,}5x - \ln(x^2 + 1) + 8$$

donde $C(x)$ es el costo total expresado en millones de dólares y x es la cantidad de medicamento (en millones de unidades) que se fabrican.

1. Calcule $C(0)$ e interprete el resultado.

   $C(0) = 8$ Representa el costo asociado a no producir medicamentos, que asciende a 8 millones de dólares (costo fijo).

2. Calcule la tasa promedio de cambio entre $x = 1$ y $x = 2$ y entre $x = 4$ y $x = 5$ e interprete los resultados.

$$TPC_{[1,2]} = \frac{C(2) - C(1)}{2 - 1} \approxeq -0{,}41$$
$$TPC_{[4,5]} = \frac{C(5) - C(4)}{5 - 4} \approxeq 0{,}075$$

   Por cada millón de unidades que se fabrican del medicamento, el costo desciende en aproximadamente 410 mil dólares en promedio, cuando se produce 1 millones de unidades. En cambio, cuando se producen 4 millones de unidades del medicamento y se desean producir 5 millones, el costo de producción aumenta en aproximadamente 75 mil dólares en promedio.

   $-0{,}41$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(1, C(1))$ y $(2, C(2))$, y $0{,}075$ es la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(4, C(4))$ y $(5, C(5))$.

3. Determine la cantidad de unidades del medicamento que es necesario producir para minimizar el costo y calcule es el costo asociado.

$$C(x) = 0{,}5x - \ln(x^2 + 1) + 8$$
$$C' = 0{,}5 - \frac{2x}{x^2 + 1} = 0$$
$$\frac{0{,}5(x^2 + 1) - 2x}{x^2 + 1} = 0$$
$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

El signo de la derivada del numerador es siempre positivo, por lo que el signo de la función derivada de costos depende de lo que suceda en el numerador:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & \nexists & + & 0 & - & 0 & + \\
sg\ C'(x) & 0 & & 2-\sqrt{3} & & 2+\sqrt{3} & \\
\end{array}$$

entonces el mínimo absoluto de C se podría alcanzar en $x = 0$ o en $x = 2 + \sqrt{3}$. Dado que $C(0) = 8 > C(2 + \sqrt{3}) = 7{,}16$ el mínimo absoluto se alcanza cuando producen $2 + \sqrt{3}$ millones de dosis del medicamento y el costo mínimo asociado es de 7.16 millones de dólares.

Ejercicio 3

En cierto país se está planificando la distribución de 3 vacunas a las distintas regiones del mismo (Sinovac, Pfizer y AstraZeneca). Debido a las distintas condiciones de preservacion necesarias para cada una, se imponen restricciones en el peso (en kg) de las cajas en las que serán transportadas:

- Tenemos que 6 veces el peso de la caja de sinovac supera en 39kg al peso de 5 cajas de Pfizer.
- Se sabe que 2 veces el peso de la caja de Sinovac junto con una caja Pfizer y 8 cajas de AstraZeneca equivale a 45kg
- El peso de 8 cajas de Sinovac junto con 5 cajas de AstraZeneca superan en 72kg a 5 cajas de Pfizer.

1. Plantear las restricciones anteriores como un sistema de ecuaciones, clarificarlo y resolverlo (en caso de ser posible).
2. Si a las restricciones anteriores se le agrega la condición de que los pesos de cada caja no pueden fraccionarse (los pesos deben ser números naturales 0; 1; 2; 3; ...). ¿Cuantas respuestas pueden darse al problema anterior?
   (Sugerencia: recuerde que los pesos son cantidades positivas.)

Solución Ejercicio 3

1. Si llamamos x, y, z a los pesos de cajas de Sinovac, Pfizer y AstraZeneca respectivamente, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+8z &=& 45 \\ 8x-5y+5z &=& 72 \\ 6x-5y &=& 39 \end{array}\right. \overset{8E_2-5E_1}{\rightarrow} \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+8z &=& 45 \\ 54x-45y &=& 351 \\ 6x-5y &=& 39 \end{array}\right. \overset{\frac{1}{9}E_2}{\rightarrow}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+8z &=& 45 \\ 6x-5y &=& 39 \\ 6x-5y &=& 39 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+8z &=& 45 \\ 6x-5y &=& 39 \end{array}\right.$$

El sistema compatible indeterminado y su conjunto solución es

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}, y = 12 - 3z, x = \frac{33 - 5z}{2}\right\}$$

2. Las únicas combinaciones posibles son

   - $z = 0$, $y = 12$, $x = \frac{33}{2}$
   - $z = 1$, $y = 9$, $x = 14$
   - $z = 2$, $y = 6$, $x = \frac{23}{2}$
   - $z = 3$, $y = 3$, $x = 9$
   - $z = 4$, $y = 0$, $x = \frac{13}{2}$
   - $z = 5$, $y = -3$, $x = 4$ No es válida ya que y no puede ser negativo.

   Cualquier valor de z mayor a 4 implica que la coordenada y sea negativa y por lo tanto no es una solución que tenga sentido para nuestro problema. En este caso, el problema tiene solamente 2 soluciones.