Segundo parcial - Matemática para las Ciencias Sociales

10 de julio de 2021

Ejercicio 1
Un banco realiza a comienzos de 2020 una proyección sobre la tasa de depósitos/retiros de sus clientes durante dicho año. Dicha proyección se expresa a través del siguiente modelo:

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / f(t) = \frac{-1}{5} + 14e^{-2t}$$

donde $f(t)$ expresa la tasa de depósitos (en millones de dolares por mes) en el mes t y $t = 0$ corresponde a comienzos de enero de 2020. Supondremos que las reservas del banco dependen exclusivamente de los depósitos/retiros.

1. Calcular la variación neta de depósitos desde comienzos de Febrero hasta finales de Abril.

   La siguiente es una primitiva de f

   $$F(t) = -7e^{-2t} - \frac{t}{5}$$

   Por lo tanto
   $$\int_1^4 f(t)dt = F(4) - F(1) \approx 0{,}345$$

   En este período las reservas se incrementaron en 345 mil dolares aproximadamente.

2. ¿Es correcto afirmar que durante la mayor parte del período indicado en 1) las reservas del banco se incrementaron? Justifique.

   Falso. El diagrama de signo de f es el siguiente

   $$\begin{array}{cccccc} & \nexists & & + & 0 & - \\ sg\ f(t) & \text{———} & | & \text{———} & | & \longrightarrow \\ & & 0 & & 2{,}1 & \end{array}$$

   Donde el valor 2,1 se obtiene resolviendo $14e^{-2t} - \frac{1}{5} = 0$. De esta manera vemos que las reservas disminuyen durante más de la mitad del periodo que va desde Febrero hasta finales de Abril.

3. Sabiendo que las reservas del banco a finales de Abril son de 10 millones de dolares, construir la función que describe la cantidad de reservas del banco en tiempo t.

   La función R que describe las reservas es una primitiva de f que cumple $R(4) = 10$. Por lo tanto

$$R(4) = 10$$
$$R(4) = F(4) + k$$

$$10 = -7e^{-8} - \frac{4}{5} + k$$
$$k \approx 10{,}8$$

   Así concluimos que $R(t) = -7e^{-2t} - \frac{t}{5} + 10{,}8$

4. Determinar en que momento, durante los primero dos años de funcionamiento, el banco alcanza su menor nivel de reservas.

   A partir del diagrama de signo obtenido en 2), sabemos que el menor valor de R en e intervalo $[0, 24]$ se alcanza en $t = 0$ o $t = 24$. Dado que $R(0) \approx 3{,}8$ y $R(24) \approx 6$ concluimos que en $t = 0$ se alcanza el menor nivel de reservas durante los primero dos años de funcionamiento.

Ejercicio 2
A comienzos del 2022 se pondrá en marcha un plan para favorecer el tursimo. El proyecto durará 10 años y participarán organismos públicos y privados nacionales e internacionales. Según estimaciones del Ministerio de Turismo, el plan podrá incrementar la cantidad de turistas ena una tasa del 20 % anual hasta el año 2031. A su vez, los datos oficiales indican que debido a la pandemia, a fines del 2021 la cantidad de turistas que recibió Uruguay es solo de 200.000. En base a esta información, se pide:

1. Escriba la fórmula general para calcular la cantidad de turistas que ingresaran al país como consecuencia del plan.

$$b_n = 200.000(1,20)^n \quad 0 \leq n \leq 10$$

   donde b_n representa la cantidad de turistas que ingresan a Uruguay n años a partir de finales de 2021.

2. ¿Cuántos turistas se estima que ingrearán a finales del 2025 y a finales del 2030?

   A finales de 2025 habrá $b_4 = 200.000(1{,}20)^4 = 414.720$
   A finales de 2030 habrá $b_9 = 200.000(1{,}20)^9 \approx 1.031.956$

3. ¿En que momento, considerando desde comienzos de 2022, se habrán recibido 3.3 millones de turistas?

$$\sum_{n=0}^{k} b_n = 3.300.000$$

$$\sum_{n=0}^{k} 200.000(1{,}20)^n = 3.300.000$$

$$200.000 \sum_{n=0}^{k} 1{,}20^n = 3.300.000$$

$$200.000 \left(\frac{1 - 1{,}20^{k+1}}{1 - 1{,}20} \right) = 3.300.000$$

$$1 - 1{,}20^{k+1} = -3{,}3 \Rightarrow (k+1)\ln(1{,}2) = \ln(4{,}3) \Rightarrow k \approx 7$$

A los 7 años de iniciado el programa se alcanzarán los 3.3 millones de turistas (aproximadamente a fines de 2028).

Ejercicio 3

Un estudio reciente determina que el desarrollo cognitivo de los niños y niñas de 0 a 6 años puede ser descrito por la siguiente función:

$$C : D \to \mathbb{R} / C(x, y) = -3x^2 + 36x - 4y^3 + 12y + 2000$$

$$\text{con } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 8\}$$

donde x es la cantidad de horas diarias que los padres le dedican al cuidado activo de los menores e y es la cantidad de horas diarias que el niño o niña está frente a una pantalla, y donde $C(x, y)$ mide el desarrollo cognitivo mediante un índice que varía entre 0 y 3000. Un mayor valor del índice indica un mejor desarrollo del niño o niña.
Se pide:

1. Evalúe $C_y(3, 2) = \frac{\partial C}{\partial y}(3, 2)$ en el punto estacionario hallado en la parte 2). Comente e interprete el resultado obtenido.

   $$C_y(3, 2) = -12(2)^2 + 12 = -36$$

   Cuando la cantidad de horas de cuidados activos de los padres se mantienen constantes en 3 horas diarias, y la cantidad de horas de pantalla aumenta de 2 a 3, el desarrollo de los niños y niñas se reduce en aproximadamente 36 unidades del índice de desarrollo cognitivo.

2. Encuentre todos los puntos estacionarios de la función y clasfique solo los que tienen sentido en el contexto de este ejercicio.

   $$C_x(x, y) = -6x + 36 = 0 \Rightarrow x = 6$$
   $$C_y(x, y) = -12y^2 + 12 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

(6,1) y (6,-1) son dos puntos estacionarios de la función $C(x, y)$. Dado que en el contexto de este problema, las horas no pueden ser negativas, se descarta el punto estacionario (6,-1) para su clasificación.

$$
\begin{aligned}
&C_{xx}(x, y) = -6 \\
&C_{xy}(x, y) = C_{yx}(x, y) = 0 \\
&C_{yy}(x, y) = -24y \\
&H_C(6, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H_C(6, 1)) = 144 \quad \text{y} \quad C_{xx}(6, 1) < 0
\end{aligned}
$$

El punto estacionario (6,1) es un máximo relativo de C, dado que $\det(H_C(6, 1))$ es positivo y $C_{xx}(6, 1)$ es negativo. Si los menores tienen 1 hora de pantalla y 6 horas de actividades recreativas, se alcanza un máximo relativo de desarrollo cognitivo. El valor de dicho máximo relativo de desarrollo cognitivo es $C(6, 1) = 2116$.

3. Si se sabe que la suma de horas diarias de cuidado activo a los menores y las horas diarias de pantalla son igual a 8, ¿cuál es la distribución óptima de horas para los niños y niñas para maximizar su nivel de desarrollo? Plantee e problema a resolver y encuentre la solución justificando su respuesta.

   En este caso se debe maximizar la función objetivo sujeto a la restricción $x + y = 8$. El problema lo podemos plantear como:

$$
\begin{aligned}
\text{máx} \quad & -3x^2 + 36x - 4y^3 + 12y + 2000 \\
\text{s. a.} \quad & x + y = 8
\end{aligned}
$$

   Dado que $x \geq 0$ y $y \geq 0$, a partir de la restricción $x + y = 8$ concluimos que $0 \leq x \leq 8$. Despejando y de la restricción y sustituyendo en la función de desarrollo cognitivo, obtenemos:

$$h(x) = C(x, 8 - x) = -3x^2 + 36x - 4(8 - x)^3 + 12(8 - x) + 2000$$

   El problema se reduce a determinar el máximo absoluto de h en el intervalo $[0, 8]$

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= -6x + 36 + 12(8 - x)^2(-1) + 12(-1) \\
&= 12x^2 - 198x + 792 = 0 \Rightarrow x = \frac{16{,}5 \pm \sqrt{8{,}25}}{2} \Rightarrow x = 6{,}81 \quad \text{y} \quad x = 9{,}68
\end{aligned}
$$

   El diagrama de signo de h' es:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & \nexists & & + & 0 & - & & \nexists \\
sg(h'(x)) & & 0 & & 6{,}81 & & 8 &
\end{array}
$$

   Dado que $x = 9{,}68$ no pertenece al dominio admisible en este ejercicio, es un punto que lo vamos a tener que descartar. Concluimos así que h alcanza su máximo absoluto en $x = 6{,}81$. Por lo tanto, el desarrollo cognitivo de los niños se maximiza cuando los padres dedican 6,81 horas de cuidado activo diario y tienen hasta 1,19 horas de pantalla diaria. El máximo absouto es: $C(6{,}81, 1{,}19) = 2113{,}57$