Primer parcial - Matemática para las Ciencias Sociales

Solución

7 de mayo de 2022

Ejercicio 1

Un nutricionista desea planificar una comida en torno a tres alimentos. La comida debe incluir 8800 unidades de vitamina A, 3380 unidades de vitamina C y 1020 unidades de calcio. El número de unidades de las vitaminas y el calcio en cada gramo de los alimentos se resume en la siguiente tabla:

	Alimento 1	Alimento 2	Alimento 3
Vitamina A	400	1200	800
Vitamina C	110	570	340
Calcio	90	30	60

1. Determine la cantidad de cada alimento que el nutricionista debe incluir en la comida para satisfacer las necesidades de vitaminas y calcio.

   Para resolver el problema podemos plantear un sistema de ecuaciones de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 400x + 1200y + 800z &= 8800 \\ 110x + 570y + 340z &= 3380 \\ 90x + 30y + 60z &= 1020 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -110E_1 + 400E_2 = \begin{cases} 400x + 1200y + 800z &= 8800 \\ 96000y + 48000z &= 384000 \\ 90x + 30y + 60z &= 1020 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -90E_1 + 400E_3 = \begin{cases} 400x + 1200y + 800z &= 8800 \\ 96000y + 48000z &= 384000 \\ -96000y - 48000z &= -384000 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_2 + E_3 = \begin{cases} 400x + 1200y + 800z &= 8800 \\ 96000y + 48000z &= 384000 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

   Por lo que el sistema es compatible e indeterminado. De la ecuación 2 obtenemos que $y = 4 - 0{,}5z$ y sustituyendo en la ecuación 1 $x = 10 - 0{,}5z$.

$$S = \{(x, y, z)/x = 10 - 0{,}5z, y = 4 - 0{,}5z, z \in \mathbf{R}\}$$

2. ¿Qué sucede si el nutricionista desea que la cantidad de unidades de vitamina C cambie de 3380 unidades a 2160? Interprete este resultado.

Si la cantidad de unidades de vitamina C pasa de 3380 a 2160, el sistema será incompatible ya que no cambian los coeficientes del sistema. En la última transformación del sistema tendríamos:

$$\Rightarrow E_2 + E_3 = \left\{ \begin{array}{rcr} 400x + 1200y + 800z & = & 8800 \\ 96000y + 48000z & = & -104000 \\ 0 & = & -488000 \end{array} \right.$$

Por lo tanto, no existe una combinación de los alimentos 1, 2 y 3 que cumpla con los nuevos requerimientos diarios de vitaminas y calcio conjuntamente.

3. ¿Es posible aplicar el teorema de Cramer a este problema? Justifique su respuesta.

   El teorema de Cramer se podría utilizar bajo la condición de que la matriz de coeficientes asociados al sistema de ecuaciones es diferente de cero $\det(N) \neq 0$.

$$N = \begin{pmatrix} 400 & 1200 & 800 \\ 110 & 570 & 340 \\ 90 & 30 & 60 \end{pmatrix}$$

   De esa forma, podríamos hallar la inversa para encontrar la solución al sistema. Dado que en este caso vimos que el sistema es compatible indeterminado o incompatible, dependiendo del valor de coeficientes independientes del sistema, no podemos aplicar Cramer.

Ejercicio 2
Considere las siguientes ecuaciones matriciales:

$$3X(A+B) = B \tag{1}$$

$$-CY + D = C \tag{2}$$

Donde las matrices A, B, C y D están dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -4 & -6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Indique las dimensiones de las matrices X e Y.

   La dimensión de X es de 2x2 y de Y de 3x3.

2. ¿Cuál de las siguientes dos matrices es la inversa de la matriz C? Justifique su respuesta.

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 & -3 \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   La inversa de la matriz C debe cumplir con que: $C^{-1}C = I$. Aplicando esta propiedad obtenemos que la inversa de C es la matriz F.

3. Resuelva las ecuaciones matriciales (1) y (2).

$$3X(A+B) = B \to X(A+B)(A+B)^{-1} = \frac{1}{3}B(A+B)^{-1} \to X = \frac{1}{3}B(A+B)^{-1}$$

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$-CY + D = C \to CY = (D-C) \to Y = C^{-1}(D-C)$$

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 & -15 & -6{,}5 \\ 0{,}5 & 9 & 5{,}5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

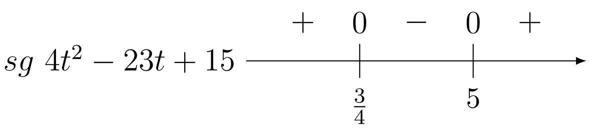
Ejercicio 3 (18 puntos)
Las utilidades de una empresa a lo largo del tiempo se corresponden con la función.

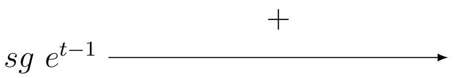
$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / f(t) = \frac{15t - 4t^2}{e^{t-1}} + 3$$

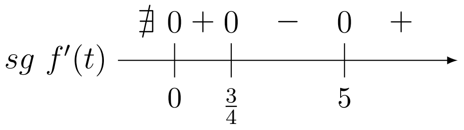
Donde t corresponde a meses a partir del inicio de actividades de la empresa y $f(t)$ está expresado en miles de dolares.

1. Probar que, si el modelo de utilidades es correcto, la empresa nunca da pérdidas.

$$f'(t) = \frac{4t^2 - 23t + 15}{e^{t-1}}$$







El mínimo absoluto de f se alcanza en $x = 0$ o $x = 5$. Dado que $f(0) > f(5)$, concluimos que el mínimo absoluto es 2,54 y se alcanza en $x = 5$. Por lo tanto, las utilidades siempre son positivas, lo que quiere decir que la empresa nunca da pérdidas.

2. ¿El modelo predice que la utilidad alcanza un máximo absoluto? Justifique.

Por ordenes, sabemos que $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{15t-4t^2}{e^{t-1}} = 0$ lo que implica que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 3$. Además, tenemos que $f(\frac{3}{4}) \approx 14{,}5$. Por lo tanto, a partir del diagrama de signo de f', concluimos que el máximo absoluto es 14,5.