

SEGUNDO PARCIAL - MATEMÁTICA II

2 de julio de 2022

Ejercicio 1 (20 puntos)

Una nueva empresa se instala en el cono sur y dispone de un modelo predictivo sobre la evolución de sus utilidades durante su primer año de actividades (año 2022). El modelo es el siguiente

$$f : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R} / f(t) = 5e^{-t/2+4}$$

donde t corresponde a meses desde el inicio de actividades ($t = 0$ corresponde a comienzos de enero de 2022) y $f(t)$ corresponde a la tasa de utilidades (millones de dolares / mes) en tiempo t . Supondremos que los fondos de la empresa se nutren exclusivamente de las utilidades.

1. ¿Cuál es el saldo neto de utilidades durante enero de 2022?

La función $G(t) = -10e^{-t/2+4}$ es una primitiva de f , por lo tanto

$$\int_0^1 f(t) dt = G(1) - G(0) \approx 214,8$$

Las utilidades acumuladas durante enero de 2022 son aproximadamente 214,8 millones de dolares.

2. A comienzos de setiembre la empresa dispone de 590 millones de dolares en su fondo. Determinar la función $F : [0, 12] \rightarrow \mathbb{R}$ que describe los fondos que dispone la empresa en tiempo t .

La función de fondos F cumple

$$F(t) = G(t) + k$$

$$F(8) = 590$$

por lo tanto

$$-10e^{-8/2+4} + k = 590$$

$$k = 600$$

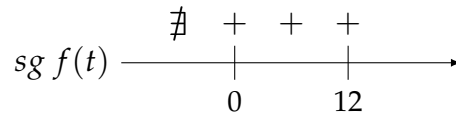
Finalmente

$$F(t) = -10e^{-t/2+4} + 600$$

3. ¿En que momento los fondos de la empresa alcanzan su máximo valor? Justifique.

Tenemos que

$$F'(t) = f(t) = 5e^{-t/2+4}$$



La función F es creciente, por lo tanto el máximo absoluto se alcanza a finales del año 2022 ($t = 12$)

Ejercicio 2 (20 puntos)

Una empresa de telefonía estima que el número de contratos con nuevos clientes que realiza cada año es una función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica esta relación es:

$$C : D \rightarrow \mathbb{R} / C(x, y) = 160x + 240y - 2x^2 - 6y^2 - 4xy$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 50, 0 \leq y \leq 50\}$, $C(x, y)$ es el número de contratos firmados, x indica la cantidad destinada a la publicidad por radio y la y denota la cantidad que se gasta en publicidad por televisión (x e y medidos en miles de dólares).

1. Se sabe que en 2022 la empresa está destinando \$15.000 a la publicidad por radio y \$25.000 a la publicidad por televisión. Según el modelo, ¿cuántos contratos nuevos se espera que se firmen en el año?

$$C(15, 25) = 160(15) + 240(25) - 2(15)^2 - 6(25)^2 - 4(15)(25) = 2700$$

Se espera que en 2022 se firmen 2.700 contratos nuevos.

2. Usando derivadas parciales y partiendo del nivel de inversión de publicidad de 2022, estime qué sucede con la cantidad de contratos que se firman por año, si se asignan \$1.000 más a la publicidad por televisión. ¿Usted recomendaría incrementar el gasto en publicidad en este medio?

$$C_y(x, y) = 240 - 12y - 4x$$

$$C_y(15, 25) = 240 - 12(25) - 4(15) = -120$$

Partiendo de un nivel de gasto de 15 mil en radio y 25 mil en televisión, si se destinan \$1.000 más en la publicidad por televisión manteniendo constante el gasto de publicidad en radio, la cantidad de contratos se reduce en 120 por año. Por lo tanto, no habría que incrementar el gasto en televisión.

3. Si se sabe que el presupuesto total a destinar en gastos de publicidad para el año 2023 es de \$30.000, determine cómo debería repartir la empresa los gastos entre radio y televisión para maximizar la cantidad de contratos a firmar. Plantee el problema a resolver y justifique adecuadamente su respuesta.

$$\text{máx } C(x, y) = 160x + 240y - 2x^2 - 6y^2 - 4xy$$

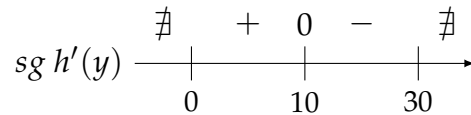
$$\text{sujeto a } x + y = 30$$

Despejo $x = 30 - y$ y sustituyo:

$$C((30 - y), y) = h(y) = 160(30 - y) + 240y - 2(30 - y)^2 - 6y^2 - 4(30 - y)y$$

De las restricciones $y \geq 0$ y $30 - y = x \geq 0$ deducimos que $30 \geq y \geq 0$. Por lo tanto, el problema se reduce a determinar el máximo absoluto de h en el intervalo $[0, 30]$

$$h'(y) = -160 + 240 - 2(2)(30 - y)(-1) - 6(2)y - 120 + 8y = 80 - 8y$$



El máximo absoluto de h se alcanza en $y = 10$, por lo tanto, la solución al problema inicial es el par $(20, 10)$. Para maximizar el nivel de contratos nuevos en 2023 si se va a disponer de \$30.000, se deberían asignar \$20.000 a publicidad en radio y \$10.000 en televisión. Cuando se realiza este gasto, la cantidad de contratos nuevos que prevé el modelo para 2023 es de 3400.

Ejercicio 3 (10 puntos) Una empresa comienza vender un nuevo producto en enero de 2022. Las ventas en dicho mes fueron de 15.000. Rápidamente otras competidores comienzan a vender el mismo producto y las ventas de la primer empresa sufren una caída de 4% mensual.

1. Determinar una expresión para la sucesión que describe la evolución de las ventas de cada mes.

$$a_n = 15000(0,96)^n \text{ para } n \geq 0$$

2. ¿En que momento la empresa habrá vendido una cantidad de 272.000 unidades del producto?

$$\sum_{n=0}^k a_n = 272000$$

$$15000 \left(\frac{0,96^{k+1} - 1}{0,96 - 1} \right) = 272000$$

$$k \approx 30,7$$

3. ¿Cuántas unidades del producto vende desde comienzos del 2024 hasta finales del 2025?

$$\sum_{n=24}^{47} a_n = \sum_{n=0}^{47} a_n - \sum_{n=0}^{23} a_n$$

$$= 15000 \left(\frac{0,96^{48} - 1}{0,96 - 1} \right) - 15000 \left(\frac{0,96^{24} - 1}{0,96 - 1} \right)$$

$$\approx 87929,3$$