Primer parcial - Matemática 2

20 de mayo de 2023

Ejercicio 1
Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolver las siguiente ecuaciones matriciales

1. $AX + C = B$
   Tenemos que
   $$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$
   por lo tanto
   $$\begin{aligned} X =& A^{-1}(B - C) \\ X =& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. $(A + C)YC = B$
   Tenemos que $det(C) = 1$ y $det(A + C) = 0$, por lo tanto C es invertible pero $A + C$ no lo es. Entonces
   $$(A + C)Y = BC^{-1} \ (*)$$
   y como
   $$C^{-1} = \frac{1}{det(C)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
   la ecuación $(*)$ podemos plantearla como
   $$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$
   A partir de la ecuación matricial anterior, construimos el siguiente sistema lineal
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a + 3c &=& 2 \\ 4a + 6c &=& 4 \\ 2b + 3d &=& 0 \\ 4b + 6d &=& 0 \end{array} \right. \underset{E_4 - 2E_3}{\overset{E_2 - 2E_1}{\rightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcl} 2a + 3c &=& 2 \\ 0 &=& 0 \\ 2b + 3d &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2a + 3c &=& 2 \\ 2b + 3d &=& 0 \end{array} \right.$$
   Por lo tanto, las matrices que resuelven la ecuación son de la forma
   $$X = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{2-2a}{3} & \frac{-2}{3}b \end{pmatrix}$$
   Donde $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 2

1. Clasificar y resolver el siguiente sistema 3×3 y discutir su solución según los valores del parámetro k
$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ kx-y &= 1 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x+y+z &= 3 \\ kx-y &= 1 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases} \underset{E_3-E_1}{\rightarrow} \begin{cases} x+y+z &= 3 \\ kx-y &= 1 \\ y &= -2 \end{cases}$$
de la ultima ecuación obtenemos $y=-2$ y por lo tanto el sistema queda
$$\begin{cases} x+z &= 5 \\ kx &= -1 \end{cases}$$
   - Caso $k \neq 0$: de la última ecuación obtenemos $x = \frac{-1}{k}$ y de la primera $z = 5+\frac{1}{k}$. En resumen, el sistema es compatible determinado y su solucion es la terna $(x,y,z) = (\frac{-1}{k}, -2, 5+\frac{1}{k})$
   - Caso $k=0$: el sistema resulta
$$\begin{cases} x+z &= 5 \\ 0 &= -1 \end{cases}$$
el cual es incompatible.

Ejercicio 3
Una mutualista comienza a brindar servicios a partir de enero del 2021. Durante el primer mes (enero) de funcionamiento vende 1600 tickets de medicamentos y durante marzo vende 1764 tickets. Sabemos que la cantidad de tickets vendidos aumenta en igual porcentaje cada mes. Se pide:

1. Determinar la expresión de la sucesión que describe la cantidad de ventas de tickets en cada mes.
Tenemos los siguientes datos
$$\begin{array}{ll} \text{ventas de enero} & 1600 \\ \text{ventas de marzo} & 1764 = 1600.r^2 \end{array}$$
por lo tanto
$$\frac{1764}{1600} = r^2$$
$$1{,}05 = r$$
y así concluimos que $a_n = 1600.r^n$ para $n \geq 0$

2. ¿En que momento la mutualista habrá vendido 82.000 tickets en total (desde que comenzó a brindar servicios)?

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{k} a_n &= 82000 \\
1600\left(\frac{1{,}05^{k+1}-1}{1{,}05-1}\right) &= 82000 \\
k+1 &= log_{1{,}05}3{,}5625 \\
k &\approx 25
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4

Una empresa evalúa instalarse a comienzos del 2023 y contrata un equipo de técnicos que le proporcionan un modelo descriptivo sobre la evolución de sus utilidades a lo largo del tiempo.

$$U : [0,+\infty) \to \mathbb{R} / U(t) = ln\left(\frac{t+2}{t^2-4t+5}\right)$$

donde t son años a partir de comienzos del 2023 y $U(t)$ es la utilidad de la empresa en tiempo t (medida en millones de dólares). Se pide

1. ¿El modelo predice que hay algún tipo de techo para las utilidades de la empresa?

$$
\begin{aligned}
U'(t) &= \left[ln\left(\frac{t+2}{t^2-4t+5}\right)\right]' = \frac{\left(\frac{t+2}{t^2-4t+5}\right)'}{\left(\frac{t+2}{t^2-4t+5}\right)} = \frac{\frac{-t^2-4t+13}{(t^2-4t+5)^2}}{\left(\frac{t+2}{t^2-4t+5}\right)} \\
&= \frac{-t^2-4t+13}{(t+2)(t^2-4t+5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \nexists & 0 & + & 0 & - \\
sg\ U'(t) & \longrightarrow & | & & | & \longrightarrow \\
 & & 0 & & 2{,}1 &
\end{array}
$$

Concluimos que U alcanza su máximo absoluto en $t \approx 2{,}1$, por lo tanto el techo de utilidades es $U(2{,}1) \approx 1{,}4$ millones de dólares.

2. ¿Cual es la predicción a largo plazo que realiza el modelo?
Tenemos que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t+2}{t^2-4t+5} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t^2} = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{t\to+\infty} ln\left(\frac{t+2}{t^2-4t+5}\right) = \lim_{z\to 0} ln(z) = -\infty$$

El modelo predice que, a largo plazo, no hay piso para las utilidades.