Segundo parcial - Matemática 2

14 de Julio de 2023

Ejercicio 1
Consideremos la siguiente función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = ay^2 + 4yx^2 + bx^2 - 8y$$

Sabemos que $(0,4)$ y $(2,-4)$ son puntos estacionarios de f.

1. Determinar el valor de los parámetros a y b.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 8yx + 2bx &= 0 \\ f_y(x,y) = 2ay + 4x^2 - 8 &= 0 \end{cases}$$

   Como $(0,4)$ es punto estacionario, entonces de la segunda ecuación obtenemos $a = 1$. Por otro lado, como $(2,-4)$ es punto estacionario, de la primer ecuación obtenemos $b = 16$.

2. Identificar y clasificar todos los puntos estacionarios de f

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x(8y + 32) &= 0 \\ f_y(x,y) = 2y + 4x^2 - 8 &= 0 \end{cases}$$

   De la primer ecuación, podemos discutir dos casos posibles.
   Caso $x = 0$: sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $2y - 8 = 0$ y entonces llegamos al punto estacionario $(0,4)$.
   Caso $8y + 32 = 0$: sustituyendo $y = -4$ en la segunda ecuación obtenemos $x^2 = 4$ por lo que llegamos a los puntos estacionarios $(2,-4)$ y $(-2,-4)$
   La matriz hessiana de f es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8y + 32 & 8x \\ 8x & 2 \end{pmatrix}$$

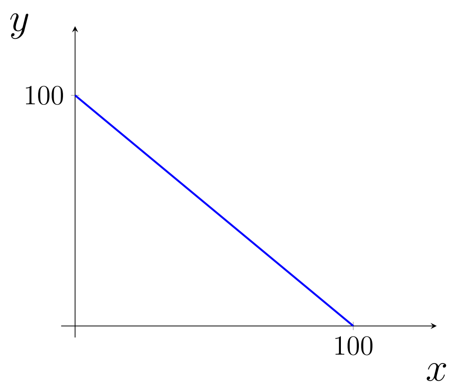
   a) Clasificación de $(0,4)$: $det(H_f(0,4)) > 0$ y $f_{xx}(0,4) > 0$, por lo que f alcanza un mínimo relativo en $(0,4)$
   b) Clasificación de $(2,-4)$: $det(H_f(2,-4)) < 0$, por lo que $(2,-4)$ es un punto silla de f.
   c) Clasificación de $(-2,-4)$: $det(H_f(-2,-4)) < 0$, por lo que $(-2,-4)$ es un punto silla de f.

Ejercicio 2
Una empresa tienen la siguiente función de beneficios:

$$B : D \to \mathbb{R}/B(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$$

donde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x \geq 0, y \geq 0\}$, x es la cantidad de horas de trabajo calificado e y es la cantidad de horas de trabajo no calificado que se contratan por semana, y $B(x, y)$ son los beneficios semanales en dólares que obtiene la empresa. La empresa tiene como restricción que la cantidad total de horas que contrata por semana debe ser igual a 100.

1. Represente gráficamente el conjunto de combinaciones posibles de horas de trabajo calificado y no calificado que puede contratar la empresa.
   La restricción $x+y = 100$ determina que el conjunto de posibilidades del consumidor es

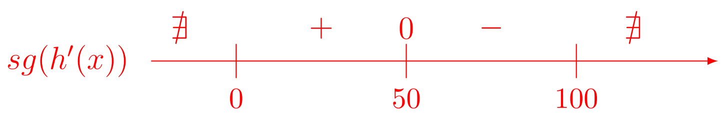


2. Determine cuántas horas de trabajo calificado y no calificado debe contratar para maximizar los beneficios. Justifique su respuesta. Sustituyendo $y = 100 - x$ en B obtenemos

$$B(x, 100 - x) = x^2 + 3x(100 - x) + (100 - x)^2 = h(x)$$

Podemos reformular el problema original como el problema de determinar el máximo absoluto de la función h en el intervalo $[0, 100]$.

$$h'(x) = -2x + 100$$



El máximo absoluto de h se alcanza en $x = 50$, por lo tanto la solución al problema inicial es el par $(x, y) = (50, 50)$. Deben contratarse igual cantidad de horas de trabajo calificado y no calificado.

Ejercicio 3
Un país se ve sujeto a grandes flujos migratorios en la tercer década del siglo XXI. A

partir de los datos de inmigración-emigración de los últimos años se construye un modelo que describe la tasa de inmigración-emigración a lo largo del tiempo

$$f : [3, +\infty) \to \mathbb{R} / f(t) = \frac{1}{t^3} + 3.\frac{1}{t}$$

donde la variable t son años ($t = 3$ corresponde a comienzos del 2023) y $f(t)$ es la tasa de inmigración-emigración (cientos de miles/año)

1. Calcular el saldo neto de inmigración-emigración durante el período 2023-2033.
   $F(t) = \frac{-1}{2}t^{-2} + 3ln(t)$ es una primitiva de f. Por lo tanto

   $$\int_3^{13} f(t)dt = F(13) - F(3) \approx 4{,}45$$

   concluimos que durante el período 2023-2033 hay un saldo neto positivo aproximado de 445.000 inmigrantes.

Este país dispone de políticas muy abiertas de recibimiento a la inmigración. Todo inmigrante que desee radicarse en el país obtiene la residencia y pasa a la categoría *residente no nacional*.

2. Sabiendo que el país cuenta con 900 mil residentes no nacionales a comienzos de 2025, construir la función que describe la cantidad de residentes no nacionales a lo largo del tiempo.
   Buscamos una función $R : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que R es primitiva de f y $R(5) = 9$. Entonces

   $$R(t) = F(t) + k = \frac{-1}{2}t^{-2} + 3ln(t) + k$$

   $$R(5) = \frac{-1}{2{,}5^2} + 3ln(5) + k = 9$$

   finalmente

   $$R(t) = \frac{-1}{2t^2} + 3ln(t) + 4{,}192$$

3. ¿La función hallada en la parte anterior decrece en algún momento?

   $$R'(t) = f(t) = \frac{1}{t^3} + \frac{3}{t} = \frac{1 + 3t^2}{t^3}$$

   $$\begin{array}{ll} sg(1+3t^2) & \xrightarrow{\qquad + \qquad} \\ sg(t^3) & \xrightarrow{\ - \quad 0 \quad + \ } \ (0) \\ sg(R'(t)) & \xrightarrow{\ \nexists \quad 3 \quad + \ } \end{array}$$

   Concluimos que R es creciente.

4. ¿Que predice el modelo que sucederá con la cantidad de residentes no nacionales a largo plazo?

   Tenemos que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{-1}{2t^2} = 0$$

$$\lim_{t \to +\infty} ln(t) = +\infty$$

   Por lo tanto

$$\lim_{t \to +\infty} R(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{-1}{2t^2} + 3ln(t) + 4{,}192 = +\infty$$

   El modelo predice que la cantidad de residentes no nacionales crecerá sin techo en el futuro.