Primer parcial - Matemática 2

21 de mayo de 2024

Ejercicio 1

1. Tatiana, Lucía y Alejandro son estudiantes de la Licenciatura en Desarrollo (FCS, UdelaR) y decidieron formar un grupo de estudio para repartirse los libros de todas las materias correspondientes al sexto semestre de la carrera. Después de revisar exhaustivamente los programas de las materias y consultar con varios docentes de los cursos, llegaron a la conclusión que tendrán que repartirse en total 48 libros; a su vez, por cierta afinidad ideológica e interés académico, acordaron que Tatiana y Lucía tendrán juntas dos veces más libros que Alejandro; por último, y debido a la disponibilidad de tiempo real para estudiar los fines de semana, también acordaron que dos veces la suma de libros de Tatiana y Lucía deben superar en 48 a los de Alejandro.

   a) Expresar los datos disponibles como un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} T+L+A &= 48 \\ T+L &= 2A \\ 2(T+L) &= A+48 \end{cases}$$

   b) ¿Cuantas **soluciones válidas** existen para el problema? Detalle su respuesta.

$$\begin{cases} T+L+A &= 48 \\ T+L-2A &= 0 \\ 2T+2L-A &= 48 \end{cases} \underset{E_3-2E_1}{\overset{E_2-E_1}{\rightarrow}} \begin{cases} T+L+A &= 48 \\ -3A &= -48 \\ -3A &= -48 \end{cases}$$

$$. \overset{E_2-E_2}{\rightarrow} \begin{cases} T+L+A &= 48 \\ -3A &= -48 \\ 0 &= 0 \end{cases} \overset{\frac{-1}{3}E_2}{\rightarrow} \begin{cases} T+L+A &= 48 \\ A &= 16 \end{cases}$$

   El sistema es compatible determinado y su solución analítica es

$$S = \{(T, L, A) \in \mathbb{R}^3 / A = 16, L \in \mathbb{R}, T = 32 - L\}$$

   Dado que las variables involucradas son cantidades de libros, tenemos que $A \geq 0$, $L \geq 0$, $T = 32 - L \geq 0$. De la última y penúltima desigualdad obtenemos $32 \geq L \geq 0$. Como las variables solo pueden tomar valores naturales, concluimos que existen 33 soluciones validas en el contexto del problema.

2. Considérese la siguiente afirmación:

   "Si un sistema lineal de ecuaciones tiene más variables que ecuaciones entonces se puede afirmar que el sistema es compatible indeterminado"

   Determinar si la afirmación anterior es verdadera o falsa. Justifique su respuesta en caso de ser verdadera o de un contraejemplo en caso de ser falsa.

   La afirmación es falsa. Un contraejemplo posible es el siguiente sistema incompatible:

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2

Cierto país sufrió inundaciones en los años 2020 y 2024. Dichas inundaciones afectan, en distinta magnitud, la región norte y sur del país. La cantidad de ayuda enviada a cada región depende de la gravedad de la inundación en cada caso. El gobierno informó que la cantidad de ayuda (en kilos de alimentos por habitante) fue de 40 para la región sur en el año 2020 y 50 para la región norte en 2024. Además sabemos que la cantidad de ayuda para la región norte en 2020 fue igual a la cantidad de ayuda para la región sur en 2024.

1. Presentar la información anterior en una matriz A, donde las columnas representan la información por región y las filas la información por año.

$$A = \begin{pmatrix} a & 40 \\ 50 & a \end{pmatrix}$$

2. Determinar el valor de todas las entradas de la matriz A sabiendo que $det(A) = -1600$

   $det(A) = a^2 - 50{,}40 = -1600 \rightarrow$ descartamos la solución negativa y concluimos que $a = 20$

   Es posible concluir que $a = 60$ ordenando de forma distinta columnas y/o filas.

3. Calcular A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{-1600}\begin{pmatrix} 20 & -40 \\ -50 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}0125 & 0{,}025 \\ 0{,}03125 & -0{,}0125 \end{pmatrix}$$

4. Sabemos que el total de kilos de comida de ayuda distribuidos por el gobierno durante el 2020 fue de 66.000.000 mientras que en el 2024 se distribuyo un total de 93.000.000 de kilos. Armar un vector b con los datos anteriores y resolver la ecuación $AX = b$. Interpretar los coeficientes de la matriz X en el contexto del problema.
   Por un lado, definimos b como

$$b = \begin{pmatrix} 66.000.000 \\ 93.000.000 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
AX &= b \\
A^{-1}AX &= A^{-1}b \\
IdX &= A^{-1}b \\
X &= A^{-1}b \\
X &= \begin{pmatrix} 1.500.000 \\ 900.000 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Es posible interpretar que 1.500.000 corresponde a la población en la región norte y 900.000 corresponde a la población en la región sur. De haber obtenido $a = 60$ se hubiera concluido que la población del norte es 150.000 y la del sur 1.425.000

Ejercicio 3

Un pequeño seguro de salud emitió 1200 tickets de medicamentos durante enero del 2024. La proyección realizada por la administración indica que el incremento en la masa de afiliados llevara a un aumento de 6 % mensual de la cantidad de tickets emitidos.

1. Indicar en que momento la cantidad de tickets emitidos durante el mes alcanza los 9000 tickets.
   Tenemos que $a_n = 1200(1{,}06)^n$, por lo tanto
$$
\begin{aligned}
1200(1{,}06)^n &= 9000 \\
1{,}06^n &= \frac{15}{2} \\
n &= log_{1{,}06}\frac{15}{2} \approx 34{,}5
\end{aligned}
$$
2. Calcular el total de tickets que serán emitidos desde comienzos del 2026 hasta finales del 2028.
   Queremos calcular
$$
\begin{aligned}
\sum_{n=24}^{59} a_n &= \sum_{n=0}^{59} a_n - \sum_{n=0}^{23} a_n \\
&= 1200\Big[\frac{1{,}06^{60}-1}{1{,}06-1}\Big] - 1200\Big[\frac{1{,}06^{24}-1}{1{,}06-1}\Big] \\
&\approx 578.775
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4
Una empresa que dirige una fabrica dispone de un modelo de costos que describe los costos operativos de la fabrica en función de la cantidad de artículos producidos por mes. Dicha función corresponde a

$$C : [0, +\infty) \to \mathbb{R} / C(x) = 2x^2 - 48x + 88ln(x+1) + 100$$

donde x representa la cantidad de artículos producidos por mes (en miles de artículos) y $C(x)$ corresponde al costo mensual (en miles de dólares)

1. Calcular $TPC_C[1, 20]$ e interpretar en el contexto del problema.
$$TPC_C[1, 20] = \frac{C(20) - C(1)}{20 - 1} \approx 4{,}89$$

En el rango de producción entre 1.000 y 20.000 artículos, por cada 1.000 que aumenta la producción, el costo mensual aumenta en promedio aproximadamente 4.890 dólares.

2. Determinar el nivel de producción de artículos que minimiza el costo.

$$\begin{aligned} C'(x) &= 4x - 48 + \frac{88}{x+1} \\ &= \frac{4x(x+1)}{x+1} - \frac{48(x+1)}{x+1} + \frac{88(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{4(x^2 - 11x + 10)}{(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcccccc} & \nexists\, + & + & 0 & - & 0 & + \\ sg\ C'(x) & \vert & & \vert & & \vert & \longrightarrow \\ & 0 & & 1 & & 10 & \end{array}$$

A partir del diagrama de signo de C' sabemos que el mínimo absoluto se alcanza en $x = 0$ o $x = 10$. Dado que $C(0) = 100$ y $C(10) \approx 31$, concluimos que el mínimo absoluto de costos se alcanza con una producción mensual de 10.000 artículos.

3. ¿El modelo predice algún techo para los costos?
Para calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x)$, basta considerar el término de mayor orden y mayor grado, por lo tanto

$$\lim_{x \to +\infty} C(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 = +\infty$$

Concluimos que el modelo predice que los costos no tienen techo.