Segundo parcial - Matemática 2

12 de Julio de 2024

Ejercicio 1

Una mutualista registra la tasa de afiliaciones (afiliación marginal) a su institución a lo largo de los primeros 6 meses del año 2024. La misma corresponde a la siguiente función

$$f : [0,6] \to \mathbb{R} / f(t) = t^2 - 5t + 4$$

donde la variable t son meses ($t = 0$ corresponde a comienzos de enero) y $f(t)$ es la tasa de afiliación (miles/mes)

1. Calcular el saldo neto de afiliaciones durante los primeros 2 meses del año.
   La variación neta de afiliados la calculamos como
   $$\int_0^2 f(t)dt = F(2) - F(0) = \frac{2}{3} \approx 0{,}6666$$
   donde $F(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 4t$.
   La mutualista gana 667 nuevo afiliados (aproximadamente) durante los primeros 2 meses del año.

2. ¿En algún momento del periodo considerado la cantidad de afiliados de la mutualista desciende? Detallar su respuesta.
   Dado que
   $$\begin{array}{c|ccccccccc} & \nexists & & + & 0 & - & 0 & + & & \nexists \\ \hline sg\ f(t) & & 0 & & 1 & & 4 & & 6 & \end{array}$$
   podemos afirmar que la cantidad de afiliados decrece desde comienzos de febrero hasta finales de abril.

3. Sabiendo que a finales de febrero la mutualista cuenta con 80.000 afiliados. Dar una expresión para la función que describe la cantidad de afiliados que tiene la mutualista a lo largo de dichos 4 meses.
   La función de afiliados $A : [2,6] \to \mathbb{R}$ tiene la siguiente expresión
   $$\begin{aligned} A(t) &= 80 + \int_2^t f(s)ds \\ &= 80 + F(t) - F(2) \\ &= \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 4t + \frac{238}{3} \end{aligned}$$

4. ¿En que momento del periodo considerado la mutualista alcanza el máximo numero de afiliados. Justifique.
   A partir del diagrama de signo de f concluimos que el máximo absoluto se alcanza en $t = 1$ o $t = 6$. Por lo tanto, al verificar que $A(1) \approx 81{,}17$ y $A(6) \approx 85{,}33$ concluimos que el máximo de afiliados a la mutualista se alcanza a finales de Junio y es de 85333 aproximadamente.

Ejercicio 2

Cierto productor utiliza dos tipos de insumo en su proceso productivo (insumo tipo A e insumo tipo B). A su vez, disponemos de una función de costos de producción mensuales, que depende de la cantidades de insumo utilizadas para la producción dicho mes

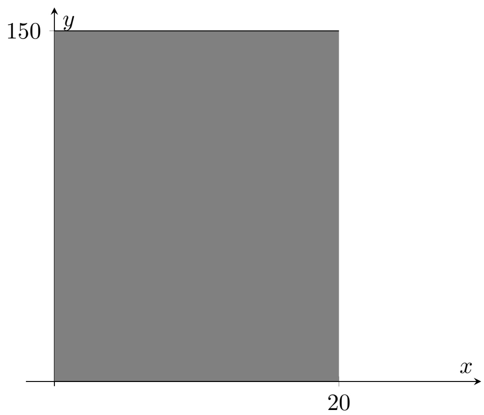
$$C : D \to \mathbb{R}/C(x, y) = -x^3 - y^2 + 80y + 20000$$

donde $D \subset \mathbb{R}^2$, x es la cantidad de insumo de tipo A e y es la cantidad de insumos tipo B y $C(x, y)$ es el costo total de producción (en unidades monetarias).

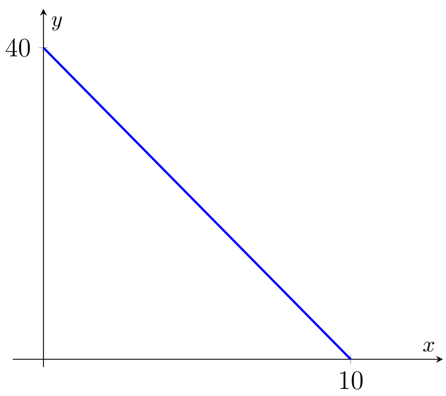
1. *a*) Sabemos que los proveedores de insumos del productor no pueden ofrecerle mensualmente mas de 20 unidades de insumo tipo A y 150 unidades de tipo B. Por lo tanto, el dominio D a considerar en esta situación es

   $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 150\}$$

   Representar gráficamente el conjunto D.



   b) El costo de comprar una unidad de insumo tipo A es de 4 unidades monetarias, mientras que el costo de comprar una unidad de tipo B es de 1 unidad monetaria. El productor dispone de un presupuesto mensual de 40 unidades monetarias para gastar en la compra de insumos. Plantear la restricción presupuestal del productor y representar gráficamente el conjunto de posibilidades de compra de insumos.
   La restricción corresponde a la ecuación $4x + y = 40$ y la representación grafica del conjunto de posibilidades es



c) Determinar que cantidades de insumo debe comprar el productor si desea minimizar sus costos de producción mensuales (sujeto a la restricción presupuestaria de compra de insumos).
Sustituyendo $y = 40 - 4x$ en C obtenemos

$$C(x, 40 - 4x) = -x^3 - (40 - 4x)^2 + 80(40 - 4x) + 20000 = h(x)$$

Podemos reformular el problema original como el problema de determinar el mínimo absoluto de la función h en el intervalo $[0, 10]$.

$$h'(x) = -3x^2 - 2(40 - 4x)(-4) + 80(-4) = -3x^2 - 32x$$

	$\nexists$		$-$		$\nexists$
$sg\ h'(x)$		0		10	

El mínimo absoluto de h se alcanza en $x = 10$, por lo tanto la solución al problema inicial es el par $(x, y) = (10, 0)$. El productor debe comprar 10 unidades de insumo tipo A y 0 unidades de insumo tipo B.

2. *a*) Calcular $\frac{\partial C}{\partial x}(3, 2)$ e interpretar el resultado en el contexto del problema. $\frac{\partial C}{\partial x}(x, y) = -3x^2$ y por lo tanto $\frac{\partial C}{\partial x}(3, 2) = -27$.
Al utilizar 3 unidades de insumo tipo A y 2 unidades de insumo tipo B en la producción y aumentar en una unidad la cantidad de insumos de tipo A utilizados, el costo total de producción se reducirá en aproximadamente 27 unidades monetarias.

b) Identificar todos los puntos estacionarios de C y, de ser posible, clasificarlos.

$$C_x(x, y) = -3x^2$$
$$C_y(x, y) = -2y + 80$$

al igualar ambas expresiones a 0 y resolver el sistema, encontramos que el único punto estacionario es $(0, 40)$.
Por otro lado, la matriz hessiana de C es

$$H_C(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Dado que encontramos que $det(H_C(3, 2)) = 0$, el test de derivada segunda no nos permite clasificar dicho punto estacionario.