Universidad de la República
Facultad de Ciencias Sociales
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Notas Docentes

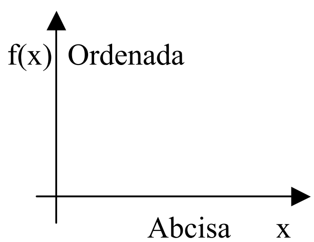
Matemática Aplicada a la Economía.
Material de Consulta y Casos Prácticos

David Glejberman

Nota Docente No. 20

10. FUNCIONES DE UNA VARIABLE
GRÁFICAS DE FUNCIONES ELEMENTALES
OPERACIONES CON FUNCIONES
FUNCIÓN INVERSA Y FUNCIÓN COMPUESTA

En esta parte del curso centramos nuestra atención en las funciones que tienen por dominio y codominio conjuntos numéricos, es decir, funciones que dependen de una sola variable (a la que simbolizamos con la letra x). En consecuencia, la representación gráfica más apropiada es la que utiliza un par de ejes cartesianos ortogonales: al eje horizontal se le llama eje de las *abcisas* y al vertical eje de las *ordenadas*.



Incluso vamos a restringir el estudio a las funciones donde la correspondencia puede expresarse mediante una fórmula que involucra una ecuación o a lo sumo un número reducido de ecuaciones (la función puede expresarse en un renglón o en un par de renglones). Ejemplos:

$$f(x) = 3.x^2 - x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si \;\; x \geq 0 \\ -x+1 & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales o una parte de los números reales, porque en algunos casos la fórmula que define la función sólo es válida para una parte de los números reales. El problema de encontrar para qué números reales es válida la fórmula se conoce como *determinación del dominio de existencia de la función*.

Ejemplo: Sea f: $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$. La fórmula que define la correspondencia es, en este caso, una fracción algebraica, la cual tiene sentido si el denominador no se anula. Y en este caso el denominador se anula si $x = \pm 1$. Por tanto, el dominio de la función es: D(f) = {x: x XR y $x \neq \pm 1$}.

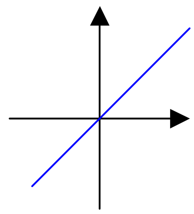
<u>Definición</u>: Una función se dice *elemental* si en la fórmula la variable x interviene una sola vez.

Ejemplos de funciones elementales: x, x^2, x^3, e^x, e^{-x}, $|x|$, entre otras.

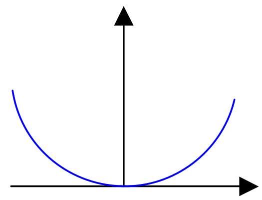
Vamos a considerar a continuación el problema de hallar el gráfico de las funciones de una variable. Comenzamos con las funciones elementales y luego introduciremos las herramientas para el estudio de funciones cualesquiera.

Restringimos el conjunto de las funciones elementales a las siguientes (dejamos fuera, por ejemplo, a las funciones trigonométricas).

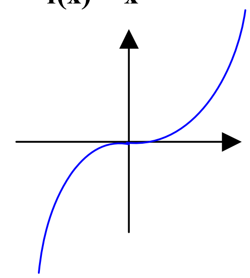
$f(x) = x$



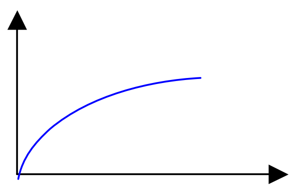
$f(x) = x^2$



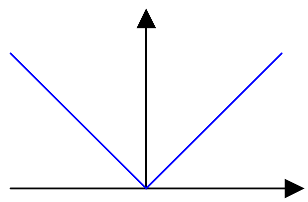
$f(x) = x^3$



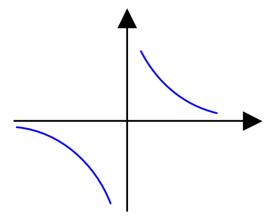
$f(x) = \sqrt{x}$



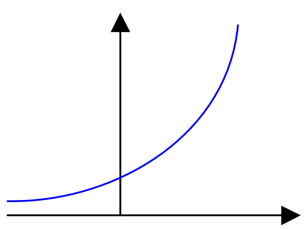
$f(x) = |x|$



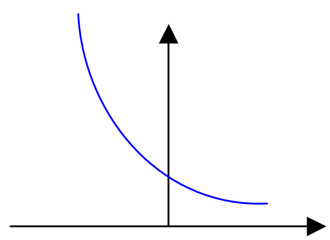
$f(x) = \frac{1}{x}$



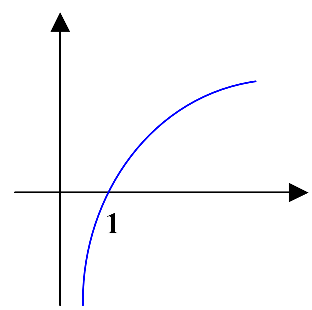
$f(x) = e^x$



$f(x) = e^{-x}$



$f(x) = Lx$



Observaciones

1. El gráfico de $f(x) = x$ es una recta que pasa por el origen. Se trata de un caso particular de las funciones del tipo $f(x) = a + b.x$ (donde a y b son dos números reales que no dependen de x) cuyo gráfico también es una recta cuyo comportamiento depende de los parámetros a y b. Por la forma del gráfico, estas funciones se llaman *lineales*.
2. El gráfico de $f(x) = x^2$ es una parábola con los "brazos" hacia arriba. Se trata de un caso particular de de las funciones *cuadráticas* de la forma $f(x) = a.x^2 + b.x + c$ (donde a, b y c son parámetros que no dependen de x) cuyo comportamiento depende de ciertas relaciones entre los parámetros como veremos más adelante.
3. El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de los reales mayores o iguales que 0.
4. La fórmula de la función $f(x) = |x|$ (valor absoluto de x) también puede expresarse en dos renglones:

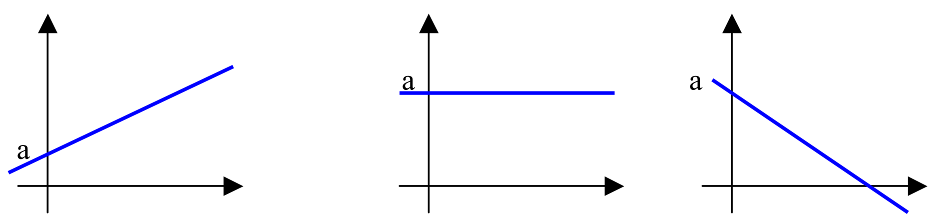
$$f(x) = \begin{cases} x & si \;\; x \geq 0 \\ -x & si \;\; x < 0 \end{cases}$$

5. El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es el conjunto de los números reales con exclusión del cero.
6. Las funciones e^x y e^{-x} se dibujan por encima del eje de las abcisas, es decir, las funciones nunca toman valores negativos ni se anulan.
7. La función $f(x) = Lx = \log_e x$ restringe su dominio a los reales positivos (el logaritmo de cero o de un número negativo no están definidos).

Las *funciones lineales* cumplen un importante papel en los modelos de análisis económicos simplificados. Se trata de funciones con gráficos muy sencillos, los cuales se comentan a continuación.

$$f(x) = a + b.x$$

El parámetro "a" se llama *ordenada en el origen* porque indica la ordenada del punto donde la recta corta al eje Oy. El parámetro "b" se llama *coeficiente angular* de la recta y determina si la recta es creciente, constante o decreciente, según que su valor sea positivo, cero o negativo.

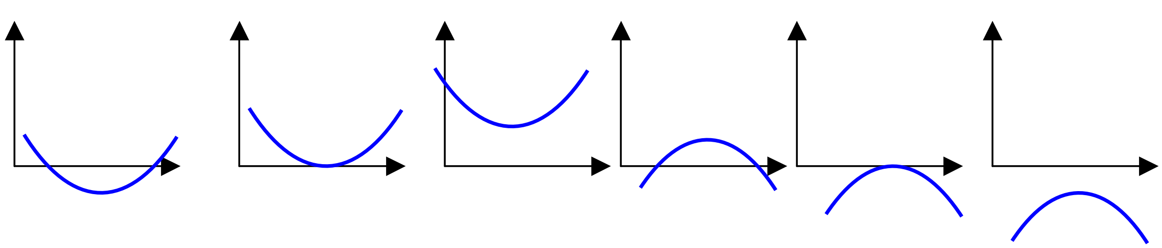


$b > 0$ $\qquad$ $b = 0$ $\qquad$ $b < 0$

Las *funciones cuadráticas* también tienen una fórmula y un gráfico sencillos.

$$f(x) = a.x^2 + b.x + c$$

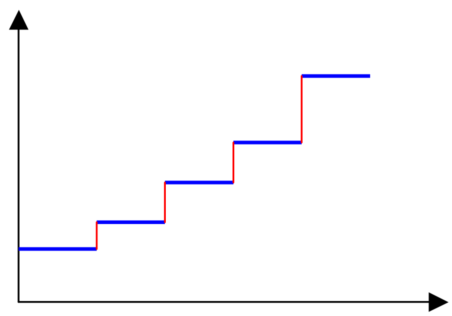
La representación gráfica es siempre una parábola, cuyos brazos miran hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo en caso contrario. El eje de simetría de la parábola corta al eje Ox en el punto $x = -b/2a$. La parábola corta al eje Ox si el discriminante de la ecuación $a.x^2 + b.x + c = 0$ es no negativo (el discriminante es $\Delta = b^2 - 4.a.c$).



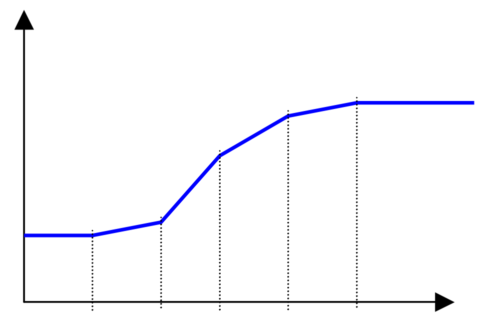
$a > 0, \Delta > 0$ $\qquad$ $a > 0, \Delta = 0$ $\qquad$ $a > 0, \Delta < 0$ $\qquad$ $a < 0, \Delta > 0$ $\qquad$ $a < 0, \Delta = 0$ $\qquad$ $a < 0, \Delta < 0$

Se podrían denominar *cuasi-lineales* a las funciones cuyo gráfico contiene segmentos de recta y/o semirrectas. Ya hemos visto un ejemplo: la función valor absoluto, cuyo gráfico se compone de dos semirrectas. Veamos ahora dos ejemplos más.

Escalera



Poligonal



La primera se suele utilizar en Economía para representar en el eje horizontal el tiempo y en el eje vertical el nivel de los salarios (en este caso el gráfico se denomina "dientes de sierra"). Los salarios se mantienen constantes por un cierto tiempo (3 meses, 6 meses, 12 meses) y luego pegan un salto igual al aumento recibido por los trabajadores. Las líneas verticales que unen los escalones no son, estrictamente hablando, parte del gráfico de la función, pero se dibujan para mostrar la magnitud del aumento en cada período.

La segunda suele utilizarse en Estadística para representar distribuciones acumuladas. En Economía, la poligonal puede utilizarse para representar el ingreso acumulado por las personas o los hogares. Si por ejemplo un trabajador gana $20 la hora normal y $40 la hora extra, entonces el ingreso acumulado por el trabajador según el tiempo trabajado (t) es una poligonal que tiene la siguiente fórmula:

$$\mathrm{Y(t)} = \begin{cases} 20.t \quad si \quad 0 \le t \le 8 \\ 160 + 40.t \quad si \quad t > 8 \end{cases}$$

Recordemos algunas definiciones ya introducidas en el curso.

- La función f es *inyectiva* si para todo $x_1 \neq x_2$ del dominio resulta $f(x_1) \neq f(x_2)$
- La función f es *sobreyectiva* si para todo elemento del codominio hay al menos una preimagen en el dominio.
- La función f es *biunívoca* o *biyectiva* si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.
- La función f es *par* si para todo x del dominio es $f(-x) = f(x)$
- La función f es *impar* si para todo x del dominio es $f(-x) = -f(x)$

Observaciones

1. Si una función es inyectiva, entonces su gráfico es cortado una sola vez por cada paralela al eje Ox.
2. Si la función es sobreyectiva y el codominio es el conjunto de los reales, entonces el gráfico de la función se dibuja a lo largo de todo el eje Ox.
3. Si la función es par, su gráfico es simétrico respecto del eje Oy.
4. Si la función es impar, su gráfico es simétrico respecto del centro de coordenadas.

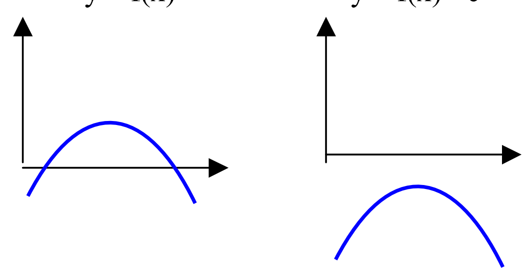
A continuación enunciamos algunos resultados útiles para graficar funciones relacionadas con las funciones elementales.

Relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y las gráficas de funciones relacionadas

y = f(x) + c	La gráfica se desplaza hacia arriba a distancia c.
y = f(x) - c	La gráfica se desplaza hacia abajo a distancia c.
y = f(x - c)	La gráfica se desplaza hacia la derecha a distancia c.
y = f(x + c)	La gráfica se desplaza hacia la izquierda a distancia c.
y = - f(x)	La gráfica es simétrica respecto del eje Ox.
y = f(-x)	La gráfica es simétrica respecto del eje Oy.
y = c.f(x) con c>1	La gráfica se estira verticalmente, alejándose del eje Ox.
y = c.f(x) con c<1	La gráfica se contrae verticalmente, acercándose al eje Ox.

Ejemplo:

y = f(x) y = f(x) - c



Los siguientes resultados de la geometría analítica son útiles para construir e interpretar el gráfico de las funciones.

Fórmulas relacionadas con las rectas del plano

a) Distancia entre dos puntos

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

b) Ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (x_0, y_0)$

$$y = m.(x - x_0) + y_0$$

c) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$A = (x_1, y_1) \qquad B = (x_2, y_2)$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.(x - x_1)$$

d) Ecuaciones del haz de rectas que pasan por el punto $P = (x_0, y_0)$

$$y = m.(x - x_0) + y_0$$
$$x = x_0$$

e) Ecuaciones de rectas paralelas

$$y = m.x + n_0$$
$$y = m.x + n_1$$

f) Ecuaciones de rectas perpendiculares que se cortan en el punto $P = (x_0, y_0)$

$$y = m.(x - x_0) + y_0$$
$$y = (-1/m).(x - x_0) + y_0$$

Fórmulas de la circunferencia y de la parábola

a) Ecuación de la circunferencia de radio r y centro en el punto $P(x_0, y_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

b) Ecuación de la parábola de eje paralelo a Oy con foco en (x_1, y_1) *y vértice en* (x_1, y_2)

$$4.(y - y_2).(y_1 - y_2) = (x - x_1)^2$$

c) Ecuación de la parábola de eje paralelo a Oy que corta al eje Ox en $x=x_1$ *y en* $x=x_2$

$$y = m.(x - x_1).(x - x_2)$$

Función inversa

Recordemos la definición ya introducida en el curso, para funciones en general.

Definición: Sea f una función de A en B. Se denomina *función inversa de f* (notación: f^{-1}) a otra función tal que a cada imagen le hace corresponder su preimagen: $[B, A, f^{-1}]$.

En la definición de la función inversa, f^{-1}, el dominio es el codominio de la función f, el codominio de la función f^{-1} es el dominio de la función f y la correspondencia va en el sentido inverso.

¿Cómo se obtiene la fórmula de la función inversa? Cuando existe la función inversa, la fórmula se obtiene de la ecuación $y = f(x)$ despejando la “x” en función de “y”.

Observaciones

1. La función inversa no siempre existe. La condición necesaria y suficiente para que exista la función inversa es que la función f sea biyectiva.
2. No siempre es fácil explicitar la fórmula de la función inversa. Y ello es así porque no siempre es posible despejar la "x" en función de "y".
3. Es necesario tener en cuenta que *función inversa* e *inversa de la función* son conceptos diferentes.

Ejemplo: La inversa de la función $f(x) = e^x$ es la función $g(x) = 1/e^x = e^{-x}$ mientras que la función inversa es la que resulta de despejar la "x" en la ecuación $y = e^x$ (y luego intercambiar los nombres de las variables, para poder representar ambas funciones en el mismo gráfico).

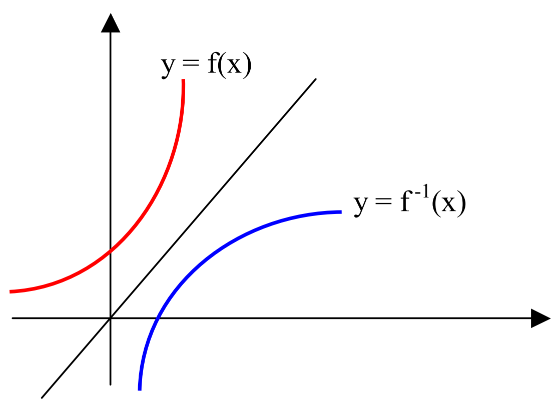
$$y = e^x$$

$$\text{Tomando logaritmos: } Ly = Le^x = x$$

$$\text{Resulta: } x = Ly$$

$$\text{Cambiando los nombres: } y = Lx$$

La función inversa de $y = e^x$ es la función $y = Lx$. Los gráficos de una función y de la función inversa tienen la propiedad de ser simétricos respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.



Función compuesta

Este concepto también fue introducido en el curso con anterioridad.

<u>Definición</u>: Sean dos funciones [A, B, f] y [B, C, g]. Se dice que h es la función compuesta de f y g si el conjunto de partida de h es el conjunto de partida de f , el conjunto de llegada de h es el conjunto de llegada de g, y la imagen de un argumento x por g se obtiene de aplicar a x la función f y al valor f(x) la función g.

[A, C, h] función compuesta de [A, B, f] y [B, C, g] $\leftrightarrow$ $h(x) = g[f(x)]$

La composición de funciones se una herramienta muy potente para generar nuevas fórmulas de funciones. Por ejemplo, si en la función elemental $g(x) = e^x$ se sustituye el argumento x por una función lineal como $f(x) =2.x +1$, se obtiene una nueva función cuya fórmula es: $h(x) = g[f(x)] = e^{2.x + 1}$. En general, los gráficos de g y h no presentan similitudes ni relaciones interesantes. En cuanto al dominio de h, éste muchas veces debe restringirse (respecto del conjunto más amplio posible, el conjunto de los números reales) porque se requiere a la vez que: a) los valores de x pertenezcan al dominio de f, y b) los valores f(x) pertenezcan al dominio de g.

Ejemplo 1: Sean $g(x) = x - 3$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Resulta: $h(x) = g[f(x)] = \sqrt{x} - 3$. En este caso la única restricción proviene de la función f: su dominio es el conjunto de los reales no negativos, y éste es también el dominio de la función h.

Ejemplo 2: Sean $g(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Resulta: $h(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x}}$. En este caso el dominio de f es el conjunto de los reales no negativos, pero la forma funcional de g agrega otra restricción: la x no puede tomar el valor 0. Entonces, en el dominio de la función h intervienen las dos restricciones y resulta: $D(h) = \{x: x \in R \text{ y } x > 0\}$.

Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f y g, es posible obtener nuevas funciones a partir de las operaciones algebraicas. Por ejemplo, la función suma de f y g se obtiene haciendo corresponder a la abcisa x el resultado de la suma de las imágenes según f y g.

$$x \xrightarrow{f+g} [f+g](x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de la función suma depende de los respectivos dominios de las funciones sumandos. El siguiente esquema muestra las restricciones que es necesario imponer al dominio en cada operación para que el resultado siga siendo una función.

OPERACIÓN	FUNCIÓN	DOMINIO
Suma	$y = f(x) + g(x)$	$D(f) \cap D(g)$
Resta	$y = f(x) - g(x)$	$D(f) \cap D(g)$
Producto	$y = f(x).g(x)$	$D(f) \cap D(g)$
Cociente	$y = f(x) / g(x)$	$D(f) \cap D(g) \cap \{x: g(x) \neq 0\}$
Potencia	$y = [f(x)]^k$	$D(f)$
Inversa de la función	$y = 1 / f(x)$	$D(f) \cap D(g) \cap \{x: f(x) \neq 0\}$
Exponencial	$y = e^{f(x)}$	$D(f)$
Logaritmo	$y = Lf(x)$	$D(f) \cap \{x: f(x) > 0\}$
Raíz cuadrada	$y = \sqrt{f(x)}$	$D(f) \cap \{x: f(x) \geq 0\}$
Raíz cúbica	$y = \sqrt[3]{f(x)}$	$D(f)$
Potencial exponencial	$y = [f(x)]^{g(x)}$	$D(f) \cap D(g) \cap \{x: f(x) > 0\}$

Repartido Práctico 10: Funciones

Ejercicio 1

Indicar si las siguientes funciones son o no inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. El codominio en todos los casos es R (conjunto de los números reales), y el dominio D(f) se explicita en cada caso.

a) $f(x) = x$ $\quad D(f) = R$
b) $f(x) = x^2$ $\quad D(f) = R$
c) $f(x) = e^x$ $\quad D(f) = R$
d) $f(x) = 1/x$ $\quad D(f) = R^+$
e) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D(f) = \{x: x \geq 0\}$
f) $f(x) = (x - 1)^2$ $\quad D(f) = \{x: x \geq 1\}$

Ejercicio 2

Estudiar si las siguientes funciones son o no pares o impares.

a) $f(x) = x$
b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = x^2 + \alpha.x + 1$ (discutir según α real)
d) $f(x) = 1/x$
e) $f(x) = \sqrt{x}$
f) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
g) $f(x) = e^{-x^2}$

Ejercicio 3

Sea la recta de ecuación: (r) $y = 2.x + 2$.

a) Mostrar que la recta pasa por el punto (1,4).
b) Hallar la ecuación de la recta paralela a (r) que pasa por el punto (1,3) y representarla en un mismo gráfico junto con (r).
c) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a (r) que pasa por (1,4).
d) Hallar las ecuaciones del haz de rectas que pasan por (1,4).

Ejercicio 4

a) Hallar la ecuación de la parábola que corta al eje Ox en los puntos (1,0) y (2,0) y tiene su vértice en el punto (3/2, -1/2).
b) Hallar la ecuación de la parábola que corta al eje Ox en los puntos (-1,0) y (1, 0) y corta al eje Oy en el punto (0, 2).
c) Hallar la ecuación de la parábola con foco en (1,1) y vértice en (1,0).
d) Dibujar aproximadamente los gráficos de las tres parábolas.

Ejercicio 5

a) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en (0,0) y radio 2.
b) Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en (1,1) y radio 1.
c) Dibujar aproximadamente los gráficos de las dos circunferencias.

Repartido Práctico 10: Funciones

Ejercicio 6

Hallar la representación gráfica aproximada de las funciones:
(a) $y = f(x) + c$ (con $c>0$)
(b) $y = f(x + c)$ (con $c>0$)
en los siguientes casos.

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = 1/x$
4. $f(x) = \sqrt{x}$
5. $f(x) = e^x$
6. $f(x) = Lx$
7. $f(x) = |x|$
8. $f(x) = |x| - x$

Ejercicio 7

Hallar la función inversa en cada uno de los siguientes casos. Si la inversa existe sólo para una parte del dominio, calcular la función inversa restringiendo el dominio de f a R^+. Explicitar $D(f^{-1})$ en cada caso.

a) $f(x) = 3.x – 3$
b) $f(x) = e^x$
c) $f(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = x^2 – 1$
e) $f(x) = x/(x – 1)$

Ejercicio 8

Hallar $g[f(x)]$ y explicitar el dominio de la función compuesta en cada uno de los siguientes casos.

1. $g(x) = x^2 + 2.x + 1$
   $f(x) = x – 1$

2. $g(x) = x^2$
   $f(x) = 1/x$

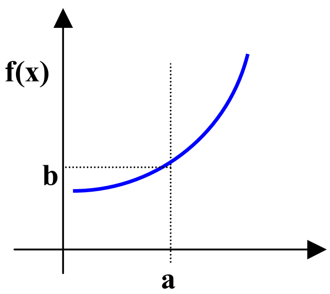
3. $g(x) = Lx$
   $f(x) = e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}$
   $f(x) = x^2$

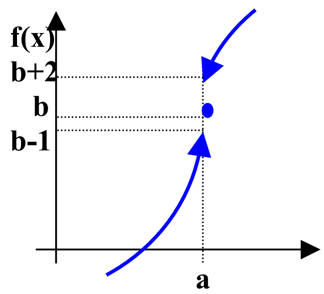
11. LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

El concepto de límite de una función (f) en un punto (x = a) refiere al comportamiento del gráfico en las vecindades, en un entorno reducido centrado en dicho punto. ¿Qué comportamiento podría tener el gráfico de f en un entorno de x = a?

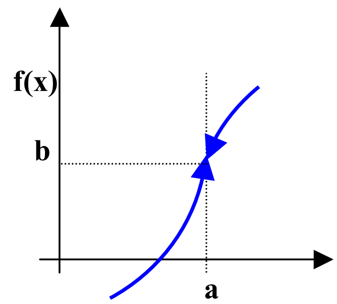
(A)



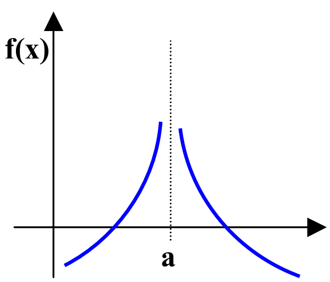
(B)



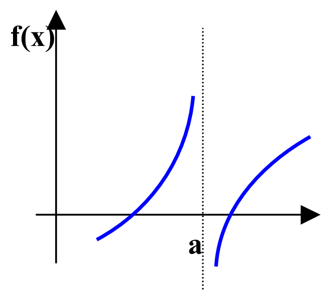
(C)



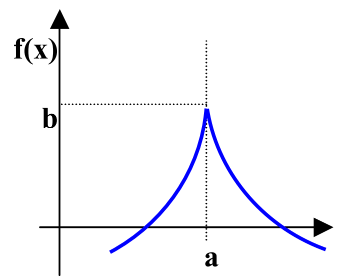
(D)



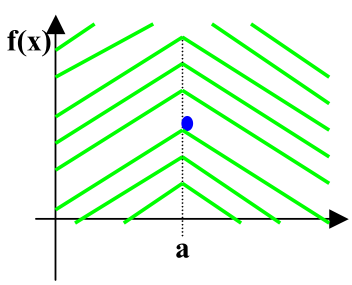
(E)



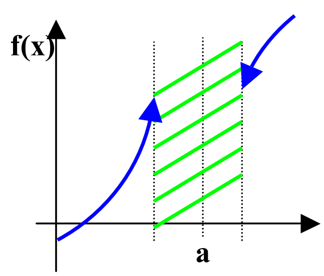
(F)



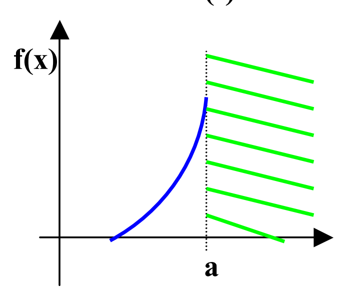
(G)



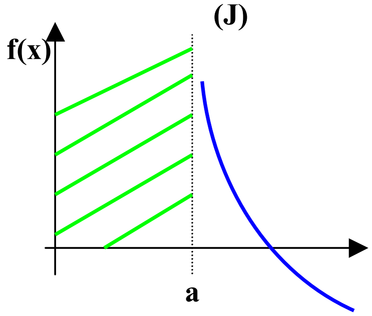
(H)



(I)



(J)



¿En qué difieren los gráficos precedentes en relación a lo que ocurre en las vecindades de de x=a?

En algunos de ellos el punto x=a no es parte del D(f).

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

En algunos de ellos el D(f) excluye un entorno o un entorno reducido centrado en a.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

En algunos de ellos el D(f) excluye los valores de x en un semientorno reducido (a izquierda o a derecha) centrado en x=a.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

En algunos de ellos los valores de f(x) en un entorno reducido de centro a difieren entre sí tan poco como se desee, a condición de reducir los suficiente el radio del entorno.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

En algunos de ellos el gráfico de la función se puede dibujar sin levantar el lápiz al pasar por x=a.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

En algunos de ellos los valores de f(x) en un entorno reducido de centro *a* difieren tanto como se quiera, aunque se reduzca el radio del entorno.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

<u>Definición</u>: *Límite finito de una función en un punto* $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x) = b}$

El límite de la función f en el punto x=a es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe un entorno reducido de centro *a* ($\cup'_{a,\delta}$), tal que para todos los x pertenecientes a este último entorno, se cumple que f(x) pertenece al entorno centrado en *b*.

Que el límite de la función f en el punto x=a es *b* implica que f(x) está tan cercano a *b* como se quiera, cuando x se aproxima a *a* sin tocar a *a*.

Ejemplo 1: $\lim_{x \to 2}(2.x + 1) = 5$ porque existe δ tal que si $x \; X \; \cup'_{a,\delta} \rightarrow f(x) \; X \; \cup_{b,\varepsilon}$.

¿Se puede probar la existencia del δ? La respuesta es afirmativa.

$$-\varepsilon < (2.x + 1) - 5 < \varepsilon$$

$$- \varepsilon < 2.x - 4 < \varepsilon$$
$$- \varepsilon/2 < x - 2 < \varepsilon/2$$

Entonces $\delta = \varepsilon/2$, pues cuando $|x - 2| < \varepsilon/2$ se cumple que $|(2.x + 1) - 5| < \varepsilon$.

Ejemplo 2: Sea f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1}$. ¿Qué pasa con la función en x=1? El punto x=1 no pertenece al dominio de la función. Sin embargo, se puede calcular el límite de la función cuando x se acerca a 1. Obsérvese que si x≠1, es f(x) = $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1).(x+1)}{x-1} = x+1$. Es decir, que salvo en x=1, la función se comporta como la recta y = x + 1. Por tanto:

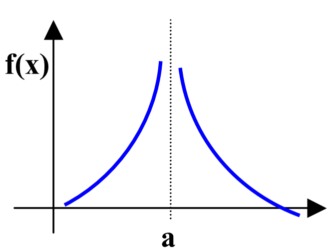
$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, porque en un entorno reducido de centro a=1, los valores de x tienen imágenes muy cercanas a b=2.

Observaciones

1. Según la definición de límite en el punto x=a, lo que hay que saber es qué ocurre con los valores de f(x) cuando la variable x recorre los puntos de un entorno reducido de centro *a*. Es decir, no importa lo que ocurre en el punto x=a, sino lo que ocurre en los puntos vecinos a *a*.
2. Podría ocurrir que f(a) = b, que f(a) ≠ b ó también que x=a no sea parte del D(f).
3. Si: $\lim_{x \to a} f(x) = b$ ¿qué debería ocurrir con f(x) cuando vamos achicando el radio del entorno reducido de centro *a* y radio δ? En tal caso, el entorno $\cup_{b,\varepsilon}$ también se va achicando. En otras palabras, cuando nos acercamos a *a* por izquierda y por derecha, los valores de f(x) se van acercando a *b* tanto como se quiera.
4. ¿Por qué en el caso (B) no es $\lim_{x \to a} f(x) = b$? Porque no importa qué tan cerca de *a* estén los valores de x –uno por izquierda y otro por derecha– los f(x) siempre estarán a una distancia mayor o igual que 3 del valor *b*.
5. ¿Qué significa en la definición que ε es *dado*? Significa que ε es un número fijo, arbitrariamente pequeño, pero fijo.

<u>Definición</u>: *Límite infinito de una función en un punto* $\mathbf{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty}$

El límite de la función f en el punto x=a es $+\infty$, cuando f(x) > K (K arbitrario y tan grande como se quiera) cuando la variable x se acerca a *a* sin tocar a *a*.



Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = +\infty$

De manera análoga se define el límite $-\infty$ de una función en un punto. En este caso lo que ocurre con la función es que en las cercanías del punto *a* toma valores grandes (en valor absoluto) pero con signo negativo: $f(x) < -H$ (con H positivo y arbitrariamente grande) cuando los valores de x se acercan a *a*.

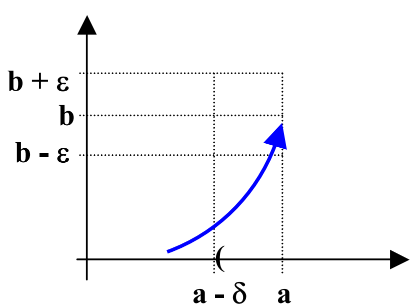
Definición: *Límite lateral por izquierda de una función en un punto* $\mathbf{\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b}$

El límite de la función f en el punto $x=a^-$ es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe δ tal que si $0 < a - x < \delta$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Para que el límite de f en "a por izquierda" sea *b* se tiene que cumplir que cuando x está cerca de *a*, pero con valores más pequeños que *a*, los valores de f(x) estén cerca de *b*.

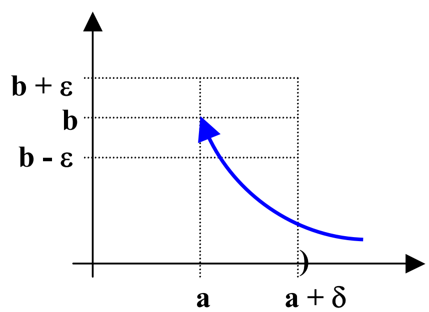
Definición: *Límite lateral por derecha de una función en un punto* $\mathbf{\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b}$

El límite de la función f en el punto $x=a^+$ es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe δ tal que si $0 < x - a < \delta$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Para que el límite de f en "a por derecha" sea *b* se tiene que cumplir que cuando x está cerca de *a*, pero con valores más grandes que *a*, los valores de f(x) estén cerca de *b*.

$\mathbf{\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b}$



$\mathbf{\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b}$



Ejemplos:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x}\right) \textit{ no existe, pero: } \lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \quad y \quad \lim_{x \to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$$

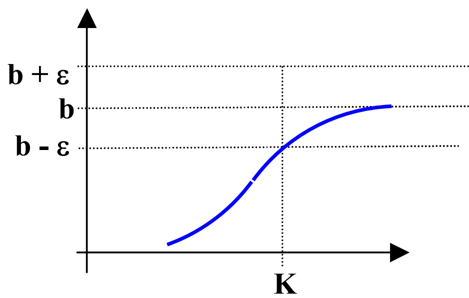
Definición: *Límite finito de una función cuando* $x \to +\infty$ $\mathbf{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b}$

El límite de la función f cuando $x \to +\infty$ es *b*, si dado un entorno pequeño centrado en *b* y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe K tal que si $x > K$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

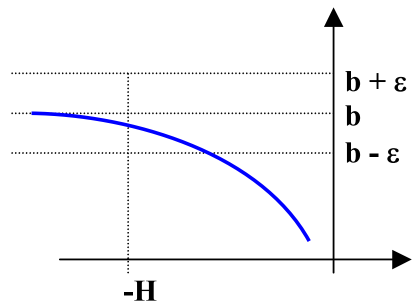
Definición: *Límite finito de una función cuando* $x \to -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

El límite de la función f cuando $x \to -\infty$ es b, si dado un entorno pequeño centrado en b y de radio ε ($\cup_{b,\varepsilon}$), existe H tal que si $x < -H$, entonces se cumple que: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$



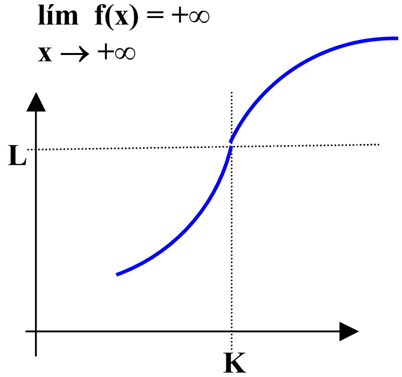
Definición: *Límite más infinito de una función cuando* $x \to \pm\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

El límite de la función f cuando $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ es $+\infty$, si dado L (positivo y arbitrariamente grande), existe K (H) tal que si $x > K$ $(x < -H)$, entonces se cumple que: $f(x) > L$.

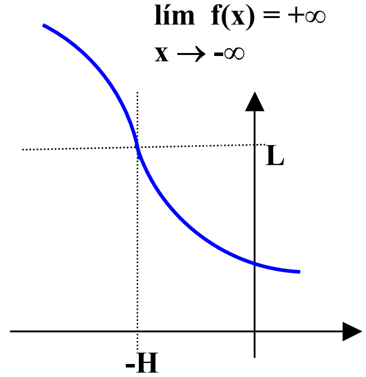
Definición: *Límite menos infinito de una función cuando* $x \to \pm\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

El límite de la función f cuando $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ es $-\infty$, si dado L (positivo y arbitrariamente grande), existe K (H) tal que si $x > K$ $(x < -H)$, entonces se cumple que: $f(x) < -L$.

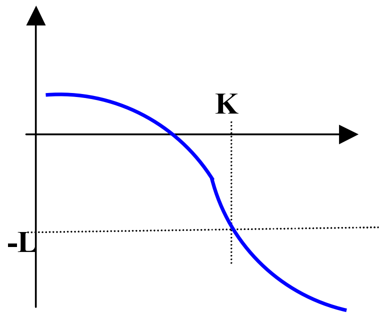
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

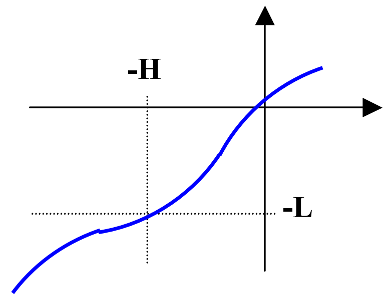


$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$





Propiedades de los límites de funciones

Sean dos funciones, f y g, tales que: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = b_1$ y $\lim_{x \to \alpha} g(x) = b_2$ donde α puede ser un número finito (a) o infinito ($+\infty$ ó $-\infty$). Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

$$\text{Lím } [f(x) + g(x)] = b_1 + b_2$$
$$\text{Lím } [f(x) - g(x)] = b_1 - b_2$$
$$\text{Lím } [f(x) * g(x)] = b_1 * b_2$$
$$\text{Lím } [f(x) \div g(x)] = b_1 \div b_2 \quad (\text{si } b_2 \neq 0)$$

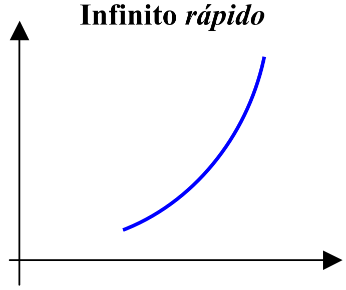
Estas propiedades resuelven el problema de calcular el límite de una suma, resta, etc., cuando ambos límites son finitos. Pero, ¿qué ocurre cuando el límite de un sumando, por ejemplo, es infinito? Si uno de los sumandos tiene límite finito y el otro límite infinito, entonces el límite de la suma es infinito. Si los dos sumandos tienen límite infinito y del mismo signo, entonces la suma también tiende a infinito, y con el mismo signo. Pero si los sumandos tienen límite infinito y de diferente signo, el límite de la suma no puede obtenerse como un resultado general, y hay que estudiar caso por caso. Resulta de mucha utilidad, para este propósito, la siguiente definición.

Infinitos

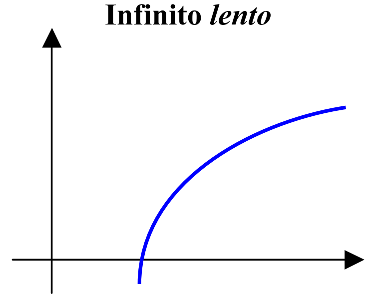
<u>Definición</u>: Se dice que una función f es un *infinito* cuando $x \to +\infty$ si se cumple que: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Entre los "infinitos" los hay más *lentos* y los que más rápidamente se "disparan" a valores altos.

Infinito *rápido*



Infinito *lento*



Definición: Se dice que un *infinito f es de mayor orden que otro g,* si $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Definición: Se dice que un *infinito f es de menor orden que otro g,* si $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Definición: Se dice que dos *infinitos f y g son equivalentes,* si $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Se puede demostrar que la suma de infinitos de distinto orden es equivalente al término de mayor orden. Si el límite del cociente no es el número uno, sino otro número distinto de cero, entonces los dos infinitos son de igual orden. Un resultado importante:

Ord (infinito log) < Ord (infinito potencial) < Ord (infinito exponencial)

Entre dos infinitos potenciales –por ejemplo, x^2 y x^5– el de mayor orden es el que tiene exponente más alto. Aplicando estas reglas se pueden resolver muchos problemas de límites.

Ejemplos

1. $x^2 + e^x \sim e^x$ con $x \to +\infty$. Este resultado expresa que el primer infinito es equivalente al segundo. ¿Por qué? Porque la suma de infinitos de distinto orden –en este caso, uno potencial más uno exponencial– es equivalente al de mayor orden.
2. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{(Lx)^{100}}{x^{0,01}} = 0$. En este caso tenemos el cociente de dos infinitos, uno logarítmico y otro potencial. Como el del numerador es de menor orden que el del denominador, el cociente tiende a 0.
   Aunque el límite de la expresión tiende a 0, conviene observar que esta tendencia es muy lenta. Por ejemplo, para $x=100$, el cociente toma el valor 2.10^{66} que es un número muy grande.
3. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x + Lx}{2.x - Lx} = \lim \frac{x}{2.x} = ½$.
4. $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x.e^{-x} = \lim x/e^x = 0$

Límite de sucesiones

Las sucesiones son un caso particular de funciones. Lo que tienen de particular es que su dominio no es el conjunto de los números reales sino el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, la sucesión $f(n) = n^2$ asocia a cada número natural su cuadrado. La notación más habitual es de la forma $a_n = n^2$ o bien $b_n = 1/n$. En el primer caso la sucesión (la función) hace corresponder a cada natural n su cuadrado, y en el segundo caso a cada natural la sucesión le hace corresponder su inverso. En estos casos no tiene sentido estudiar el límite en un punto del dominio, porque en un entorno reducido del punto no hay función. El único límite que puede definirse es el caso en que n $\rightarrow +\infty$. Las propiedades relativas al orden y equivalencia de funciones en general, son aplicables al caso del límite de sucesiones.

Ejemplo: $Lím \dfrac{2.n^2 - 5.n + 8}{n^2 + 3.n - 2} = lím \dfrac{2.n^2}{n^2} = 2$, donde no es necesario anotar que n $\rightarrow +\infty$, porque está sobreentendido.

Algunas sucesiones de uso frecuente son las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas.

Progresiones aritméticas: son sucesiones donde cada elemento se obtiene del precedente adicionándole una constante llamada “razón”. La sucesión es de la forma:

$$a_1, a_1 + k, a_1 + 2.k, a_1 + 3.k, \ldots$$

La correspondencia con los naturales puede hacerse a partir del uno (como en el caso precedente) o también a partir del cero. En este caso la correspondencia es así:

$0 \rightarrow a_0$
$1 \rightarrow a_1 = a_0 + k$
$2 \rightarrow a_2 = a_1 + k = a_0 + 2.k$

Obsérvese que la diferencia entre dos elementos consecutivos es siempre la razón “k”. También se cumple que $a_n = a_{n-1} + k \ \ \forall\ n > 1$, donde “$a_n$” se denomina “término general de la sucesión”. Ejemplos de progresiones aritméticas son: el conjunto de los naturales (razón = 1), el conjunto de los números naturales pares (razón = 2) y el conjunto de los naturales impares (razón = 2).

Progresiones geométricas: son sucesiones donde cada elemento se obtiene del precedente multiplicándolo por una constante, también llamada “razón” de la progresión. Las progresiones geométricas tienen la forma:

$$a_1, a_1.q, a_1.q^2, a_1.q^3, \ldots$$

Aquí el cociente de dos términos consecutivos es siempre la razón “q” y el término general es: $a_n = a_{n-1}.q \ \ \forall\ n > 1$. El ejemplo más conocido de progresión geométrica es el conjunto de las potencias de 2: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots$ La fama de esta progresión resulta de la anécdota que cuenta que el Sha de Persia quiso premiar al inventor del ajedrez con el regalo que éste quisiera elegir. El inventor pidió un grano de trigo (2^0) por el primer escaque del tablero de ajedrez, dos granos (2^1) por el segundo escaque, cuatro granos (2^2) por el tercero y así hasta completar el escaque 64 por el que pidió 2^{63} granos de trigo. El Sha mandó al jefe de los graneros reales que pagara inmediatamente el premio, pero éste le hizo saber que serían necesarias muchas cosechas anuales para cumplir con el pedido, porque la suma de $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$ granos de trigo –que es igual a $(2^{64} - 1)$– es un volumen superior al del Monte Everest.

Las progresiones fueron utilizadas por el economista inglés Thomas Malthus (1766-1834) en su famosa ley por la cual la población crece según una progresión geométrica (de razón mayor que uno) mientras que los alimentos crecen según una progresión aritmética. Según Malthus, la única forma de evitar las hambrunas sería mediante el control de la natalidad.

Otra sucesión conocida, principalmente por su relación con el arte y la naturaleza, es la *sucesión de Fibonacci*. También en este caso el término general de la sucesión está relacionado con los términos precedentes. La sucesión de Fibonacci (1175-1250) se define así:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \forall \ n > 2$$

Aplicando la fórmula del término general se obtiene: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …, sucesión que tiene las siguientes propiedades.

1. Lím $a_n = +\infty$

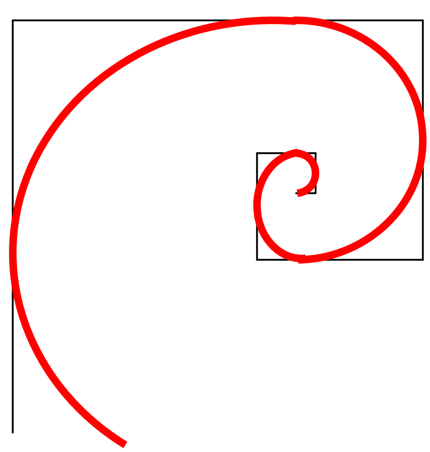
2. a_n es creciente.

3. Si se define $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, entonces lím $b_n \cong 0{,}618 = \phi$, límite con nombre propio en matemática porque los números ϕ, 1, 1, $1+\phi$ están en proporción. Se cumple que:

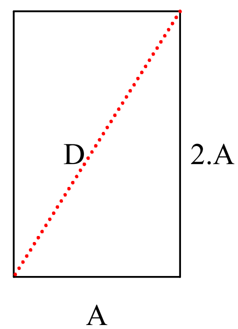
$$\phi / 1 = 1 / (1+\phi) \text{ o también } \phi.(1+\phi) = 1$$

La relación entre ϕ y 1 o bien la relación entre 1 y $1+\phi$ se conoce como “relación áurea”. La fama del número ϕ deriva del hecho que, para el ojo humano, las figuras rectangulares que tienen por ancho y largo números proporcionales aϕ y 1 o a 1 y $1+\phi$, son los más agradables o fáciles de captar. Por eso las postales suelen tener medidas 10 x 16 y las fotos comunes 9 x 15 aproximadamente.

4. Si se genera una figura abierta en forma de espiral cuyos lados son los elementos de la sucesión de Fibonacci y se inscribe en ella una curva, se obtiene la espiral logarítimica, considerada de las más bellas curvas matemáticas.



5. El número ϕ vuelve a aparecer al calcular la diagonal de un rectángulo de ancho mitad del largo. El cociente de la diferencia entre (digonal – ancho) y largo, resulta igual a ϕ.



$$D^2 = A^2 + (2.A)^2$$
$$D = \sqrt{5}\,.A$$
$$\phi = \frac{D - A}{2.A} = \frac{\sqrt{5}.A - A}{2.A} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \cong 0{,}618034$$

Infinitésimos

Definición: Se dice que una función f es un *infinitésimo* cuando $x \to +\infty$ si se cumple que: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

También entre los infinitésimos los hay más lentos y más rápidos, pero la lentitud o rapidez refiere a la velocidad con que se acercan a 0. Por ejemplo, $1/x^2$ tiende a cero más rápido que $1/x$. También se pueden establecer reglas sobre el *orden* de los infinitésimos. Cuando $x \to +\infty$:

Ord (infinitésimo potencial) < Ord (infinitésimo exponencial)

Por ejemplo: $\mathrm{ord}(x^{-1/2}) < \mathrm{ord}(1/x) < \mathrm{ord}(1/x^2) < \mathrm{ord}(1/x^3) < \mathrm{ord}(e^{-x})$.

También se pueden definir infinitésimos cuando $x \to 0$. Son ejemplos de infinitésimos en este caso: $\sqrt{|x|}$, x, x^2, x^3, $1 - e^x$, $L(1+x)$, pues todos ellos tienden a cero cuando $x \to 0$. En el caso de los potenciales, el orden crece con el exponente.

La equivalencia se define en los mismos términos que la equivalencia de infinitos. Pero en el caso de la suma de infinitésimos de distinto orden, la suma es equivalente al de menor orden (obsérvese la diferencia con la propiedad en infinitos), y esto es así, porque el más *lento* enlentece la suma. Se puede demostrar que los infinitésimos $(1 - e^x)$ y $L(1+x)$ son equivalentes del infinitésimo x, cuando $x \to 0$.

Los "límites tipo"

Como consecuencia de la última propiedad enunciada más arriba, y de otras propiedades, se tienen los siguientes resultados "tipo".

$$a)\ Lím\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \quad cuando\ x \to +\infty$$

$$b)\ Lím\ (1+x)^{1/x} = e \quad cuando\ x \to 0^{+}$$

$$c)\ Lím\ \frac{L(1+x)}{x} = 1 \quad cuando\ x \to 0$$

$$d)\ Lím\ \frac{e^{x}-1}{x} = 1 \quad cuando\ x \to 0$$

$$e)\ Lím\ \frac{sen\,x}{x} = 1 \quad cuando\ x \to 0$$

Ejemplo:

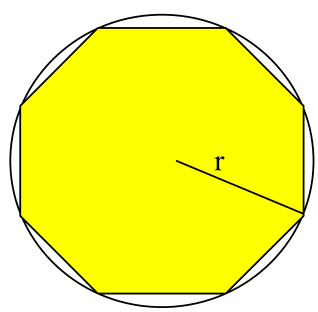
$$Lím\ \frac{x^2+2.L(1+x^2)}{x^3-x^2} = lím\ \frac{2.L(1+x^2)}{-x^2} = lím\ \frac{2.x^2}{-x^2} = -2$$

$$x \to 0$$

Los argumentos para resolver este ejemplo son la equivalencia de la suma de infinitos (por ejemplo, $x^3 - x^2 \sim - x^2$) y una propiedad que permite extender los resultados de los límites tipo cuando $x \to 0$ sustituyendo al infinitésimo "x" por otro infinitésimo. En este ejemplo, dado que $L(1 + x) \sim x$, la aplicación de la propiedad permite afirmar que $L(1 + x^2) \sim x^2$.

El último de los límites tipo no será utilizado en el curso porque hemos optado por dejar de lado las funciones trigonométricas. Sin embargo, por su valor didáctico, lo habremos de aplicar en el siguiente ejemplo[1].

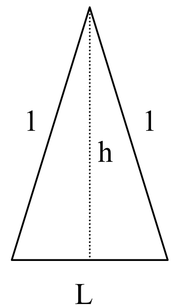
Considérese un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio r = 1.



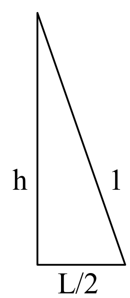
Nos interesa calcular el área del polígono inscrito y observar lo que ocurre cuando aumenta el número de lados. Es intuitivo que el área aumenta a medida que aumenta el número de lados del polígono. ¿Qué ocurre con el área del polígono si hacemos tender a $+\infty$ el número de lados? El límite del área de los polígonos, cuando el número de lados tiende a $+\infty$, debería coincidir con el área del círculo, $\pi.r^2$, π en este caso. Vamos a demostrarlo.

[1] Este ejemplo puede ser omitido en una primera lectura.

Supongamos que el polígono tiene n lados, y que la medida del lado es L. El polígono no es otra cosa que la unión de n triángulos de la forma:

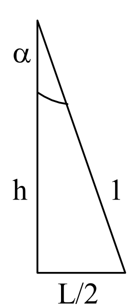


El área del triángulo se puede expresar en función de su altura (h) y de la base. A su vez, podemos calcular la altura del triángulo en función de L. La mitad del triángulo tiene un ángulo recto y, por tanto, se puede aplicar el teorema de Pitágoras.



Por Pitágoras: $h^2 + (L/2)^2 = 1^2$. Entonces: $h^2 + L^2/4 = 1$. Entonces: $h = \sqrt{1 - L^2/4}$. Resulta que el área del medio triángulo es: $(L/2 * \sqrt{1 - L^2/4})/2$, el área del triángulo es $L/2 * \sqrt{1 - L^2/4}$ y el área del polígono es $n * L/2 * \sqrt{1 - L^2/4}$.

¿Existe alguna relación entre n y L? Por ejemplo, sabemos que si el polígono inscrito es un hexágono (n = 6) el lado mide 1. Pero si n es un natural cualquiera, la relación entre n y L es un poco más complicada. Si hay n lados en el polígono, entonces hay n triángulos cuyo ángulo al centro mide 360º/n o lo que es lo mismo en radianes, $2.\pi/n$. Por tanto, el medio triángulo tiene ángulo al centro $\alpha = \pi/n$.



Por definición: sen α = $\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{L/2}{1} = \dfrac{L}{2} \Rightarrow sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \dfrac{L}{2} \Rightarrow L = 2.sen\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$.
Esta es la relación entre L y n. Ahora podemos expresar el área del polígono exclusivamente en función de n.

Área del polígono =

$$n * \frac{2.sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} * \sqrt{1 - \frac{\left[2.sen\frac{\pi}{n}\right]^2}{4}} = n * sen\frac{\pi}{n} * \sqrt{1 - sen^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = n * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) * \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

¿Qué ocurre con el área del polígono cuando n → +∞? Ocurre que π/n tiende a 0, también sen(π/n) tiende a 0, cos(π/n) tiende a 1, y por límites tipo se cumple que:

$$\lim_{\frac{\pi}{n} \to 0} \frac{sen\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = 1$$

Por tanto:

$$\lim_{\frac{\pi}{n} \to 0} \frac{n}{\pi} * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1$$

En consecuencia:

$$\lim_{\frac{\pi}{n} \to 0} n * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$$

Y finalmente: Lím $n * sen\left(\frac{\pi}{n}\right) * \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \pi$, que era lo que queríamos probar.

Continuidad

Recordamos que entre los ejemplos iniciales de esta sección nos interesó identificar aquellos casos en que *el gráfico de la función se puede dibujar sin levantar el lápiz al pasar por x=a*. Ahora vamos a centrar nuestro interés en este concepto.

Definición: Se dice que f es una *función continua en el punto x=a* si se cumple que **lím f(x) = f(a).**
x → a

¿Qué tiene que ocurrir para que una función sea continua en el punto x=a? Tienen que ocurrir tres cosas: primero, que exista el límite de la función en el punto, segundo, el punto debe pertenecer al dominio de f, es decir, f(a) es un número, y en tercer lugar, deben coincidir el límite en el punto con el valor funcional.

Por tanto, una función no es continua en el punto x=a si el punto no pertenece al dominio de la función, si no existe el límite de la función en el punto, por ejemplo, porque los límites laterales son diferentes o porque no existe uno de los límites laterales. Cuando una función no es continua en un punto, se dice que es *discontinua.*

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f es discontinua.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

<u>Definición</u>: Se dice que f es una *función continua en el punto* $x=a^-$ si se cumple que $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$. En tal caso se dice que la función f es continua lateralmente por izq.

<u>Definición</u>: Se dice que f es una *función continua en el punto* $x=a^+$ si se cumple que $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. En tal caso se dice que la función f es continua lateralmente por der.

Revisando las definiciones se deduce que si una función es continua también es continua lateralmente por izquierda y por derecha. También puede asegurarse el recíproco: si una función es lateralmente continua en un punto por izquierda y por derecha, entonces es continua en el punto. También se puede hablar de *discontinuidad lateral*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f es continua por izquierda.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f es continua por derecha.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Cuando en un punto los límites laterales de la función son iguales y finitos, pero no coinciden con el valor funcional o éste no está definido, se dice que la discontinuidad en el punto es *evitable*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f presenta una discontinuidad evitable.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Cuando en un punto los límites laterales de la función son finitos y diferentes, se dice que la función presenta en el punto una discontinuidad con *salto finito*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f presenta una discontinuidad con salto finito.

Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

Cuando en un punto uno de los límites laterales de la función es infinito, se dice que la función presenta una discontinuidad con *salto infinito*.

Indicar en cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección, la función f presenta una discontinuidad con salto infinito.

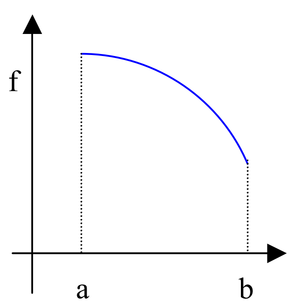
Marcarlos con una cruz.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J

<u>Definición</u>: Se dice que f es una *función continua en el intervalo (a, b)* si es continua en cada punto del intervalo abierto (a, b).

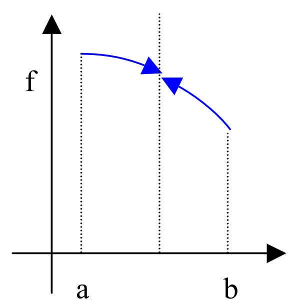
<u>Definición</u>: Se dice que f es una *función continua en el intervalo cerrado [a, b]* si es continua en cada punto del intervalo abierto (a, b), es continua en x=a por derecha y es continua en x=b por izquierda.

Entonces, una función es continua en un intervalo cerrado si el gráfico de la función en dicho intervalo se dibuja sin levantar el lápiz.

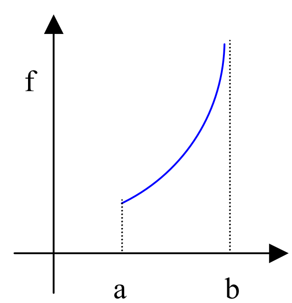
(I)



(II)



(III)



(I) f es continua en (a, b) y en [a, b].
(II) f es discontinua en (a, b) y en [a, b].
(III) f es continua en (a, b) pero es discontinua en [a, b].

¿Qué ocurre con la propiedad de continuidad en un intervalo abierto o cerrado cuando se opera con funciones? La propiedad de continuidad se extiende sin dificultad a la suma, resta y multiplicación de funciones. En el caso de la división, radicación y logaritmación se presentan algunas dificultades. En el siguiente cuadro se presentan los resultados más importantes. Donde aparece la expresión "intervalo cerrado" puede sustituirse por "intervalo abierto" y la propiedad enunciada sigue siendo válida.

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo [a, b]. Entonces:
a) La suma $(f + g)$ es una función continua en el intervalo [a, b].
b) La resta $(f - g)$ es una función continua en el intervalo [a, b].
c) La multiplicación $(f * g)$ es una función continua en el intervalo [a, b].
d) El cociente (f / g) es una función continua en el intervalo [a, b] si $g(x) \neq 0$ en [a, b].
e) Las funciones e^f y e^g son funciones continuas en el intervalo [a, b].
f) La función $\sqrt{f}$ es una función continua en el intervalo [a, b] si $f(x) \geq 0$ en [a, b].
g) La función L(f) es una función continua en el intervalo [a, b] si $f(x) > 0$ en [a, b].

Definición: *Máximo (o máximo absoluto) de una función en un intervalo [a, b]* es el mayor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama *punto de máximo* al valor de x donde f presenta un máximo absoluto.

Definición: *Mínimo (o mínimo absoluto) de una función en un intervalo [a, b]* es el menor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama *punto de mínimo* al valor de x donde f presenta un mínimo absoluto.

Dada una función en un intervalo cerrado, ¿siempre existen el mínimo y el máximo? La respuesta es negativa. Sin embargo, si la función es continua en dicho intervalo, la respuesta es afirmativa, y este importante resultado es el que se enuncia a continuación.

Teorema de Weierstrass: Toda función continua en un intervalo cerrado tiene mínimo y máximo absolutos (el teorema no es cierto si el intervalo es abierto, como lo prueba el ejemplo III).

Que el gráfico de una función continua en un intervalo cerrado se puede dibujar sin levantar el lápiz es otra forma de enunciar el siguiente teorema.

Teorema de Darboux: Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función toma, por lo menos una vez, todos los valores comprendidos entre el mínimo y el máximo absolutos.

Este teorema proporciona un método para aproximar raíces reales en el caso de funciones continuas. Por ejemplo, la función polinómica $P(x) = x^4 - 3.x + 1$ toma los valores $P(1) = -1$ y $P(2) = +11$. Como los polinomios son funciones continuas para todo x real, P es también una función continua en el intervalo [1, 2]. Más adelante demostraremos que P es una función que crece en el intervalo [1, 2]. En consecuencia, en x=1 la función presenta el mínimo absoluto (-1) y en x=2 presenta el máximo absoluto (+11), y por el Teorema de Darboux la función pasa por todos los valores intermedios entre -1 y +11. En particular, la función toma, en algún punto del intervalo, el valor 0. Por tanto, en el intervalo [1, 2] el polinomio tiene una raíz. El Teorema no asegura que haya una sola raíz en el intervalo, afirma que hay por lo menos una.

Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

Ejercicio 1

Calcular los siguientes límites de funciones.

1. Lím $(3.x^2 + 2.x + 1)$
   $x \to -1$

2. Lím 5^x
   $x \to 2$

3. Lím $\dfrac{x+1}{x-1}$
   $x \to 2$

4. Lím $(x + 3).e^{x+2}$
   $x \to -1$

5. Lím $x^2 - x + Lx$
   $x \to 1$

6. Lím Raíz(x)
   $x \to 4$

7. Lím Raíz(x)
   $x \to 0$

8. Lím Raíz(x)
   $x \to 0^+$

9. Lím $1/x$
   $x \to 0^+$

10. Lím $1/x$
    $x \to 0^-$

11. Lím $1/x$
    $x \to 0$

12. Lím $\dfrac{x+1}{x-2}$
    $x \to 2^+$

13. Lím $\dfrac{x^2-1}{x-2}$
    $x \to 2$

14. Lím $(x^2 + 4.x + 4)/(x + 2)$
    $x \to -2$

Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

Ejercicio 1 (cont.)

15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2.x^2 + 2.x + 3}{x^2 - 2.x + 1}$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3.x}{x + 5}$

17. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{Lx}{x}$

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{Lx}{x^2}$

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{x^2 + 1}$

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3^x}{x^2 + 1}$

21. $\lim\limits_{x \to -\infty} L(x^2 + 1)$

22. $\lim\limits_{x \to -\infty} L(1 + 1/x^2)$

23. $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 4/x$

24. $\lim\limits_{x \to -\infty} x - 4/x$

25. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}}$

26. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x + 1/x)^x$

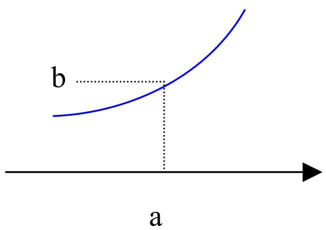
27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{L(1+x)}{x}$

Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

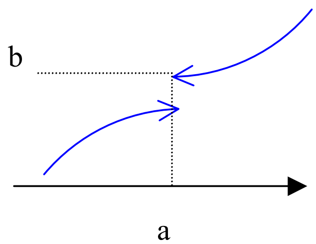
Ejercicio 2

En cada uno de los gráficos que siguen indicar si existe el límite de la función cuando $x \to a$, cuando cuando $x \to a^+$ y cuando $x \to a^-$, y en caso afirmativo, indicar su valor.

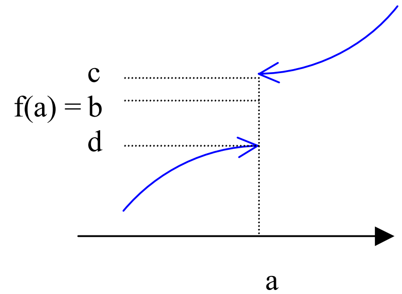
CASO 1



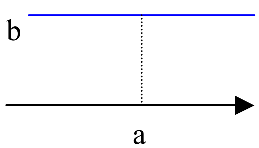
CASO 2



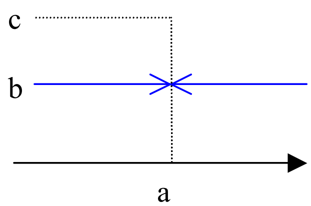
CASO 3



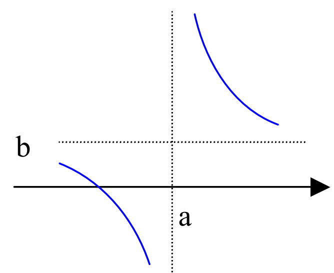
CASO 4



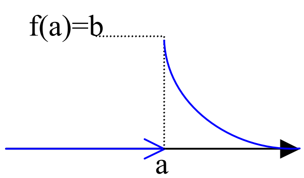
CASO 5



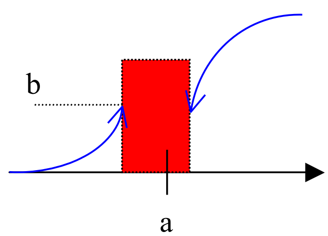
CASO 6



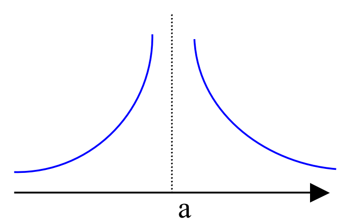
CASO 7



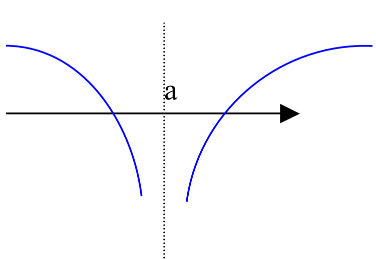
CASO 8



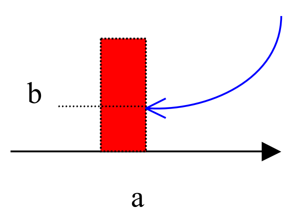
CASO 9



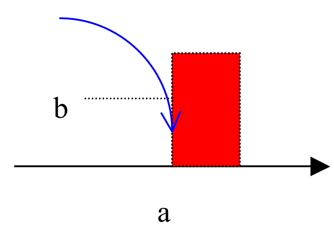
CASO 10



CASO 11



CASO 12



Repartido Práctico 11.1: Límites de funciones

Ejercicio 3

Calcular el límite, cuando $n \to +\infty$, de las siguientes sucesiones.

1. $f(n) = 1 + \frac{1}{n}$
2. $f(n) = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$
3. $f(n) = n^2 - n$
4. $f(n) = n^2 - n.Ln$
5. $f(n) = n.e^{-n}$
6. $f(n) = n - \sqrt{n}$
7. $f(n) = \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}$
8. $f(n) = L(n^2 - 5n + 1) - L(n^2 + 4n + 1)$
9. $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
10. $f(n) = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{2n+1}$

Repartido Práctico 11.2: Continuidad de Funciones

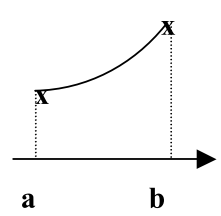
Ejercicio 1

Con relación a los 12 casos del Ejercicio 2 del Repartido 12 de Límites, estudiar la continuidad y la continuidad lateral de la función del gráfico en $x = a$.

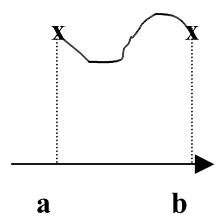
Ejercicio 2

Estudiar la continuidad de la función del gráfico en los intervalos (a, b) y [a, b] en cada uno de los siguientes casos.

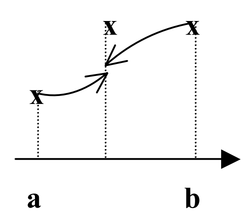
CASO A



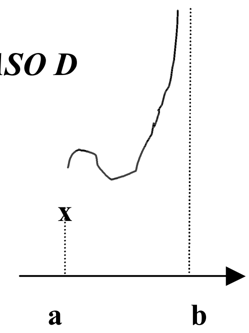
CASO B



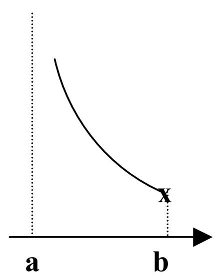
CASO C



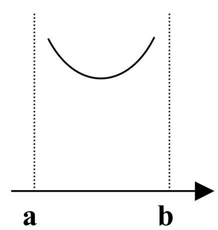
CASO D



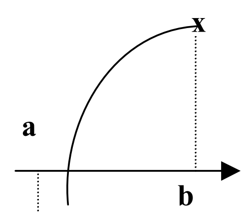
CASO E



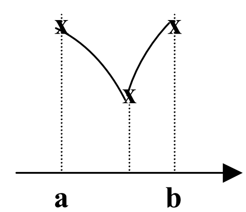
CASO F



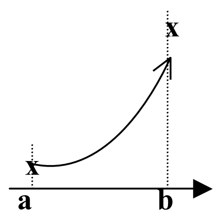
CASO G



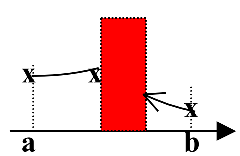
CASO H



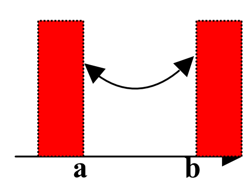
CASO I



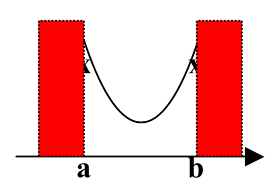
CASO J



CASO K



CASO L



Repartido Práctico 11.2: Continuidad de Funciones

Ejercicio 3

Estudiar la continuidad y la continuidad lateral en todo el dominio de las funciones elementales: x, x^2, $\sqrt{x}$, e^x, Lx.

Ejercicio 4

Estudiar para todo x real la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & si\ x \neq -2 \\ -4 & si\ x = -2 \end{cases}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x - 3}}$

f) $f(x) = L(x^2 - 4)$

Ejercicio 5

Estudiar la continuidad de las funciones que siguen en el intervalo $[1, 2]$.

a) $f(x) = x^2 - 9$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

c) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

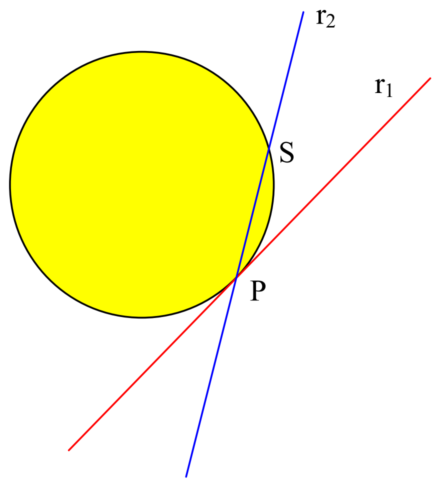
d) $f(x) = L(4 - x^2)$

12. DERIVACIÓN Y DIFERENCIACIÓN. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES. MONOTONÍA, EXTREMOS Y CONCAVIDADES.

En esta sección se introducen dos conceptos claves para el estudio de las funciones: *derivada de una función en un punto* y *función derivada*.

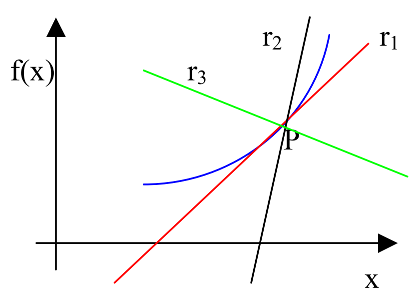
Optamos por introducir el primer concepto apelando a la interpretación geométrica, para luego presentar la definición analítica.

¿Qué es la tangente a una curva en un punto? Si la curva es una circunferencia, entonces la tangente a la circunferencia en un punto es la única recta que pasa por ese punto y toca a la circunferencia sólo en ese punto.

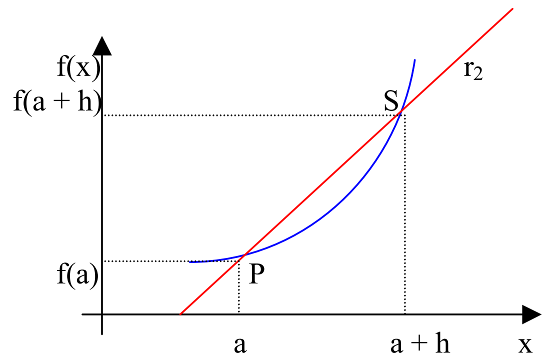


r_2 no es tangente a la circunferencia en P, porque la corta en dos puntos (P y S). r_2 es una *cuerda* de la circunferencia. r_1 es la tangente en P. ¿Qué sucede si el punto S se mueve en la dirección de P, y éste permanece fijo? A medida que S se acerca a P, la recta r_2 se acerca a la posición de r_1, de tal forma que cuando S coincide con P, entonces r_2 se superpone con r_1.

Consideremos ahora el gráfico de una función (la circunferencia no es el gráfico de ninguna función).



Por el punto P pasan muchas rectas que cortan el gráfico de la función en un solo punto. Estamos interesados en encontrar una recta que corte al gráfico en P pero que, además, "se parezca" al gráfico en las vecindades de P tanto como sea posible. Tal recta es, en la figura, r_1. Para encontrar la fórmula analítica de r_1 vamos a considerar una cuerda de la curva que pase por P (tal como hicimos en el caso de la circunferencia).



Las coordenadas de los puntos son P = (a, f(a)) y S = (a + h, f(a + h)) donde "h" es una variable que no depende de *a* (el punto P está fijo y por tanto *a* es también un número fijo). La diferencia entre las abcisas de los dos puntos es h = (a + h) – a y esta diferencia en las abcisas origina una diferencia de ordenadas f(a + h) – f(a). En el gráfico de la figura se ha tomado h > 0, pero h puede ser negativa si se elige el punto S a la izquierda del punto P.

Hagamos tender el punto S hacia el punto P, con lo que la recta r_2 tenderá hacia la posición de la tangente a la curva en el punto P. Se observa que para que S tienda a P alcanza con que $h \to 0$.

¿Cuál es la ecuación de la recta r_2? Es la ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

Ecuación de r_2: $$y = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} * (x-a) + f(a)$$

Cuando $h \to 0$, r_2 tiende a la posición de la tangente a la curva por P:

Ecuación de la tangente a la curva en P: $$y = [\underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + *(x-a) + f(a)]$$

Entonces, la expresión $Lím \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando $h \to 0$ es el coeficiente angular de la recta tangente a la curva f en el punto P.

Definición: Se llama *derivada en el punto x=a de la función f*, y se anota f '(a), al resultado de la expresión $\underset{h \to 0}{Lím} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

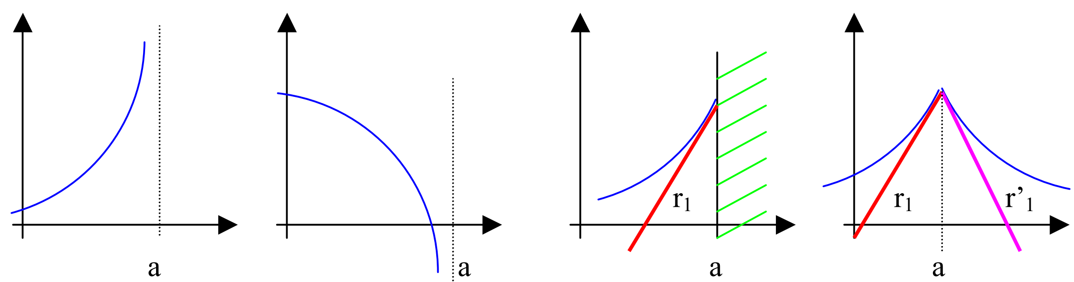
Observaciones

1. No siempre existe la derivada de la función en un punto. Ello depende de la existencia del límite que define f '(a).

2. Si existe f '(a), entonces f '(a) es el coeficiente angular de la recta tangente a la curva f en el punto de abcisa x=a. En tal caso, la ecuación de la tangente se puede escribir así:

$$y = f'(a)*(x - a) + f(a).$$

3. La expresión $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ es un cociente (denominado *cociente incremental*) cuyo denominador es un infinitésimo cuando $h \to 0$. Entonces, para que el límite de dicha expresión sea un número finito, el numerador también tiene que ser un infinitésimo del mismo orden que h o de orden superior. Entonces, Lím [f(a + h) – f(a)] = 0 cuando $h \to 0$ que es lo mismo que afirmar que Lím f(x) = f(a) cuando $x \to a$, que es la definición de función continua en el punto x=a. En otras palabras, para que exista y sea finita la derivada de la función en un punto, es condición necesaria que la función sea continua en dicho punto.
4. Cuando $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \infty$, la interpretación geométrica es que en el punto de abcisa x=a no hay tangente a la curva y el gráfico tiende a comportarse como la recta x = a.
5. Cuando el límite de la expresión no existe, entonces la curva no tiene una tangente en el punto x=a. Sin embargo, bien podrían existir los límites laterales cuando $h \to 0^+$ y cuando $h \to 0^-$. En este caso la curva tiene tangentes laterales diferentes a izquierda y derecha del punto x=a.



$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$

$+\infty$	$-\infty$	f '(a^-) si $h \to 0^-$ f '(a) no existe	f '(a^-) $\neq$ f '(a^+) f '(a) no existe

Tangente

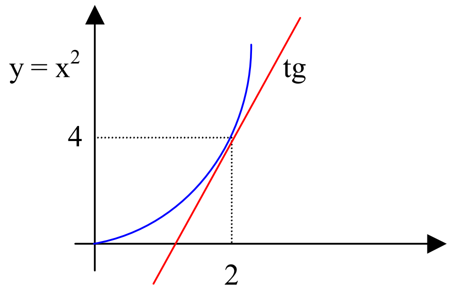
x = a	x = a	tg en a^-) r_1	tg laterales: r_1 y r_2

Cuando existen y son finitos los $\lim \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando $h \to 0^+$ y $h \to 0^-$, se dice que f tiene en x=a *derivadas laterales*. Una condición necesaria para la existencia de f '(a) es que existan f '(a^-) y f '(a^+) y que sean iguales. Cuando f '(a^-) y f '(a^+) existen, son finitos y distintos, se dice que la curva f presenta en x=a un *punto anguloso*.

Ejemplo: Considérese la función f:f(x) = x^2. Se quiere calcular, si existe, f '(2).

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4.h}{h} = \lim_{h \to 0} (h+4) = 4.$$

Entonces f ’(2) = 4. ¿Cuál es la interpretación geométrica de este resultado? La tangente a la curva $y = x^2$ en el punto x=2 tiene coeficiente angular igual a 4.



La tangente tiene coeficiente angular 4 y pasa por el punto (2, 4). Por tanto, la ecuación de la tangente a la curva en el punto x=2 es:

$$y = 4.x - 4$$

<u>Definición</u>: Se llama *derivada de la función f* (notación: f ’ o bien $\frac{\partial f}{\partial x}$) a una función que a cada punto del dominio de f le hace corresponder el valor de la derivada en dicho punto.

$$f': x \to f'(x)$$

Ejemplo: Considérese la función f:f(x) = x^2. Se quiere calcular f ’(x).

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2.x.h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 2.x) = 2.x.$$

Con el mismo argumento se puede demostrar que si f(x) = x^3, entonces f ’(x) = $3.x^2$ y más en general, que si f(x) = x^m, entonces f ’(x) = $m.x^{m-1}$.

Ya sabemos derivar un monomio. ¿Cómo se hace para obtener la derivada de una función polinómica? Necesitamos saber cómo se obtiene la derivada de una suma de funciones y la derivada del producto de una función por una constante. Para hallar la derivada de funciones cualesquiera, se pueden aplicar los siguientes métodos:

I) Utilizando la definición de función derivada, mediante límites. Así se obtienen las derivadas de las funciones elementales que aparecen en la tabla más abajo.
II) Utilizando una “tabla de derivadas”
III) Utilizando las reglas de derivación para operaciones con funciones y para funciones compuestas.

Reglas para la derivación

Derivada de una suma de funciones: $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

Derivada de una resta de funciones: $[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$

Derivada de una constante por una función: [K.f(x)]' = K.f '(x)

Derivada de un producto de funciones: $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

Derivada de un cociente de funciones: $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

Derivada de un logaritmo neperiano: $[Lf(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Derivada de una exponencial de base e: $\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)}.f'(x)$

Derivada de una raíz cuadrada: $\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)}{2.\sqrt{f(x)}}$

Derivada de una función de función: $\{f[g(x)]\}' = f'[g(x)].g'(x)$

Derivada de la derivada = Derivada segunda = f ''(x) = [f '(x)] '

Tabla de derivadas elementales

f(x)	**f '(x)**
K	0
x	1
x^2	$2.x$
x^3	$3.x^2$
x^m	$m.x^{m-1}$
1/x	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x.La$
Lx	1/x
L|x|	1/x

Aplicando las tres primeras reglas y la fórmula para la derivada de x^m se puede calcular la derivada de cualquier función polinómica. Las dos primeras reglas establecen que la derivada de una suma es la suma de las derivadas, y que la derivada de una resta es la resta de las derivadas. El producto y la división de funciones no tienen esta sencilla propiedad.

Aunque resulte obvio, para que exista la derivada de una suma (de una resta o de un producto) deben existir las derivadas de los sumandos (del minuendo y el sustraendo o de los factores, respectivamente). En el caso de la derivada de un cociente o de una función compuesta, es necesario imponer condiciones adicionales a la derivabilidad de numerador y denominador o de las funciones que intervienen en la composición.

Ejemplo: Hallar la derivada de la función polinómica $P(x) = 3.x^4 + 2.x^3 - ½.x^2 + 8$

$$P'(x) = 3.(4.x^3) + 2.(3.x^2) - ½.(2.x) + 0 = 12.x^3 + 6.x^2 - x$$

¿Qué es la derivada segunda de una función? Es la derivada de la función derivada. Notación: $f''(x) = [f'(x)]'$.

Ejemplo:
$$P(x) = 3.x^4 + 2.x^3 - ½.x^2 + 8$$
$$P'(x) = 12.x^3 + 6.x^2 - x$$
$$P''(x) = 12.(3.x^2) + 6.(2.x) - 1 = 36.x^2 + 12.x - 1$$

Aplicación de las derivadas para el estudio gráfico de funciones

En el estudio analítico y representación gráfica de funciones interesa conocer:
- el dominio de existencia de la función
- la continuidad de la función
- las raíces de la función, es decir, el conjunto solución de la ecuación $f(x) = 0$
- los límites laterales en los puntos donde hay discontinuidad
- el comportamiento (asintótico o no) de la función cuando $x \to \pm\infty$
- los intervalos de monotonía de la función (intervalos donde f crece o decrece)
- la existencia de extremos relativos (máximos y mínimos relativos)
- la existencia de extremos absolutos
- la forma de la curva en cada intervalo: concavidad y convexidad
- la existencia de puntos de inflexión
- la existencia de puntos donde no existe la tangente a la curva.

En Economía las variables más usuales son no negativas[1] (por ejemplo, precios y cantidades). Entonces, buena parte de los problemas a estudiar tienen la restricción $x \geq 0$, es decir, el dominio de la función incluye sólo valores no negativos y el gráfico se concentra en un semiplano, y muchas veces, en el primer cuadrante del par de ejes cartesianos ortogonales. Además, los precios y las cantidades no pueden crecer indefinidamente, por lo que en Economía el $\lim f(x)$ cuando $x \to +\infty$ presenta poco interés. Los problemas en los que nos vamos a concentrar principalmente son: identificar

[1] Excepciones a esta regla son las variables que miden la utilidad monetaria en las empresas o las que miden variaciones periódicas.

intervalos de monotonía y estudiar la eventual existencia de extremos, relativos y absolutos. Para resolver estos problemas, el concepto de función derivada resulta muy útil.

Monotonía

Si para todo x_1 y x_2, $x_1 < x_2$, pertenecientes al intervalo [a, b] es:

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, entonces f es *creciente en sentido amplio* en [a, b]
- $f(x_1) < f(x_2)$, entonces f es *estrictamente creciente* en [a, b]
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces f es *decreciente en sentido amplio* en [a, b]
- $f(x_1) > f(x_2)$, entonces f es *estrictamente decreciente* en [a, b]

Una función es *monótona (creciente o decreciente)* en un intervalo cuando cumple con alguna de las cuatro definiciones anteriores. En el primer caso, por ejemplo, se dice que f es *monótona creciente en sentido amplio*.

Extremos absolutos

Máximo (o máximo absoluto) de una función en un intervalo [a, b] es el mayor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama punto de máximo al valor de x donde f presenta un máximo absoluto.

Mínimo (*o mínimo absoluto*) de una función en un intervalo [a, b] es el menor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama *punto de mínimo* al valor de x donde f presenta un mínimo absoluto.

Extremos relativos

La función f presenta un *máximo relativo (en sentido amplio)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio δ, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f) es $f(x) \leq f(a)$.

La función f presenta un *máximo relativo (en sentido estricto)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio δ, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f), $x \neq a$, es $f(x) < f(a)$.

La función f presenta un *mínimo relativo (en sentido amplio)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio δ, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f) es $f(x) \geq f(a)$.

La función f presenta un *mínimo relativo (en sentido estricto)* en $x = a$ si existe un entorno de a de radio δ, tal que para todo x perteneciente a la intersección del entorno con el D(f), $x \neq a$, es $f(x) > f(a)$.

Aplicación de las derivadas

Vamos a suponer por un momento que en el intervalo donde interesa estudiar la función, [a, b] ó $[a, +\infty)$, existe la derivada en todo el dominio de la función. Entonces, se tienen los siguientes resultados:

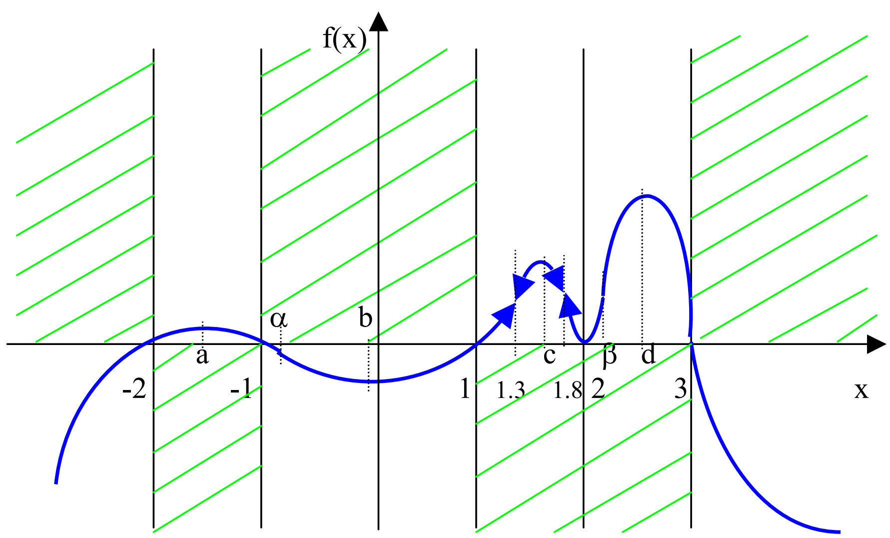
- f es monótona creciente en un intervalo, si f ’ es positiva en dicho intervalo
- f es monótona decreciente en un intervalo, si f ’ es negativa en dicho intervalo
- f presenta un mínimo relativo en x=α, si se cumple que: f ’(α) = 0, el signo de f es negativo a la izquierda de α y positivo a la derecha de α.
- f presenta un máximo relativo en x=α, si se cumple que: f ’(α) = 0, el signo de f es positivo a la izquierda de α y negativo a la derecha de α.

En los dos últimos casos, la tangente a la curva es horizontal (pues su coeficiente angular es nulo).

- f presenta concavidad positiva o convexidad en un intervalo, si f ’’ es positiva en dicho intervalo
- f presenta concavidad negativa en un intervalo si f ’’ es negativa en dicho intervalo

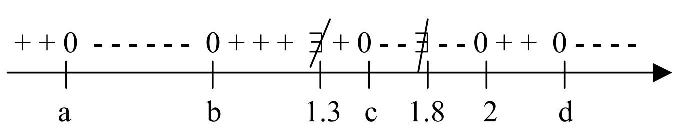
Que una función presenta concavidad positiva en un punto significa que la tangente a la curva en dicho punto se dibuja por debajo del gráfico de la función. Que una función presenta concavidad negativa en un punto significa que la tangente a la curva en dicho punto se dibuja por encima del gráfico de la función.

Ejemplo:



La función del gráfico presenta tres máximos relativos, en los puntos x=a, x=c y x=d, y un mínimo relativo en x=b. La función es monótona creciente en los intervalos: (-∞, a), (b, 1.3), (1.3, c) y (2, d). La función es monótona decreciente en los intervalos: (a, b), (c, 1.8), (1.8, 2) y (d, +∞). De acuerdo con las definiciones dadas, la función presenta un máximo absoluto en x=d y no existe punto de mínimo absoluto. La función tiene concavidad negativa en los intervalos (-∞, α), (1.3, 1.8) y (β, 3) y presenta concavidad positiva o convexidad en los intervalos (α, 1.3), (1.8, β) y (3, +∞). Por tanto, a dicho gráfico le corresponden los siguientes esquemas de signo de f ’ y f ’’.

Sgn f ’



Sgn f ''

	0		∄		∄		0		0	
- - - - - -	α	+ + + + + +	1.3	- - - - -	1.8	+ + + +	β	- - - -	3	+ + + + +

¿Por qué puede no existir la derivada de la función en un punto? Por varios motivos, entre los cuales podemos mencionar:

a) Porque el punto no pertenece al dominio de existencia de la función. Como f(a) interviene en la fórmula de f '(a), si no existe f(a) entonces tampoco existe f '(a).
b) Porque a la izquierda o a la derecha del punto no está definida la función. Es el caso, por ejemplo, de f(x) = $\sqrt{x}$, que no está definida a la izquierda de 0 y por tanto no existe f '(0).
c) Porque las derivadas laterales en el punto existen, son finitas, pero son diferentes. Es el caso de la función f(x) = |x| en el punto x = 0.

Ejemplo: Hallar el gráfico de la función f(x) = $L(1 + x^2)$.

Dominio de existencia

El logaritmo está definido si el argumento es mayor que cero. Y $(1 + x^2)$ es mayor que cero para todo x real. Entonces: D(f) = R.

Ceros

$L(1 + x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = e^0 \Leftrightarrow 1 + x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Signo de f

$L(1 + x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 1 + x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$, lo cual se cumple $\forall\, x \in R$

Sgn f

	0	
+ + + + + + + + + +	0	+ + + + + + +

Límite de la función cuando $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} L(1 + x^2) = +\infty$$

Monotonía y extremos

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.(1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2}.(2.x) = \frac{2.x}{1+x^2}$$

Sgn f '

	0	
- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + + + + +
f Decrece ↘	Mín	↗ Crece

f(0) = L1 = 0

No hay máximos relativos ni absolutos. En x = 0 hay un mínimo relativo que es, además, punto de mínimo absoluto. El valor mínimo de la función es f(0) = 0.

Concavidad

$$f''(x) = \frac{2.(1+x^2) - 2.x.(2.x)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2.(x^2-1)}{(1+x^2)^2}$$

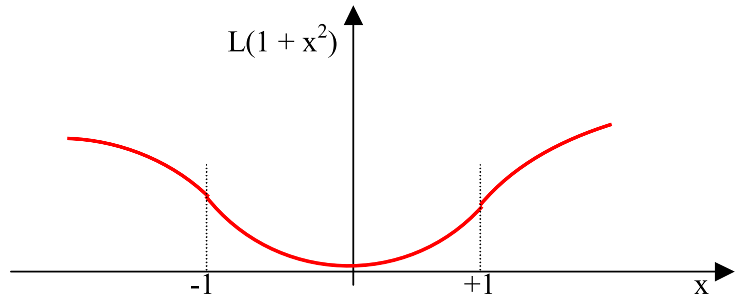
- - - - - 0 + + + + + 0 - - - - - -

Sgn f ’’ ——|——|——► $\qquad$ f(1) = f(-1) = L(1 + 1) = L2

-1 $\quad$ +1

Concavidad de f : Negat. Positiva Negat.

Ahora estamos en condiciones de bosquejar el gráfico de f.



Interpretación económica de la derivada

Considérese una función de costos, C(q), que representa el *costo total* de producir q unidades de un único producto. El *costo medio* de la producción es $\frac{C(q)}{q}$. ¿Cuál es el incremento del costo al pasar a producir una unidad adicional a partir de q? Este concepto se denomina *incremento de costo* y es igual a C(q + 1) – C(q). Si las unidades de producto son divisibles –por ejemplo, porque el producto se mide en quilos, y es posible producir 2,3 quilos–, entonces se puede pensar en un incremento infinitesimal de la producción. Si dicho incremento se simboliza Δq, entonces se define el *costo marginal en q* como la derivada de la función del costo total en el punto q:

$$\text{Costo marginal en q: } C'(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q}$$

Si $\Delta q \approx 1$, entonces: $C'(q) \approx C(q + 1) – C(q)$ y el costo marginal se puede utilizar como aproximación del incremento de costo. El costo marginal puede interpretarse, entonces, como una aproximación de lo que cuesta producir una unidad más, por encima del nivel de producción q.

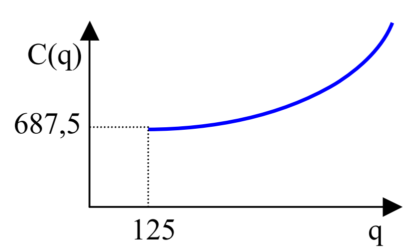
Ejemplo: Sea la función del costo total $C(q) = 1000 – 5.q + 0{,}02.q^2 \;\; \forall\, q \geq 125$.

a) ¿Cómo se comporta la función de costos?

$C'(q) = -5 + 0{,}04.q$ $\qquad$ Sgn $\;$ 0 + + + + + (——|——►, 125, q)

$-5 + 0{,}04.q = 0$

El costo es creciente ∀ q ≥ 125.



b) Si se están produciendo 200 unidades, ¿cuál es el incremento del costo de producir una unidad más? ¿Cuál es el costo marginal en q = 200?

C(201) – C(200) = [1000 – 5.(201) + 0,02.$(201)^2$] - [1000 – 5.(200) + 0,02.$(200)^2$] = 3,03 = costo de producir una unidad adicional por encima de 200.

C’(q) = -5 + 0,04.q $\Rightarrow$ C’(200) = 3, costo aproximado de producir una unidad adicional por encima de 200.

c) Definir la función de costo medio.

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1000 - 5.q + 0{,}02.q^2}{q} = 0{,}02.q - 5 + \frac{1000}{q}$$

d) ¿Cómo se comporta la función de costo medio?

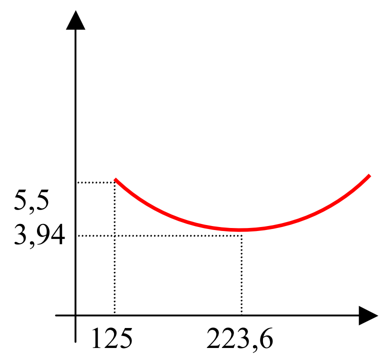
CM(125) = 687,5/125 = 5,5

$$CM'(q) = 0{,}02 - 1000/q^2 = \frac{q^2 - 50.000}{50.q^2}$$

Sgn CM’(q)

	125		223,6	
		- - - - -	0	+ + +

CM(q) en el intervalo: Decrece Crece



CM(223,6) = 3,94

e) Costo medio mínimo

Si las unidades de producto se pueden fraccionar, entonces el mínimo costo medio se obtiene para un nivel de producción q = 223,6. Si las unidades de producto no se pueden fraccionar, entonces está claro por el gráfico que el mínimo costo medio se obtiene en un número entero próximo a 223, 6.

CM(223) = 3,94430
CM(224) = 3,94429

El costo medio mínimo se obtiene para un nivel de producción de 224 unidades.

Considérese ahora la función B(q) que mide el *beneficio total* de producir q unidades de producto. Entonces el *beneficio medio por unidad de producto* es B(q)/q y la derivada B’(q) es el *beneficio marginal* que mide aproximadamente el beneficio de producir una unidad adicional por encima de q unidades.

Concepto de Diferencial

En Economía resulta relevante conocer de qué manera se ve afectada una variable por un cambio producido en otra variable relacionada. Si aumenta $1 el precio del kilo de pan, ¿cómo se verá afectada la demanda de pan?

Si la relación entre dos variables puede explicitarse mediante la fórmula $y = f(x)$ donde f es una función derivable, y utilizamos la notación "Δx" para representar el cambio en el valor de la variable independiente, y "Δy" para notar la modificación en la y al pasar de x a $x+\Delta x$, entonces:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

A veces la forma funcional de la f es complicada o resulta laborioso evaluar dicha función en el punto $x+\Delta x$. En tales casos se obtiene una buena aproximación de Δy mediante la introducción de un nuevo concepto.

<u>Definición</u>: $dy = f\,'(x).\Delta x$ = Diferencial de y en el punto x.

Considérese el caso particular en que $y = f(x) = x$. Resulta $f\,'(x) = 1$. Entonces: $dy = 1.\Delta x$, pero como es $y = x$, también es $dy = dx$ y resulta $dx = \Delta x$. Como es más usual la notación "dx" para la variación de la variable independiente, escribiremos:

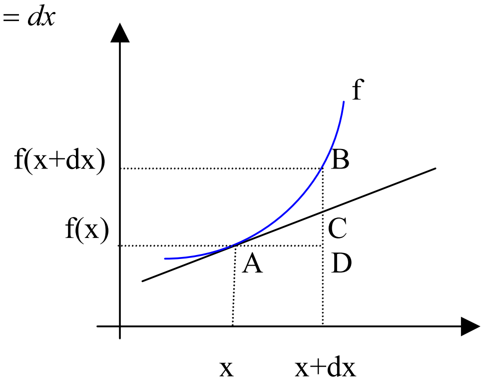
$$dy = f\,'(x).dx$$

y esta igualdad justifica una de las notaciones usuales de la función derivada:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Observaciones

1) dy es una función de dos variables, $dy = g(x,dx)$, donde x es la variable independiente de la función $y = f(x)$, y dx es otra variable que indica el cambio producido o deseado en la variable x.
2) Para hallar el diferencial de una función alcanza con saber derivar.
3) $\overline{B}\overline{D} = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y \qquad \overline{A}\overline{D} = dx$



El cociente CD/AD es el coeficiente angular de la tangente a la curva f en el punto x, y por tanto, es igual a $f\,'(x)$. Por tanto, $CD/dx = f\,'(x)$, entonces $CD = f\,'(x).dx$ y finalmente: $CD = dy$.

4) ¿Qué ocurre con dy y Δy cuando dx tiende a cero? Si la función f es derivable en el punto x, entonces dy y Δy tienden también a cero, son infinitésimos. En otras palabras, dy es una aproximación de Δy cuando dx tiende a cero. Este es el uso que haremos de dy en los siguientes dos ejemplos.

Ejemplo [1]: Sea $y = f(a) = a^3$

Interpretación geométrica: f es el volumen de un cubo de lado a. Se quiere saber aproximadamente cuánto se incrementa el volumen del cubo cuando el lado pasa de 5 dm a 5,01 dm.

La respuesta exacta es $\Delta y = 5{,}01^3 - 5^3 = 0{,}751501$. Una aproximación de Δy puede obtenerse fácilmente con $dy = 3a^2.da = 3.5^2.0{,}01 = 75.0{,}01 = 0{,}75$. Obsérvese que en este caso la aproximación es muy buena (error de 1,5 por mil) y el resultado se obtiene mediante operaciones sencillas.

Ejemplo [2]: La proporción de lamparitas que fallan antes de un cierto tiempo t (en horas) puede estimarse mediante la función P:

$$P(t) = 1 - \left(\frac{100}{100+t}\right)^2 .$$

a) Hallar la proporción de lamparitas que fallan antes de las 100 horas.
b) Hallar aproximadamente la proporción de lamparitas que fallan antes de las 99 horas.

a) El cálculo es elemental: $1 - (1/2)^2 = 0{,}75$.
b) El cálculo exacto se hace engorroso porque se necesita hacer el cociente 100/199. Trabajemos con la aproximación.

$P(99) - P(100) = \Delta P \cong dP = P'(100).dt$, donde $dt=-1$.

$$P'(t) = \frac{20.000}{(100+t)^3} \Rightarrow P'(100) = 0{,}0025$$

$$\Rightarrow P(99) - P(100) = 0{,}0025.(-1) = -0{,}0025$$

$$\Rightarrow P(99) = P(100) - 0{,}0025 = 0{,}7475$$

Calcúlese el valor de P(99) con 5 decimales utilizando la fórmula de P(t) y verifíquese que el error de la aproximación es inferior al 2 por diez mil.

5) La expresión $dy = f\,'(x).dx$ indica que dy es un infinitésimo cuando dx tiende a cero. Si $f\,'(x) \neq 0$, entonces dy es un infinitésimo del mismo orden que dx, y $f\,'(x)$ actúa como una constante de proporcionalidad. Obsérvese que dy no es la variación de la función f cuando x pasa a $x+dx$, sino la variación que tendría si la función se comportara como lo hace la tangente a la curva en el punto x.

Repartido Práctico 12.1: Derivadas de Funciones

Ejercicio 1

En cada una de las funciones siguientes calcular la función derivada y el dominio de existencia de la f '(x).

a) $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}.x^4 + 3.x^3 - \frac{1}{2}.x^2 + 5.x + 4$
b) $f(x) = 5^x$
c) $f(x) = x^2 - Lx$
d) $f(x) = x.Lx$
e) $f(x) = e^x - x.e^x$
f) $f(t) = e^{(t^2)}$
g) $f(x) = 4.\sqrt{x}$
h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
i) $f(q) = \frac{5}{q+1}$
j) $f(x) = \frac{2.x+1}{3.x-2}$
k) $f(p) = \frac{p^2-1}{p+2}$
l) $f(x) = L(1+x^2)$

m) $f(x) = e^{2.x+3}$
n) $f(x) = L\sqrt{x^2 - 1}$

Ejercicio 2

Hallar las derivadas segundas de las siguientes funciones.

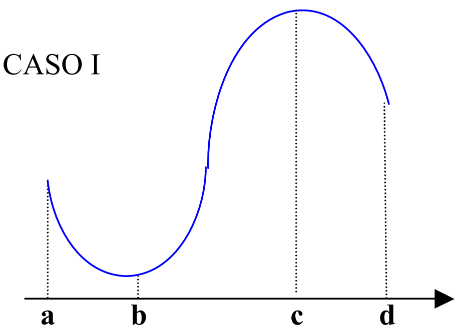
a) $f(x) = x^5 - \frac{1}{4}.x^4 + 3.x^3 - \frac{1}{2}.x^2 + 5.x + 4$
b) $f(x) = 5^x$
c) $f(x) = x^2 - Lx$
d) $f(x) = x.Lx$
e) $f(x) = e^x - x.e^x$
f) $f(t) = e^{(t^2)}$
g) $f(x) = 4.\sqrt{x}$
h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
i) $f(q) = \frac{5}{q+1}$
j) $f(x) = \frac{2.x+1}{3.x-2}$

Repartido Práctico 12.2: Aplicación de las derivadas para el estudio de funciones

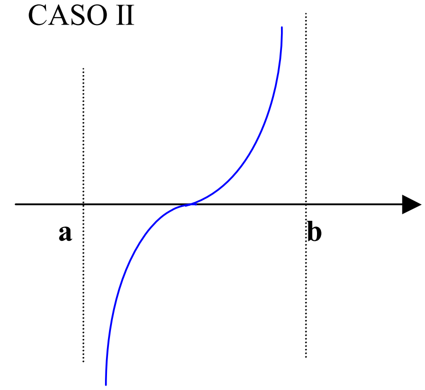
Ejercicio 1

Indicar en cada caso los intervalos de monotonía de la función y, si existen, los puntos de extremos relativos y absolutos.

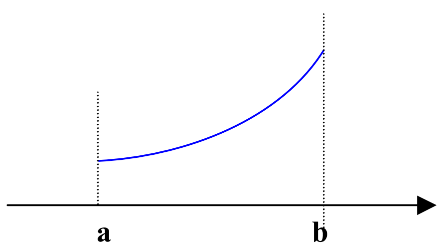
CASO I



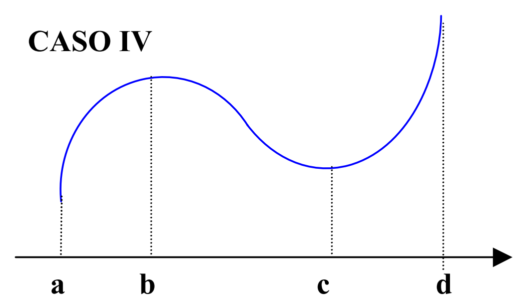
CASO II



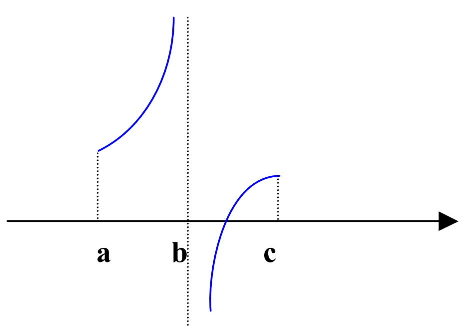
CASO III



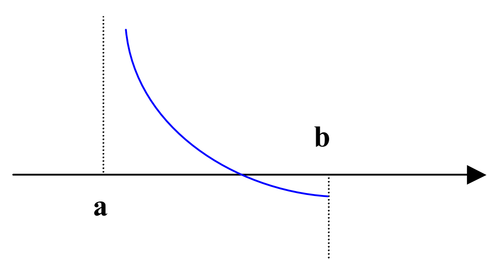
CASO IV



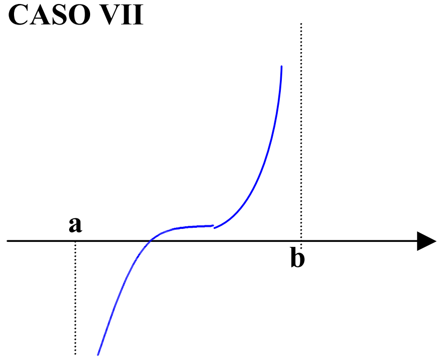
CASO V



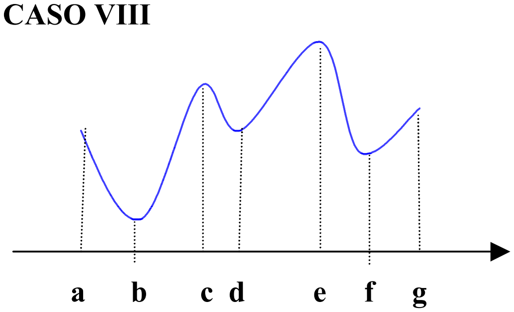
CASO VI



CASO VII



CASO VIII



Repartido Práctico 12.2: Aplicación de las derivadas para el estudio de funciones

Ejercicio 2

Estudiar y graficar las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

c) f(x) = x – Lx

d) f(x) = L|x^2 – 1|

Ejercicio 3

Se tiene una cuerda de 36 metros para delimitar un rectángulo. Si el rectángulo ha de tener un perímetro de 36 metros, ¿cuál debe ser el largo y el ancho para que el área del rectángulo sea máxima?

Ejercicio 4

Encontrar dos números reales tales que su suma sea 20 y su producto sea máximo.

Ejercicio 5

En una fábrica el costo total de producir q unidades de producto es:

$$CT(q) = 0{,}05.q^2 + 5.q + 500$$

¿Cuál debe ser el nivel de producción para que el <u>costo medio</u> sea mínimo?

Ejercicio 6

La empresa Cable TV tiene actualmente 2000 suscriptores que pagan una cuota mensual de \$350. Una encuesta reveló que tendrían 50 suscriptores más por cada \$ 5 de disminución en la cuota. ¿Cuál es la cuota de ingreso máximo y cuántos suscriptores se tendría entonces?

Ejercicio 7

Un artículo en una revista de Sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, en **t** años **n** miles de personas adultas recibirían beneficios directos, donde:

$$n = \frac{t^3}{3} - 6.t^2 + 32.t \qquad 0 \le t \le 12$$

¿Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

Ejercicio 8

La función de demanda de un mercado monopólico es p = 400 – 2.q, y la función del costo medio es CM(q) = 0,2.q +4 + (400/q).

a) Determinar el nivel de producción que maximiza la utilidad.
b) Determinar el precio al que ocurre la utilidad máxima.
c) Determinar la utilidad máxima.
d) Si como medida regulatoria, el gobierno impone un impuesto de \$22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio que maximiza la utilidad?
e) ¿Cuáles son las consecuencias del impuesto para el monopolista, los consumidores y el gobierno, si el precio se fija de forma de maximizar la utilidad?

13. ELASTICIDAD

Volvamos sobre la demanda como función del precio: q = f(p). La derivada de la función, $\frac{dq}{dp} = f'(p)$, nos permite saber, en cantidades absolutas, cómo variará aproximadamente la demanda ante una variación unitaria en el precio, por cuanto $f'(p_0)$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva f en el punto $p=p_0$. El diferencial $dq = f'(p).dp$ nos permite saber, en cantidades absolutas, cómo variará aproximadamente la demanda ante una variación "dp" en el precio. Pero las variaciones en cantidad proporcionan a veces información poco interesante: un aumento de $1 en el kilo de pan puede incidir en forma importante en la demanda de pan, mientras que el mismo aumento en el precio de una casa es insignificante (no mueve la demanda). Entonces, sería deseable disponer de un instrumento que permita conocer qué tan sensible es la demanda ante variaciones porcentuales de precio.

<u>Definición</u>: Elasticidad puntual de y respecto de x: $\varepsilon = \dfrac{dy/dx}{y/x}$.

Si se utiliza la notación y = f(x) entonces la elasticidad también puede definirse así:

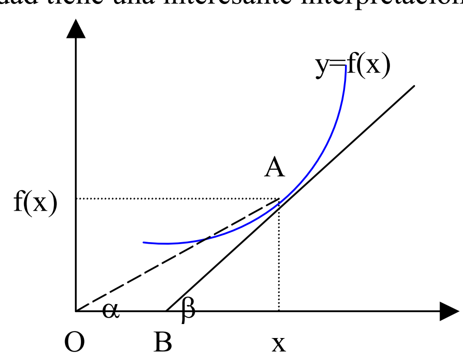
$$\varepsilon = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}$$

<u>Definición</u>: Se dice que f es *elástica* en el punto x si: $|\varepsilon| > 1$.
Se dice que f es *de elasticidad unitaria* en el punto x si: $|\varepsilon| = 1$.
Se dice que f es *inelástica* en el punto x si: $|\varepsilon| < 1$.

¿Qué significa que una función de demanda es inelástica en el punto $p=p_0$? Significa que en ese punto la variación porcentual de la cantidad demandada es menor, en valor absoluto, que la variación porcentual en el precio a partir de $p=p_0$.

$$q = f(p)\ es\ inelástica \Rightarrow \left|\frac{\frac{dq}{dp}}{\frac{q}{p}}\right| \prec 1 \Rightarrow \left|\frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}}\right| \prec 1 \Rightarrow \left|\frac{dq}{q}\right| \prec \left|\frac{dp}{p}\right|$$

La elasticidad tiene una interesante interpretación geométrica.



$$tg\alpha = f'(x)$$

$$tg\beta = \frac{f(x)}{x}$$

$$En\ con\sec uencia: \varepsilon = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{tg\alpha}{tg\beta}$$

La elasticidad depende entonces de la relación entre los ángulos que determinan con el eje Ox: la tangente en el punto x a la curva y = f(x) (recta AB) y la cuerda que une el punto A con el origen de coordenadas. Por ejemplo, la elasticidad es unitaria en un punto de la curva donde $|tg\ \alpha|=|tg\ \beta|$. En el gráfico precedente (donde la curva f es creciente), la igualdad se cumple en un punto x donde la tangente a la curva pasa por el origen de coordenadas. Si la curva f es decreciente, se tiene elasticidad unitaria en un punto donde $\alpha + \beta = 180º$.

Repartido Práctico 13: Elasticidad

Ejercicio 1

Sea la función f: $f(x) = \alpha.x^{\beta}$. Probar que la elasticidad puntual de f es igual a β $\forall$ x. (Si la función f es una potencia de x, entonces la elasticidad es igual al exponente).

Ejercicio 2

Sea f: $f(x) = C \neq 0$. Calcular la elasticidad puntual de f $\forall$ x. Interpretar el resultado obtenido en el caso que f sea una función de demanda.

Ejercicio 3

Sea f: $f(x) = \sqrt{x}$. Calcular la elasticidad puntual de f $\forall$ $x > 0$.

Ejercicio 4

Sea la función de demanda: $q = f(p) = 1000/p^2$

a) Hallar la elasticidad puntual de la demanda.
b) ¿Depende la elasticidad del nivel del precio en este caso?
c) ¿Cuál sería el cambio relativo aproximado en la demanda si el precio p aumenta un 10 %?

Ejercicio 5

Sea la función de demanda: $q = f(p) = 500/(p+2)$

a) Hallar la elasticidad puntual de la demanda.
b) ¿Existe algún nivel de precio para el cual la elasticidad es unitaria?
c) ¿Cuál sería el cambio relativo aproximado en la demanda si el precio p aumenta un 10 %?

Ejercicio 6

Sea la función de demanda: $q = \sqrt{2.400 - p}$.

a) ¿Para qué valores del precio la demanda es elástica?
b) ¿Qué pasa con la variación relativa en la demanda si el precio es 1.600 y se desea incrementarlo un 20%?

Ejercicio 7

Si la función de demanda es $q = K/p^n$, demostrar que la elasticidad de la demanda depende sólo de n.

Ejercicio 8

Un fabricante de bicicletas puede vender actualmente 500 por mes a un precio de \$ 800 cada una. Si el precio se baja a \$ 750, podrían venderse 50 bicicletas adicionales por mes. Estimar la elasticidad de la demanda para el precio actual.

Ejercicio 9

Si q(p) es una función de demanda con relación al precio de un producto, entonces el ingreso del productor al vender q unidades al precio p es: $Y(p) = p.q(p)$. Si denominamos ε_q a la elasticidad de la demanda con relación al precio, y ε_y a la elasticidad del ingreso con respecto al precio, probar que se cumple que: $\varepsilon_y = 1 + \varepsilon_q$.

14. PRIMITIVAS. INTEGRALES INDEFINIDAS

Ya hemos visto cómo, a partir de las funciones elementales, es posible definir nuevas funciones mediante las operaciones algebraicas, la inversa o la composición de funciones. También mediante la derivación es posible obtener nuevas funciones.

Una propiedad importante de la derivación es que, dada una función, la función derivada, si existe es única.

Nos preguntamos ahora si es posible encontrar nuevas funciones mediante la operación contraria a la derivación, llamada *primitivación*. Por ejemplo, la función derivada de f: $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2.x$. ¿Existe alguna función tal que su derivada es x^2? Una respuesta posible es: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Efectivamente, la derivada de esta función es $F'(x) = x^2$. Se dice que $F(x) = \frac{x^3}{3}$ es una *primitiva* de $f(x) = x^2$. Se plantean entonces cuatro preguntas relevantes.

a) Dada una función, ¿siempre existe una primitiva?
b) La primitiva de una función, ¿es única?
c) Supuesto que existe una primitiva de una función, ¿siempre se puede calcular?
d) ¿Existen métodos generales de primitivación?

Respuesta de la primera pregunta: si una función es continua en su dominio, entonces siempre existe primitiva de la función. De las funciones no continuas no puede afirmarse nada en general.

Respuesta de la segunda pregunta: si una función admite una primitiva, entonces tiene infinitas primitivas. En otras palabras, no se puede hablar de "la" primitiva, porque ésta no es única. En el ejemplo precedente, $\frac{x^3}{3}$, $(\frac{x^3}{3} + 2)$ y $(\frac{x^3}{3} - 8)$ son tres primitivas distintas de la función x^2.

Si una función admite infinitas primitivas, ¿existe alguna relación entre todas ellas? La respuesta es afirmativa y viene dada por el siguiente teorema.

<u>Teorema</u>: Si dos funciones son primitivas de una misma función, entonces son iguales o difieren en una constante.

$$\left.\begin{array}{l} Si\ \ F'(x) = f(x) \\ y\ \ G'(x) = f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow F(x) = G(x) + C$$

En otras palabras, las infinitas primitivas de una función se obtienen a partir de una de ellas, sumándole una constante cualquiera.

<u>Definición</u>: Se llama *integral indefinida de la función f* (notación: $\int f(x)dx$) al conjunto de primitivas de la función f.

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C: F'(x) = f(x) \text{ y } C \in R\}$$

El símbolo $\int$ se utiliza para indicar una integral, la función f se denomina *integrando*, y el símbolo dx se utiliza para indicar cuál es la variable de primitivación (esto es especialmente importante cuando se trabaja con varias variables).

Ejemplo: Hallar $\int\left(2.x - e^x + \frac{1}{x}\right)dx$

$$\int\left(2.x - e^x + \frac{1}{x}\right)dx = \{x^2 - e^x + L|x| + C, C \in R\}$$

Respuesta de la tercera pregunta: no siempre es posible calcular primitivas en forma explícita. Por ejemplo: e^{x^2} admite una primitiva (porque es una función continua) pero no es posible expresarla mediante un número finito de funciones elementales.

Respuesta de la cuarta pregunta: existen métodos generales de primitivación. Además de la primitivación "inmediata" (que consiste en mirar una tabla de derivadas "al revés"), y de observar que para primitivar una suma alcanza con obtener primitivas de los sumandos, los métodos más conocidos son: integración por partes, integración por sustitución y descomposición en fracciones simples. En aplicación de estos métodos se obtienen unos cuántos resultados interesantes que se presentan en las conocidas *tablas de integrales*.

Supongamos que las funciones que aparecen en el integrando, en los siguientes casos, son funciones derivables (y por tanto, continuas).

Método de integración por partes

$$\boxed{\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx}$$

El método es útil cuando hallar una primitiva de f '(x).g(x) es más sencillo que hallar una primitiva de f(x).g'(x).

Ejemplo: $\int x.e^x dx = x.e^x - \int 1.e^x dx = x.e^x - (e^x + C)$
En este caso hemos tomado $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$.

Integración por sustitución

$$\boxed{\int f[u(x)].u'(x)dx = \int f(u)du}$$

Ejemplo: $\int (x^3+1)^6.(3.x^2)dx = \left]\begin{matrix} u(x) = x^3+1 \\ u'(x) = 3.x^2 \end{matrix}\right[= \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + C = \frac{(x^3+1)^7}{7} + C$

En el primer paso se hace el cambio de variable $u = u(x)$, y en el último paso se "deshace" el cambio de variable.

Descomposición en fracciones simples

Sea f una fracción algebraica que sólo tiene raíces reales en el denominador (el resultado, con variantes, es también aplicable cuando las raíces del denominador son complejas). Entonces, la fracción algebraica se puede descomponer en la suma algebraica de fracciones de la forma $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$ donde m es un número natural mayor o igual que 1 y α es una de las raíces del denominador. Como una primitiva de una suma se puede obtener sumando primitivas de los sumandos, hallar la integral indefinida de una fracción algebraica (con raíces reales en el denominador) se resuelve hallando primitivas de fracciones de la forma $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$. Sólo dos casos son interesantes:

- Si m = 1: $\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A.L|x-\alpha| + C$

- Si m > 1: $\int \frac{A}{(x-\alpha)^m} = \int A.(x-\alpha)^{-m}dx = \frac{A}{m-1}.\frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} + C$

El método de descomposición en fracciones simples permite calcular los coeficientes "A", como en el ejemplo que sigue.

Ejemplo: Hallar $\int \frac{x}{x^2-1}dx$.

$$\int \frac{x}{x^2-1}dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}\right)dx = \int \left(\frac{1/2}{x-1} + \frac{1/2}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}.L|x-1| + \frac{1}{2}.L|x+1| + C$$

¿De dónde surge que A = B = 1/2? De resolver la identidad de fracciones algebraicas:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{x}{x^2-1}$$
$$\frac{A.(x+1) + B.(x-1)}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$
$$\frac{(A+B).x + (A-B)}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$
$$\begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$$

Las tablas de integrales indefinidas proporcionan muchos más ejemplos de aplicación de los métodos precedentes. Incluso la tabla de derivadas puede ser utilizada para calcular integrales leyéndola "al revés", esto es, buscando en la columna de la derecha la función que se quiere primitivar.

Ejemplo: Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Mirando la columna de la derecha de la tabla de derivadas se encuentra la función $\frac{1}{2.\sqrt{x}}$, que es la derivada de $\sqrt{x}$. Digamos que nos está "sobrando" el factor 2 en el denominador. Entonces, $2.\sqrt{x}$ es una primitiva de $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left\{2.\sqrt{x} + C\right\}$$

Repartido Práctico 14: Integrales Indefinidas

Ejercicio 1

Calcular las siguientes integrales.

$a)\int 3dx$ $\quad b)\int 2xdx$ $\quad c)\int (3x-2)dx$ $\quad d)\int (4y^2-3y+2)dy$ $\quad e)\int (2q^4-3q^{-2})dq$

$f)\int \sqrt[3]{x}dx$ $\quad g)\int \frac{dx}{x^2}$ $\quad h)\int (x+2)^3 dx$ $\quad i)\int 3x^2(x^3+2)dx$ $\quad j)\int \frac{4dy}{y}$

$k)\int x.e^{x^2}dx$ $\quad l)\int \frac{dp}{p+2}$ $\quad m)\int (e^x-e^{-2x})dx$ $\quad n)\int |x|dx$ $\quad o)\int (\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})dt$

Ejercicio 2

Calcular las siguientes integrales.

$a)\int x^2.e^{2.x}dx$

$b)\int x.Lx\, dx$

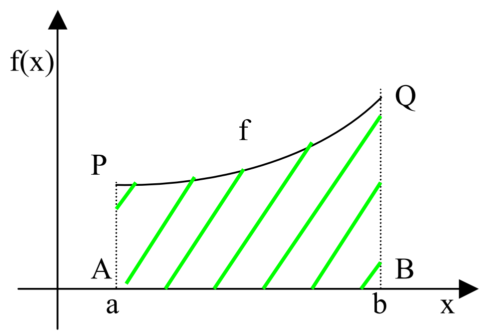
$c)\int 2.x.e^{x^2}dx$

$d)\int x^4.(x^5-1)^6 dx$

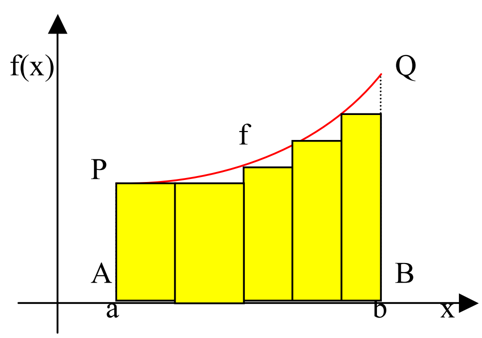
$e)\int \frac{2}{x^2-4}dx$

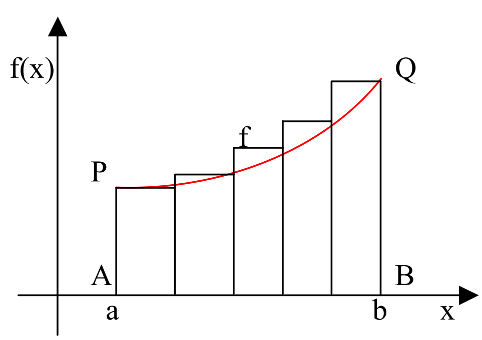
15. INTEGRALES DEFINIDAS. INTEGRALES IMPROPIAS

Vamos a introducir el concepto de *integral definida en un intervalo* (notación: $\int_a^b f(x)dx$) a partir de su interpretación geométrica. Sea f una función continua en el intervalo [a, b]. Para facilitar la interpretación, supongamos que f(x) ≥ 0 en dicho intervalo.



Consideremos la figura del plano ABQP delimitada por las rectas y = 0, x = a, x = b y la función f. Dicha figura se denomina *trapezoide*. Si la función f fuera una recta, entonces el trapezoide sería un trapecio birrectángulo. Nos interesa calcular el área del trapezoide. Se obtienen dos aproximaciones de este número si partimos el intervalo [a, b] en subintervalos, calculamos en cada uno de ellos el mínimo y el máximo de la función f [2], y luego calculamos la suma de las áreas de los rectángulos inferiores por un lado, y de los rectángulos superiores, por otro lado.





[2] La existencia del mínimo y el máximo en cada subintervalo queda asegurada por el teorema de Weierstrass.

Es claro que una aproximación es por defecto (suma de rectángulos inferiores) y otra por exceso (suma de rectángulos superiores). Si denominamos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ a los puntos en que se ha dividido al intervalo [a, b], entonces $x_i - x_{i-1}$ representa la base del i-ésimo rectángulo. Si denominamos m_i y M_i al mínimo y máximo de la función f en el i-ésimo intervalo, entonces las aproximaciones por defecto y por exceso del área del trapezoide se pueden formular así:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i.(x_i - x_{i-1}) \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i.(x_i - x_{i-1})$$

denominadas *sumas inferiores y sumas superiores* respectivamente.

¿Cómo se pueden obtener buenas aproximaciones? Parece bastante evidente que se obtienen mejores aproximaciones cuando aumenta el número de subintervalos.

¿Qué ocurre si el número de subintervalos (n) tiende a infinito? Se puede demostrar en ciertas condiciones que:

$$\text{lím } s_n = \text{lím } S_n = \text{Área del trapezoide}$$

Dicho límite se denomina *integral definida de la función en el intervalo* [a, b] y se simboliza $\int_a^b f(x)dx$, donde:

- f es el integrando
- a es el límite inferior de integración
- b es el límite superior de integración
- dx indica cuál es la variable de integración

El cálculo de $\int_a^b f(x)dx$ mediante el paso al límite de s_n o de S_n resulta bastante engorroso. Necesitamos una herramienta más sencilla para el cálculo de integrales definidas. Dichas herramientas las proporcionan los conceptos y teoremas que siguen a continuación.

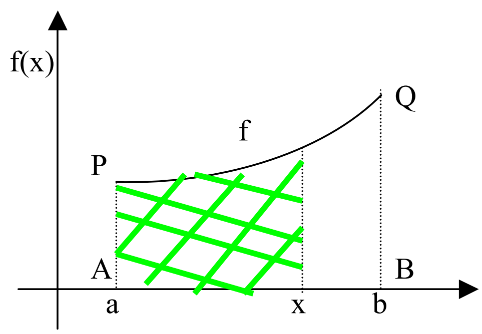
Observaciones

1. ¿Qué diferencias hay entre $\int f(x)dx$ y $\int_a^b f(x)dx$? El primer símbolo representa el conjunto de primitivas de la función f, es decir, es un conjunto de funciones. El segundo símbolo corresponde a un número, que tiene una interpretación geométrica en términos del área de un trapezoide si a < b y f es no negativa.
2. ¿Qué diferencias hay entre $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b f(t)dt$? No hay ninguna diferencia, ambas expresiones representan el mismo número, que es el área del trapezoide. Esto es válido, por ahora, si a < b y $f \geq 0$. Pero como veremos más adelante, también es válido para a, b y f cualesquiera. Como el valor de la integral no depende de la variable de integración, se dice que ésta es "muda".

3. Si hacemos variar el límite superior de integración, en el intervalo donde el integrando es una función continua, podemos definir una nueva función, denominada *función integral*:

$$F: \; x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad \text{con dominio en } [a, b]$$

Desde el punto de vista geométrico, ¿quiénes son F(x), F(a) y F(b)? F(b) es el área del trapezoide, F(a) = 0 y F(x) proporciona el área del trapezoide en el intervalo [a, x].



Teorema Fundamental

H) f continua en [a, b]

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$

T) $F'(x) = f(x) \;\; \forall\, x \in [a, b]$

¿Qué es lo que afirma el teorema? Que si el integrando es una función continua en [a, b], entonces la función integral F es una primitiva del integrando, pues F'(x) = f(x).

Entonces, el Teorema Fundamental proporciona un método para calcular áreas en forma exacta. Si podemos encontrar F, el área del trapezoide viene dada por F(b).

F es una primitiva muy especial: la que hace que F(a) = 0. Nos preguntamos si para calcular $\int_a^b f(x)dx$ se puede utilizar una primitiva cualquiera de f. La respuesta es afirmativa.

Regla de Barrow (teorema)

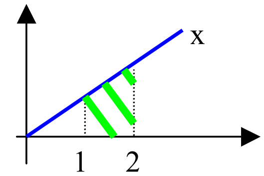
H) f continua en [a, b]

G es una primitiva cualquiera de f

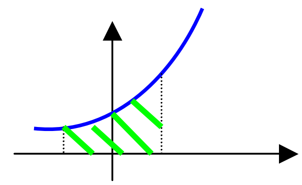
T) $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$.

Este teorema resuelve el problema del cálculo del área del trapezoide en forma exacta. Para ello, alcanza con encontrar una primitiva cualquiera de f, evaluarla en x = a y x = b, y restar ambos valores: $G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$.

Ejemplo: $\int_1^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

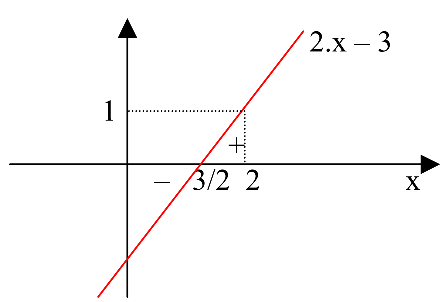


Ejemplo: $\int_{-1}^{1} e^x\,dx = e^x\Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} \cong 2{,}35$



Ejemplo: $\int_0^2 (2.x - 3)dx = \left[x^2 - 3.x\right]_0^2 = 4 - 6 = -2$

¿Es posible que el área de un trapezoide sea negativa? No, no es posible. Porque por definición, el área de una figura es mayor o igual que cero. Entonces, ¿por qué $\int_0^2 (2.x - 3)dx$ tiene resultado negativo? Porque el integrando no es una función positiva, y en consecuencia, la interpretación geométrica de la integral no es el área de un trapezoide. En el intervalo [0, 3/2] la función f(x) = 2.x – 3 es negativa y el área del trapezoide en [0, 3/2] es $\frac{3x\,{}^3\!/_2}{2} = \frac{9}{4}$ (porque el trapezoide es un triángulo). En el intervalo [3/2, 2] la función f(x) = 2.x – 3 es positiva y el área del trapezoide (también un triángulo) en dicho intervalo es $\frac{{}^1\!/_2\,x1}{2} = \frac{1}{4}$. El área del trapezoide en [0, 2] es 10/4. ¿Qué interpretación puede darse al resultado $\int_0^2 (2.x - 3)dx$ = - 2? Si se admite poner signo positivo o negativo al área del trapezoide, según que la función f se dibuje por encima o por debajo del eje Ox, entonces el área del trapezoide del ejemplo sería ¼ - 9/4 = - 2.

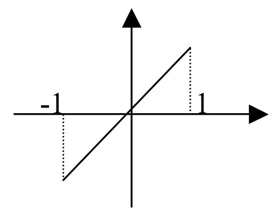


Observaciones

1. $\int_a^b f(x)dx$ es un número que representa el área de un trapezoide si $a < b$ y $f(x) \geq 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx$ se puede definir para a, b y f cualesquiera, pero si $a > b$, entonces no hay una interpretación geométrica interesante. Si $a < b$ y $f(x) \leq 0$ en [a, b], entonces $-\int_a^b f(x)dx$ proporciona el área del trapezoide que se dibuja por debajo del eje Ox. Finalmente, si $a < b$ y la función cambia de signo (una o más veces) en el intervalo [a, b] entonces $\int_a^b f(x)dx$ es un número que representa la resta de áreas de trapezoides definidos en subintervalos del [a, b], con signo positivo cuando $f(x) \geq 0$ en el subintervalo y con signo negativo cuando $f(x) \leq 0$. Por este motivo, $\int_a^b f(x)dx$ puede tomar valores negativos o incluso anularse aunque f(x) no sea la función nula.

Ejemplo: $\int_{-1}^{3}(x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{3} = \left[\frac{9}{2} - 3\right] - \left[\frac{1}{2} - (-1)\right] = 0$



Propiedades de la integral definida

1. $\int_a^b 0\, dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. Si f es continua en $[\alpha, \beta]$ y $a, b, c \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

Si $f \geq 0$ y $a < c < b$, entonces esta propiedad tiene una fácil interpretación geométrica: cada una de las integrales representa el área de un trapezoide, las dos últimas como resultado de partir el intervalo [a, b] en los subintervalos [a, c] y [c, b]. Sin embargo, la propiedad es más general: se cumple no importa el signo de f y no importa la posición relativa de a, b y c.

4. $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

5. $\int_a^b K.f = K.\int_a^b f$

La propiedad 3 se conoce como Teorema de Chasles y las 4 y 5 se conocen como propiedades de linealidad.

Para calcular integrales definidas en un intervalo se utilizan los métodos de integración indefinida. Porque de acuerdo con la Regla de Barrow alcanza con hallar una primitiva del integrando para resolver el problema. A continuación se presentan algunos ejemplos de aplicación de los métodos de integración indefinida: primitivación inmediata (tabla de integrales o tabla de derivadas), integración por sustitución, integración por partes, descomposición en fracciones simples.

Ejemplos

a) $\int_{-1}^{1} 2.x^2 dx = 2.\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

b) $\int_{1}^{3} \frac{5}{x^3}\, dx = \int_{1}^{3} 5.x^{-3} dx = 5.\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_{1}^{3} = \frac{-5}{2.x^2}\Big|_{1}^{3} = \frac{-5}{18} - \left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{20}{9}$

c) $\int_{0}^{1} \frac{2.x}{4+x^2} dx = \left]\begin{array}{c} 4+x^2 = u \\ 2.x.dx = du \\ x = 0 \Rightarrow u = 4 \\ x = 1 \Rightarrow u = 5 \end{array}\right[= \int_{4}^{5} \frac{du}{u} = Lu\Big|_{4}^{5} = L5 - L4 = L\frac{5}{4}$

Obsérvese que para calcular una integral definida utilizando integración por sustitución, no es necesario “deshacer” el cambio de variable.

d)

$$\int_{0}^{1/\sqrt{2}} x.\sqrt{1-x^2}\, dx = \left]\begin{array}{c} 1-x^2 = u \\ -2.x.dx = du \\ x.dx = -\frac{du}{2} \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1/\sqrt{2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \end{array}\right[= \int_{1}^{1/2} \sqrt{u}.(-\frac{du}{2}) = -\frac{1}{2}.\int_{1}^{1/2} u^{1/2} du = \frac{1}{2}.\frac{u^{3/2}}{3/2}\Big|_{1/2}^{1} \cong 0{,}215$$

e)

$$\int_{0}^{2} x^2.e^{2.x} dx = x^2.\frac{e^{2.x}}{2}\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} (x^2)'.\frac{e^{2.x}}{2} dx = 2.e^4 - \int_{0}^{2} x.e^{2.x} dx = 2.e^4 - \left[x.\frac{e^{2.x}}{2}\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2} \frac{e^{2.x}}{2} dx\right] =$$

$$= \frac{5}{4}.e^4 - \frac{1}{4}$$

f) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x-2).(x-3)} = \int_{0}^{1} \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\right) dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right) dx = -L|x-2| + L|x-3|\Big|_{0}^{1} =$

= -L1 + L2 – (-L2 + L3) = 2.L2 – L3 = L4 – L3 = L(4/3) ≈ 0,288.

Cálculo de áreas comprendidas entre dos curvas

Se quiere calcular el área comprendida entre dos funciones en el intervalo [a, b], como en la figura A.

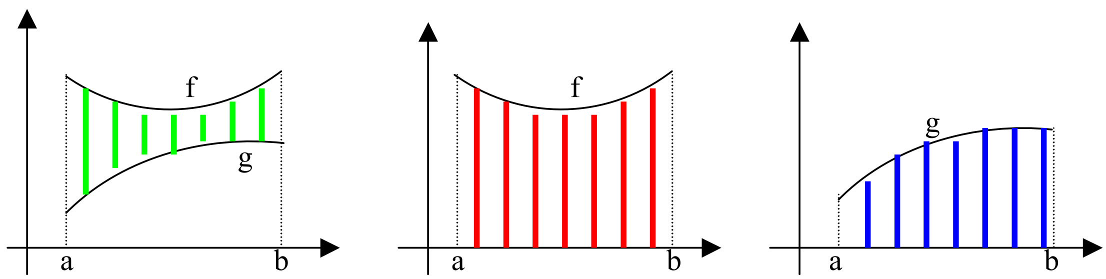
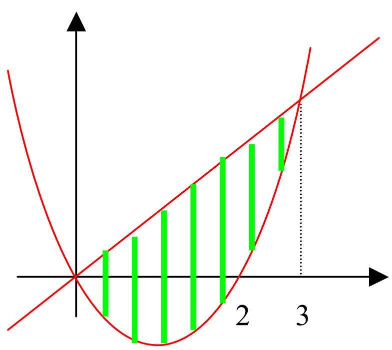


FIGURA A FIGURA B FIGURA C

El área de la figura A se puede calcular como diferencia de las áreas de los trapezoides de las figuras B y C, las cuales pueden calcularse mediante $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ respectivamente. Entonces, el área de la figura A es: $\int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$.

Ejemplo: Hallar el área comprendida entre la parábola de ecuación $y = x^2 - 2.x$, y la recta $y = x$.



Las abcisas de los puntos de corte de ambas curvas se obtienen resolviendo la ecuación: $x^2 - 2.x = x$. Dichas abcisas son $x = 0$ y $x = 3$. Entonces, el área comprendida entre ambas curvas es:

$$\int_0^3 \left[x - \left(x^2 - 2.x\right)\right] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3.\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

Aplicación de las integrales a problemas de Economía

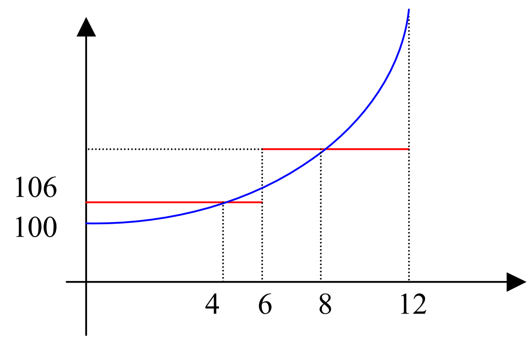
A) Ganancia o pérdida de salario real

Supongamos que en el año 2003 los salarios promedio se incrementaron un 5% al inicio de cada semestre, permaneciendo constantes en los restantes meses del año, mientras que los precios del consumo crecieron continuamente a una tasa instantánea del 1,4567227% mensual. El salario promedio de diciembre de 2002 permitía comprar exactamente una canasta de consumo (valor 100). ¿Cuál fue la ganancia o pérdida de salario real den 2003?

Tanto precios como salarios varían a lo largo del tiempo. Tomamos el tiempo (t) como variable independiente. Entonces, la evolución temporal de precios (P_t) y salarios (S_t) se puede modelar mediante las siguientes expresiones:

$$S_t = \begin{cases} 100 \ \ en \ \ diciembre \ \ de \ \ 2002 \\ 106 \ \ si \ \ t \in [0, 6) \\ 112{,}36 \ \ si \ \ t \in [6, 12) \end{cases}$$

$$P_t = 100.e^{0{,}014567227.t} \quad si \ \ t \in [0, 12]$$



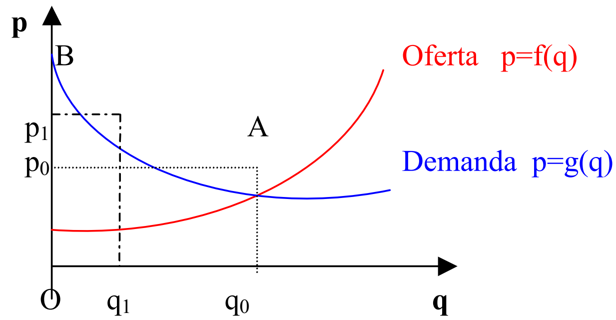
El gráfico de los salarios se denomina *dientes de sierra* porque los salarios crecen a saltos. El gráfico de los precios al consumo se modelan mediante una curva exponencial. Los puntos de corte de ambos gráficos se obtienen como solución de las ecuaciones: $106 = 100.e^{0{,}014567227.t}$ y $112{,}36 = 100.e^{0{,}014567227.t}$. Las abcisas de estos puntos de corte son $t = 4$ y $t = 8$. Se observa que en el intervalo [0, 4] los salarios se mantienen por encima del costo de la canasta de consumo, por lo que en ese período se verifica una "ganancia" del salario real. La situación se invierte en el período [4, 6], pues los precios superan a los salarios. En este intervalo se produce una "pérdida" de salario real. La situación se reproduce en el semestre siguiente en los intervalos [6, 8] y [8, 12]. La ganancia o pérdida de salario real se mide por el área comprendida entre las curvas de salarios y precios. Pero lo interesante es que la ganancia puede identificarse con la integral definida en el intervalo en que los salarios superan a los precios y la pérdida con la integral definida en el intervalo donde los precios superan a los salarios.

Si interesa calcular la ganancia o pérdida en cada intervalo, entonces la solución consiste en calcular las integrales: $\int_0^4 (S_t - P_t)dt, \int_4^6 (P_t - S_t)dt, \int_6^8 (S_t - P_t)dt \ y \int_8^{12} (P_t - S_t)dt.$ Pero si lo que interesa calcular es la ganancia o pérdida en el año 2003, entonces el problema es más sencillo y se resuelve sumando las áreas "positivas" y "negativas" que determinan ambas curvas al restar $S_t - P_t$. El signo indicará si en el año hubo ganancia o pérdida de salario real:

$$\int_0^{12} (S_t - P_t)\, dt = \int_0^6 \left(106 - 100.e^{0{,}014567227.t}\right) dt + \int_6^{12} \left(112{,}36 - 100.e^{0{,}014567227.t}\right) dt = \ldots = -1{,}1\,.$$

El resultado obtenido se interpreta así: en el año 2003 los asalariados perdieron poder de compra por un equivalente del 1,1% del salario mensual (en promedio perdieron un 0,09% por mes).

B) Excedente de productores y consumidores



El gráfico precedente muestra las curvas de oferta y demanda, explicitando el precio **p** de un producto en función de la cantidad **q** (a suministrar o a comprar, respectivamente). La curva de oferta indica el precio al que el fabricante está dispuesto a vender **q** unidades de producto. La curva de demanda muestra el precio al que los consumidores comprarán **q** unidades. El punto A de intersección de ambas curvas se llama *punto de equilibrio* e indica el precio a cual los consumidores comprarán la misma cantidad de producto que los fabricantes desean vender a dicho precio. Hay consumidores que estarían dispuestos a pagar un precio más alto, $p_1 > p_0$, pero demandarían menos unidades (q_1). Estos consumidores se benefician de un precio de equilibrio menor que p_1. Para estos consumidores el beneficio es $(p_1 - p_0).q_1$. Pero este razonamiento es válido para cualquier valor de p en el intervalo $[B, p_0)$, para cualquier valor de q entre O y q_0. Si los valores de q fueran numerables, entonces el beneficio total de los consumidores sería $\sum_{q=0}^{q_0}(p - p_0).q$. Si q es una variable continua, entonces:

$$\textbf{Excedente de los consumidores} = \int_0^{q_0}[g(q) - p_0]dq$$

que no es otra cosa que el área delimitada por el eje Op, la curva de demanda y la recta $p = p_0$.

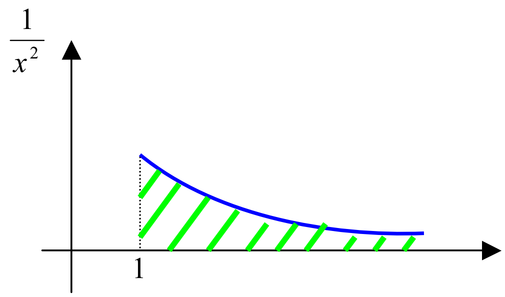
Mediante un razonamiento análogo se obtiene:

$$\textbf{Excedente de los productores} = \int_0^{q_0}[p_0 - f(q)]dq$$

que representa el área delimitada por el eje Op, la curva de oferta y la recta $p = p_0$.

Integrales impropias de primera especie

Nos planteamos ahora si será posible hallar el área de una figura infinita del plano, similar al trapezoide. Se trata de calcular el área de la figura comprendida entre el eje Ox, la recta x = 1 y la función f: f(x) = $\frac{1}{x^2}$, o sea, el área del trapezoide en el intervalo [1, +∞].



Podría pensarse que el área de una figura infinita debería ser también infinita. Sin embargo, a veces, ocurre que el área es finita. El método que vamos a utilizar para calcular $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ consiste en definir la función integral $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ y luego calcular el límite de F(t) cuando $t \to +\infty$.

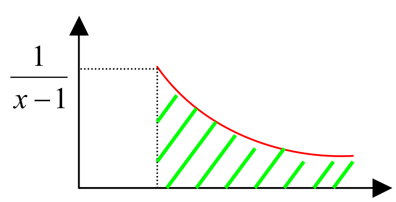
Ejemplo 1: Calcular $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^t = 1 - \frac{1}{t} \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$$

Ejemplo 2: Calcular $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$

$$F(t) = \int_2^t \frac{dx}{x-1} = L|x-1|\Big|_2^t = L|t-1| - L1 = L|t-1| = L(t-1) \quad pues \ \ t \geq 2$$

$$\lim_{t \to +\infty} F(t) = \lim_{t \to +\infty} L(t-1) = +\infty$$

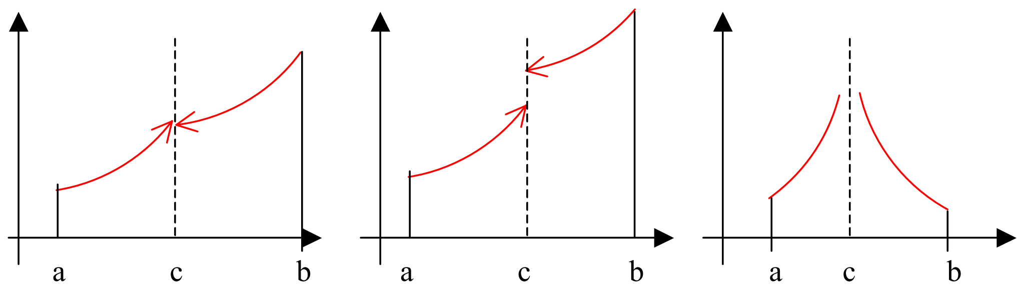


En este caso el área del trapezoide tiende a infinito, y ello se debe a que el infinitésimo $\frac{1}{x-1}$ tiende muy lentamente a cero.

Cuando el Lím F(t), con $t \to +\infty$, tiende a un número finito, se dice que la integral impropia *converge*. Cuando dicho límite es infinito, se dice que la integral *diverge* o que *no converge*.

Integrales definidas de funciones no continuas

CASO 1 CASO 2 CASO 3



Cuando en un punto x = c del intervalo [a, b] se tiene una discontinuidad de la función f, evitable, con salto finito o infinito, entonces la integral $\int_a^b f$ se puede plantear como una suma, $\int_a^c f + \int_c^b f$, y el resultado se obtiene haciendo $\lim\limits_{t\to c^-} \int_a^t f$ y $\lim\limits_{t\to c^+} \int_t^b f$. Si ambos límites existen y son finitos, entonces $\int_a^b f$ *converge* a la suma de ambos límites. Si uno al menos de los límites tiende a infinito, entonces se dice que la integral *no converge*. Si existen ambos límites y la suma tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, se dice que la integral *diverge*.

Ejemplo: Calcular $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$. Observar que la función presenta una discontinuidad en el punto x = 0. Entonces hay que estudiar las integrales $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}$ y $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

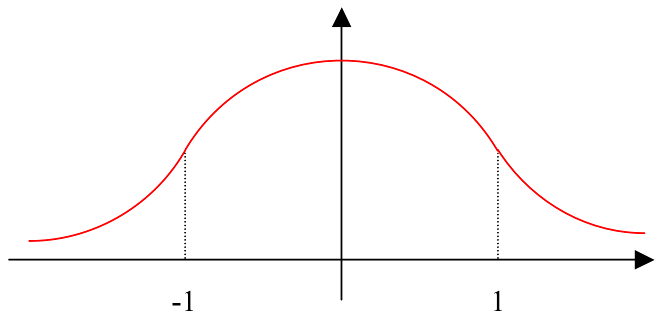
$$\lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} \frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to 0^-} \left. -\frac{1}{x} \right|_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-} (-1 - \frac{1}{t}) = +\infty$$

Con el mismo argumento se prueba que la integral $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$ diverge a $+\infty$. En consecuencia, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ también diverge a $+\infty$.

En Econometría, en Modelos Lineales, un supuesto bastante frecuente es que los residuos del modelo se distribuyen normales. Sin entrar en mayores detalles sobre el significado del concepto estadístico de "distribución", presentamos a continuación la *función de densidad normal estándar*:

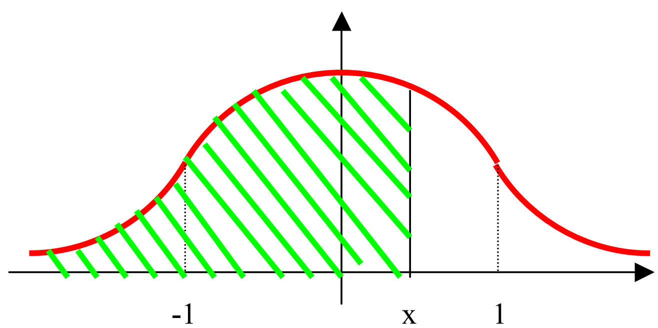
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Esta función tiene un gráfico con forma de campana, y se conoce en la literatura estadística como *campana de Gauss*.



Se define la *función de distribución normal estándar* mediante la fórmula:

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, que para cada valor de x proporciona el área del trapezoide limitado por el eje Ox, la curva f y la recta paralela al eje Oy en la abcisa x.



El problema es que no es posible calcular una primitiva de la función f. Por ello, para calcular $\Phi(x)$ se utiliza una tabla que proporciona una aproximación con 4 decimales del área acumulada en el intervalo $(-\infty, x)$. La tabla proporciona una aproximación para cada valor centesimal de x en el intervalo [-3,5; +3,5], pues a la izquierda de -3,5 y a la derecha de +3,5 la curva normal prácticamente se pega al eje Ox.

Algunos valores usuales de la tabla:

$\Phi(-1{,}96) = 0{,}025$	$\Phi(1{,}96) = 0{,}975$
$\Phi(-1{,}645) = 0{,}05$	$\Phi(2{,}326) = 0{,}99$
$\Phi(0) = 0{,}50$	$\Phi(2{,}576) = 0{,}995$
$\Phi(1{,}28) = 0{,}90$	$\Phi(3{,}090) = 0{,}999$
$\Phi(1{,}645) = 0{,}95$	$\Phi(3{,}291) = 0{,}9995$

Repartido Práctico 15: Integrales Definidas e Integrales Impropias

Ejercicio 1

Calcular las siguientes integrales. En la Práctica 14 ya se calcularon primitivas.

$a)\int_{0}^{3} 3dx \qquad b)\int_{-1}^{2} 2xdx \qquad c)\int_{0}^{4}(3x-2)dx \qquad d)\int_{1}^{3}(4y^2-3y+2)dy \qquad e)\int_{-2}^{-1}(2q^4-3q^{-2})dq$

$f)\int_{-1}^{1}\sqrt[3]{x}dx \qquad g)\int_{1/4}^{1/3}\frac{dx}{x^2} \qquad h)\int_{-1}^{1}(x+2)^3dx \qquad i)\int_{0}^{1}3x^2(x^3+2)dx \qquad j)\int_{5}^{9}\frac{4dy}{y}$

$k)\int_{1}^{2}x.e^{x^2}dx \qquad l)\int_{0}^{4}\frac{dp}{p+2} \qquad m)\int_{0}^{1}(e^x-e^{-2x})dx \qquad n)\int_{-1}^{2}|x|dx \qquad o)\int_{0}^{x}(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}})dt$

Ejercicio 2

Hallar el área del trapezoide formado por:

a) El eje Ox, las rectas x=1, x=3, y la función f(x) = 2.x.
b) El eje Ox, las rectas x=0, x=2, y la función f(x) = x^2.
c) El eje Ox, las rectas x=-1, x=1, y la función f(x) = x.

Ejercicio 3

Hallar el área comprendida entre el eje Ox y las curvas $f(x)=e^x$ y $g(x)=e^{-x}$.

Ejercicio 4

Dibujar las funciones integrando, calcular las integrales impropias e interpretar geométricamente.

$a)\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

$b)\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x}$

$c)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$

Ejercicio 5

Calcular las integrales impropias.

$a)\int_{0}^{+\infty}\frac{2xdx}{1+x^2}$

$b)\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^3+2}$

Repartido Práctico 15: Integrales Definidas e Integrales Impropias

Ejercicio 6

Sea la función de costo marginal de la producción $C'(q) = 0,2.q + 2$. Actualmente se producen 80 unidades por día.

a) Aproximadamente, ¿cuánto más costará producir 90 unidades por día?
b) Si el costo fijo diario de producción es 50 unidades monetarias, explicitar la función de producción $C(q)$.

Ejercicio 7

En el primer semestre del año 2002 la inflación en una ciudad evolucionó de acuerdo con la función: $I(t) = e^{0,02.t}$, donde t se mide en meses. En el mismo semestre el salario $S(t)$ permaneció constante durante los tres primeros meses y en el mes 4 se produjo un incremento del 11%, único del semestre.

a) Explicitar la función que muestra la evolución de los salarios en el semestre, partiendo de la condición $S(0) = 1$.
b) Hallar los puntos de intersección de $I(t)$ y $S(t)$ en el intervalo $[0, 6]$.
c) Los asalariados, ¿ganaron o perdieron salario real en el primer semestre de 2002?

Ejercicio 8

Las siguientes funciones corresponden a la demanda y la oferta de un producto, ambas expresadas como funciones de q:

Demanda: $p = (1/6).(12 - q)^2$
Oferta: $p = q^2/6$

a) Dibujar ambas curvas en un mismo gráfico.
b) Encontrar el punto de equilibrio: (q_0, p_0).
c) Calcular el excedente de los consumidores.
d) Calcular el excedente de los productores.

Ejercicio 9

Sea una población de preceptores de ingresos, ordenados en forma creciente, por su nivel de ingresos. Sea la variable **p** que mide la proporción de preceptores, $0 \leq p \leq 1$, y sea $Y(p)$ la proporción de ingresos acumulados hasta el punto p: $0 \leq Y(p) \leq 1$.

a) Demostrar que: $Y(p) \leq p, \ \forall p$.
b) Se define el Índice Sintético de Gini como: $G = 2.\int_0^1 [p - Y(p)]dp$.
c) Dibujar $Y(p) = \frac{8}{9}p^2 + \frac{p}{9}$ y calcular G.

16. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

El ahorro mensual de una familia (A) es una función de dos variables: el ingreso mensual (Y) y el gasto mensual (G). Además, se conoce la forma funcional, la forma en que se relacionan estas variables:

$$A = f(Y, G) = Y - G$$

La demanda de un bien depende del precio del bien en el mercado, del nivel de ingreso de los consumidores, de las preferencias de los consumidores, de los precios de los bienes sustitutivos (aceite de oliva y aceite de girasol) y de los precios de los bienes complementarios (automóvil y combustible), entre otras variables.

Diferentes teorías económicas hacen depender el nivel de desempleo (D) de variables como el salario real (S), el nivel de actividad (Y), el tamaño de la población (P), la edad en que la gente empieza a buscar empleo (E), el comportamiento de la migración (M) y una tasa de desempleo friccional (D_F), entre otras variables. Entonces, el nivel de desempleo puede expresarse así:

$$D = f(S, Y, P, E, M, D_F)$$

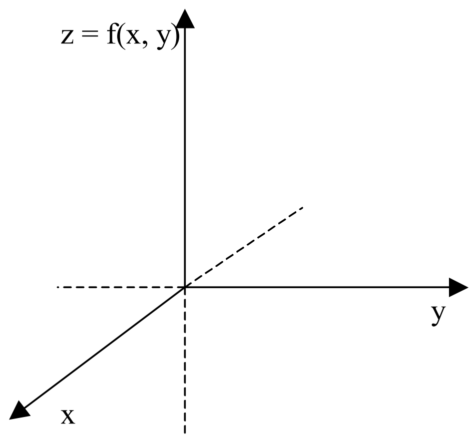
Sin embargo, la forma en que se relacionan estas variables para explicar el nivel de desempleo –el *modelo explicativo*– depende de la teoría económica que se elija.

En Economía interesa conocer la forma en que se relacionan diferentes variables y el efecto o la repercusión que tiene un cambio (un incremento, una variación) en una variable sobre otra u otras. Por ejemplo, podría esperarse que un aumento en el nivel de actividad generara una reducción en el nivel de desempleo. ¿Cuánto debería aumentar el nivel de actividad para que el desempleo se redujera un 1%?

En Economía es muy difícil encontrar que el comportamiento de una variable se explique exclusivamente por una sola variable. Es decir, las relaciones del tipo $y = f(x)$ son muy poco frecuentes. ¿Acaso el gasto de los hogares no puede explicarse exclusivamente por el ingreso familiar? La respuesta es claramente negativa: el gasto se explica por el ingreso actual, por la propensión a ahorrar, por el stock de capital acumulado y por los ingresos esperados (las expectativas de ingresos futuros), entre otras variables. En consecuencia, se hace imprescindible el estudio de las relaciones del tipo $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots , x_k)$.

La mayor parte de las complicaciones para el estudio de funciones de varias variables se generan al pasar de una a dos, es decir, al pasar de las relaciones del tipo $y = f(x)$ a las del tipo $z = f(x, y)$. Entonces, los principales resultados se presentarán para el caso de dos variables, y por excepción, se hará referencia al caso más general. En particular, cuando se trabaja con funciones que dependen sólo de dos variables, es posible imaginar una representación gráfica en tres dimensiones, mientras que no hay representación gráfica posible cuando la relación incluye más de dos variables.

En la representación gráfica de tres dimensiones, los planos xy, xz, zy, forman un “triedro” con 8 “octantes”, en uno de los cuales se cumple a la vez que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.



<u>Definición</u>: Una función f en las variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ con dominio D(f) es una correspondencia que a cada punto $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k) \in D(f)$ le asigna un número real que simbolizamos $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k)$.

En el caso de dos variables, usaremos la notación $z = f(x, y)$, donde z es el <u>valor</u> de la función f en el punto (x, y).

Ejemplo[1]: El interés I generado por un capital C colocado por t períodos a la tasa de interés compuesto i es una función de las tres variables: $I = f(C, t, i) = C.(1+i)^t - C$. El dominio de f, D(f), está dado por los valores lógicos de las tres variables: $C > 0$, $t > 0$, $i > 0$.

Ejemplo[2]: En una Institución de Asistencia Médica los médicos de Medicina General son observados si el número medio de medicamentos por consulta supera el 20% del promedio de los k médicos de la especialidad. Si $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ son las cantidades de medicamentos recetados en un mes por los k médicos, y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ son las cantidades de pacientes atendidos en el mes, ¿cómo se puede plantear la regla que obliga a observar un médico en función de las 2.k variables?

Número medio de medicamentos por consulta del médico i: $\frac{x_i}{y_i}$.

Promedio general: $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k) = \frac{\sum_1^k x_i}{\sum_1^k y_i}$

Regla: El médico i debe observarse si $\frac{x_i}{y_i} > 1{,}2 * \frac{\sum_1^k x_i}{\sum_1^k y_i}$.

Ejemplo[3]: Sea la función $f(x, y, z) = L(1 + x) + 2.L(1 + y) + 3.\ L(1 + z)$ la cual mide la utilidad que un consumidor de cultura asigna al consumo mensual de "x" películas de video, “y” películas de cine y “z” obras de teatro al mes. ¿Qué vector de consumo produce más utilidad al consumidor: (0, 3, 1) ó (3, 3, 0)?

f(0, 3, 1) = L1 + 2.L4 + 3.L2 = L128
f(3, 3, 0) = L4 + 3.L4 + 3.L1 = L256

Como L256 > L128, la combinación (3, 3, 0) produce más utilidad.

Gráfico

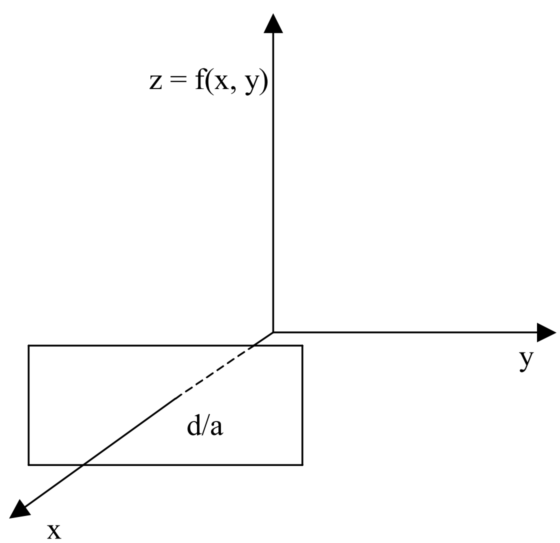
¿Cómo es el gráfico de una función de dos variables en el espacio tridimensional? Consideremos una función del tipo $z = f(x, y)$. El gráfico de esta relación es una *superficie* en el espacio. Un caso particular se tiene cuando f es una función lineal:

$$z = a.x + b.y + c$$

En estos casos el gráfico es un plano. Para representar mediante una sola fórmula todos los planos del espacio de tres dimensiones, la fórmula es:

$$a.x + b.y + c.z = d$$

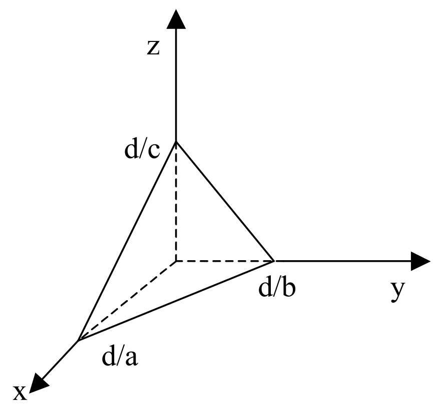
pues permite considerar también el caso $c = 0$. Si por ejemplo es $a \neq 0$ y $b = c = 0$, entonces la relación anterior es de la forma $x = d/a$. ¿Qué puntos del espacio de tres dimensiones satisfacen esta relación? Todos los puntos de coordenadas (d/a, y, z), es decir, todos los puntos de un plano paralelo al plano zy que corta al eje Ox en (d/a, 0, 0).



Con el mismo razonamiento, $y = d/b$ es un plano paralelo al plano xz que corta al eje Oy en (0, d/b, 0), mientras que la relación $z = d/c$ es un plano paralelo al plano xy que corta al eje Oz en (0, 0, d/c).

El caso más general, $a.x + b.y + c.z = d$, tiene una interesante interpretación económica. Si x, y, z son las cantidades a consumir de tres tipos de productos y a, b, c son los precios a los que se pueden adquirir en el mercado, entonces $(a.x + b.y + c.z)$ es el costo de la canasta de consumo conformada por los tres productos. Si d es el gasto que el consumidor está dispuesto a realizar para comprar la canasta, entonces $a.x + b.y + c.z = d$

es una ecuación que establece una *restricción* para el consumidor. Si a, b, c, d son dados (números fijos), entonces pueden existir muchos puntos (x, y, z) que satisfacen la restricción, pero de todos ellos interesan solamente los que cumplen adicionalmente las condiciones: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Entonces, aunque $a.x + b.y + c.z = d$ representa un plano en el espacio tridimensional, desde el punto de vista económico, entendida como una restricción presupuestaria, interesa sólo la parte de ese plano que se encuentra en el primer octante.



Los puntos de corte del plano $a.x + b.y + c.z = d$ con cada eje coordenado se obtienen haciendo cero alternativamente cada par de variables. Incluso, si los productos no son perfectamente divisibles, sólo interesan algunos de los puntos de la intersección del plano con el octante: aquellos que tienen coordenadas enteras.

Ejemplo: La entrada al teatro cuesta \$100, la entrada de cine cuesta \$75 y el alquiler de una película de video cuesta \$50. Encontrar todas las combinaciones posibles de una canasta formada por "x" entradas de teatro, "y" entradas de cine y "z" películas de video, si el consumidor tiene decidido gastar exactamente \$300[1].

Solución:

x	y	z
3	0	0
2	0	2
1	2	1
1	0	4
0	4	0
0	2	3
0	0	6

Cuando abandonamos las funciones lineales para introducir formas funcionales más complejas (polinomios de cualquier grado, fracciones algebraicas, exponenciales, logaritmos, radicales), la interpretación geométrica de funciones de dos variables se vuelve más difícil. Una excepción es el caso de la *superficie esférica* dada por la ecuación

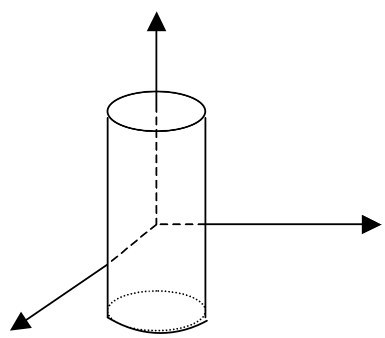
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad (\text{con } r > 0)$$

[1] Esta restricción puede parecer un tanto artificial, sería más razonable plantear la restricción de forma que el consumidor decida gastar "a lo sumo" \$300. Veremos más adelante cómo tratar también estos casos.

Esta ecuación también se puede escribir así: $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=r$ que recuerda la fórmula de la distancia entre dos puntos, (x, y, z) y (0, 0, 0). Si hacemos variar (x, y, z) de forma que la distancia al centro de coordenadas (r) se mantenga constante, entonces los puntos (x, y, z) son los que equidistan del centro de coordenadas, y por tanto, definen una superficie esférica con centro en (0, 0, 0) y radio r. Si en la ecuación se cambia el signo de "igual" por el de "menor o igual", entonces el conjunto de puntos de la relación $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ es la esfera de centro (0, 0, 0) y radio r.

Está claro que la relación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ no define unívocamente una función de la forma z = f(x, y). Por ejemplo, al par (x, y) = $\left(\frac{r}{\sqrt{3}}, \frac{r}{\sqrt{3}}\right)$ corresponden dos valores de z: $\pm\frac{r}{\sqrt{3}}$.

¿Cómo es el gráfico de la relación $x^2 + y^2 = 3$? En el plano xy es una circunferencia con centro en (0, 0) y radio $\sqrt{3}$. Al variar z esta forma queda incambiada y, por tanto, el gráfico de la relación es la superficie de un cilindro con eje en el eje Oz y radio $\sqrt{3}$.



Límites

La definición de límite en un punto en funciones de dos variables es una simple extensión de la definición para funciones con una sola variable. El entorno de la variable independiente se transforma ahora en un rectángulo en el plano xy.

<u>Definición</u>: $\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = c \iff$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$, $(x, y) \neq (a, b)$, se cumple que: $|f(x, y) - c| < \varepsilon$.

En el punto (a, b) la función f(x, y) tiene límite <u>c</u> si en las proximidades del punto (en un rectángulo formado por los puntos que cumplen a la vez: $a - \delta < x < a + \delta$, $b - \delta < y < b + \delta$), excluido el punto, la función f toma valores tan cercanos a <u>c</u> como se desee. Las técnicas para el cálculo de límites son similares a las utilizadas en el caso de funciones de una sola variable.

Ejemplo:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \frac{(x-1).(x+y-3)}{(e^x-e)\left[(x+y)^2-9\right]} = \lim \frac{(x-1).(x+y-3)}{(e^x-e)(x+y-3).(x+y+3)} = \lim \frac{(x-1)}{e.(e^{x-1}-1).(x+y+3)} =$$

Si ahora se hace el cambio de variable u = x -1 resulta:

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ y \to 2}} \frac{u}{e.(e^u-1).(u+y+4)} = \frac{1}{6.e}$$

Habiéndose utilizado el límite tipo: $\lim \frac{e^u-1}{u} = 1$ cuando $u \to 0$.

Así como hemos definido el lím f(x, y) en el punto (a, b), es posible extender la definición para los casos en que las variables $\to \pm \infty$. Valen, para dos o más variables, las propiedades relacionadas con órdenes de infinitud y de infinitésimos.

Continuidad

<u>Definición</u>: f: f(x, y) es una función continua en el punto (a, b) si se cumple que lím f(x, y) = f(a, b) cuando $x \to a$, $y \to b$.

La definición es análoga a la de continuidad en un punto de funciones de una sola variable. También es análoga la definición de continuidad en un dominio cualquiera: f es continua en D(f) si lo es en cada punto del D(f).

No hay problema en generalizar la definición de continuidad en un punto o en un dominio cualquiera para más de dos variables.

<u>Definición</u>: f: $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ es continua en el punto $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ si se cumple que lím $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ cuando todas las $x_i \to a_i$.

¿Cuál es la interpretación geométrica de una función continua en dos variables? Una función continua con dos variables tiene un gráfico que puede dibujarse como una *sábana* sin agujeros en su dominio. Una función continua en dos o más variables tiene la propiedad que pequeñas variaciones en cualesquiera de las variables independientes ocasionan pequeños cambios en el valor de la función. Si f es continua, entonces, cuando $\Delta x_1 \cong 0$, $\Delta x_2 \cong 0$, ….., $\Delta x_k \cong 0$, resulta que:

$$f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \ldots, x_k+\Delta x_k) \cong f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

La suma, la resta, la multiplicación, la división y la composición de funciones continuas, en varias variables, originan funciones que también son continuas, allí donde la suma, resta, multiplicación, división o función compuesta están definidas.

Funciones homogéneas de grado k

Definición: La función f: f(x, y) es *homogénea de grado k* en su dominio D(f) si se cumple que $f(t.x, t.y) = t^k.f(x, y) \ \ \forall\ (x, y) \in D(f)$ y $\forall\ t > 0$.

Ejemplo: La forma cuadrática f(x, y) = $(x, y).\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una función homogénea de grado 2. Efectivamente, $f(x, y) = a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2$. Entonces:

$$f(t.x, t.y) = a.(t.x)^2 + 2.b.(t.x).(t.y) + c.(t.y)^2 = t^2.f(x, y)$$

Repartido Práctico 16: Funciones de Varias Variables

Ejercicio 1

En los siguientes casos, hallar el valor de la función en los puntos indicados.

Función	Punto	Valor
a) $f(x,y) = 3x - 4y^2 + 5$	(2, -1)	f(2,-1)
b) $g(x,y,z)=(2x+3y).e^z$	(1,2,0)	g(1,2,0)
c) $h(t,u) = e^{2t} - e^{-u}$	(1/2,-2)	h(1/2,-2)
d) $j(x,y,z)=\dfrac{x^2 - y^2}{xy - z^3}$	(-1,1,-2)	j(-1,1,-2)
e) $k(p_A,p_B)=p_A-1/p_B+\sqrt{p_A.p_B}$	(10,20)	k(10,20)
f) $f(x,y) = 3x - 4y^2 + 5$	(x_0+h, y_0)	$f(x_0+h, y_0)$

Ejercicio 2

Se seleccionan R peces de un lago y se marcan convenientemente. Un día después se capturan nuevamente P peces, de los cuales M están marcados. Una estimación de la población total de peces del lago, N, se obtiene mediante la fórmula: N = f(R,P,M) = (R.P)/M. Hallar f(1000, 500, 160) e interpretar el resultado obtenido.

Ejercicio 3

Si una pareja, ambos de ojos marrones, tiene exactamente k hijos, la probabilidad P(x,k) de que x hijos tengan ojos celestes está dada por la fórmula:

$$P(x,k) = \frac{k!}{x!(k-x)!}.\frac{3^{k-x}}{4^k}$$

a) Hallar la probabilidad que si la pareja tiene tres hijos, los tres tengan ojos celestes.
b) Hallar la probabilidad que si la pareja tiene 4 hijos, exactamente 2 de ellos tengan ojos celestes.

Ejercicio 4

Visualizar gráficamente (en el espacio de tres dimensiones), las superficies dadas por las siguientes ecuaciones.

a) $x = 1$
b) $x - y = 0$
c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
d) $y = x^2$

Ejercicio 5

Indicar cuáles de las siguientes funciones son homogéneas y su grado, si corresponde.

a) $f(x,y) = 3x^2 - 5xy + 4y^2$
b) $g(x,y) = 5x^3y - 8y^4 + 3$
c) $h(x,y) = xy - \dfrac{3x^3}{y} + 2y^2$

17. DERIVADAS PARCIALES, DIFERENCIACIÓN, VECTOR GRADIENTE.

Derivadas parciales

Definición: Función derivada parcial respecto de x

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Función derivada parcial respecto de y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Función derivada parcial respecto de x en el punto (x_0, y_0)

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{\substack{(x=x_0)\\(y=y_0)}} = f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Función derivada parcial respecto de y en el punto (x_0, y_0)

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{\substack{(x=x_0)\\(y=y_0)}} = f_y(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Las derivadas parciales en el punto, si existen, son números. Las funciones derivadas parciales son en general funciones que dependen de ambas variables.

¿Qué mide $f_x(x, y)$? Mide el cambio que se opera en f ante un cambio infinitesimal en x, manteniéndose constante la y. Obsérvese que según la definición, el cambio en x es h, y el cambio en f es la diferencia entre f(x+h, y) y f(x, y). Análogamente para $f_y(x, y)$: mide el cambio que se opera en f ante un cambio infinitesimal en y, manteniéndose constante la x.

Esta interpretación de la derivada parcial proporciona una regla sencilla para su cálculo: para hallar $f_x(x, y)$ alcanza con derivar la f respecto de una sola variable, la "x", pues la "y" opera como una constante. Lo mismo vale para $f_y(x, y)$.

Ejemplo: Sea f: $f(x, y) = x^2.y^3 + x^2 – y$. Calcular las derivadas parciales primeras.

$f_x(x, y) = 2.x.y^3 + 2.x$
$f_y(x, y) = 3.y^2.x^2 – 1$

¿Cuánto valen las derivadas parciales en el punto (1, 2)?

$f_x(1, 2) = 18$
$f_y(1, 2) = 11$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales en un punto

$f_x(x_0, y_0)$ mide la tasa de variación de f(x, y) en la dirección del eje Ox a partir del punto (x_0, y_0). $f_y(x_0, y_0)$ mide la tasa de variación de f(x, y) en la dirección del eje Oy a partir del punto (x_0, y_0).

Interpretación económica de las derivadas parciales en un punto
Productividad, Utilidad y Costo marginales

1) Sea Z = f(x,y). Entonces $\frac{\partial Z}{\partial x}$ es la *razón de cambio* de Z con respecto a **x** cuando **y** se mantiene constante. Análogamente: $\frac{\partial Z}{\partial y}$ es la *razón de cambio* de Z con respecto a **y** cuando **x** se mantiene constante.

2) Sea C = f(x,y) una función del costo conjunto de producir "x" unidades de un producto y "y" unidades de otro producto. Entonces $\frac{\partial C}{\partial x}$ se llama el ***costo marginal con respecto a x,*** y se interpreta como la *razón de cambio* de C con respecto a **x** cuando **y** se mantiene fija. El costo marginal $\frac{\partial C}{\partial x}$ expresa cómo varía aproximadamente el costo total al aumentar la producción de x en una unidad manteniendo constante la producción de y. En forma análoga, $\frac{\partial C}{\partial y}$ es el ***costo marginal con respecto a y***.

   Ejemplo: $C(x, y) = 100 + 5.x + 10.y + 0{,}01.(x – 1)^2.(y – 2)$. Hallar el costo marginal de producir una unidad adicional de X si actualmente se produce x=10 y y=20.

   $C_x(x, y) = 5 + 0{,}01.2.(x – 1).(y – 2)$
   $C_x(10, 20) = 5 + 0{,}02.9.18 = 8{,}24$

   ¿Cuál es el incremento del costo al pasar de la combinación (10, 20) a producir (11, 20)?

   C(11, 20) – C(10, 20) = 8,42. Entonces la derivada parcial respecto de x, en el punto, es una buena aproximación del incremento del costo de producción.

3) Sea Q = f(t,k) una función que expresa el nivel de la producción dependiendo de las cantidades a utilizar de dos factores: trabajo (t) y capital (k). Entonces $\frac{\partial Q}{\partial k}$ se llama la ***productividad marginal con respecto a k***, es la razón de cambio de Q con respecto a k cuando "t" permanece constante, y expresa aproximadamente cómo varía el nivel de la producción al aumentar la dotación de capital en una unidad manteniendo constante el factor "t". En forma similar se define la ***productividad marginal con respecto a t*** *(productividad marginal del trabajo)*.

4) Una *función de utilidad* indica un valor (utilidad) que el consumidor asigna al consumo de ciertas cantidades de una canasta de productos. Sea U = f(x,y) una función de utilidad, donde x e y son las cantidades a consumir de dos productos X e

Y. Se denomina ***utilidad marginal de X*** a $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, y representa aproximadamente el cambio en la función de utilidad que resulta de aumentar en una unidad el consumo de X, manteniendo constante el consumo de Y.

Si el consumidor dispone de un presupuesto C para gastar en ambos productos y los precios de X e Y son p_x y p_y, entonces un problema interesante consiste en maximizar la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria: $x.p_x+y.p_y = C$.

Productos competitivos y complementarios

Dos productos pueden estar relacionados de forma que los cambios en el precio de uno de ellos tengan influencia en la demanda del otro producto y viceversa. Tal puede ser el caso del precio del gas-oil y la demanda de autos gasoleros. Supongamos que las funciones de demanda de los dos productos, A y B, dependen, ambas, de los precios de A y B.

Función de demanda de A: $q_A = f(p_A, p_B)$
Función de demanda de B: $q_B = g(p_A, p_B)$

A y B son *productos competitivos* cuando para ambos un aumento en el precio de uno de ellos hace aumentar la demanda del otro, si el precio del otro no cambia.

$$\boxed{\textbf{A y B son competitivos} \Leftrightarrow \frac{\partial q_A}{\partial p_B} \succ 0 \quad y \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} \succ 0}$$

A y B son *productos complementarios* cuando para ambos un aumento en el precio de uno de ellos hace disminuir la demanda del otro, si el precio del otro no cambia.

$$\boxed{\textbf{A y B son complementarios} \Leftrightarrow \frac{\partial q_A}{\partial p_B} \prec 0 \quad y \quad \frac{\partial q_B}{\partial p_A} \prec 0}$$

Ejemplos: El gas-oil y los autos con ese combustible son productos complementarios. El aceite de oliva y el aceite de girasol son productos competitivos.

Regla de la cadena

Esta regla se utiliza para hallar las derivadas parciales de funciones compuestas.

Supongamos que las siguientes funciones son derivables en sus respectivos dominios.

$$z = f(x, y)$$
$$x = g(t, w)$$
$$y = h(t, w)$$

¿Cuál es la derivada parcial de z con respecto a t? La regla de la cadena para derivación de funciones compuestas expresa que si $z = f[g(t, w), h(t, w)]$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial g}.\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial h}.\frac{\partial h}{\partial t} = f_g.g_t + f_h.h_t$$

De la misma forma, la derivada parcial de z con respecto a w es:

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial g}.\frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial h}.\frac{\partial h}{\partial w} = f_g.g_w + f_h.h_w$$

Ejemplo: Sea f: $f(x, y) = x^2 + 2.x.y$ donde $x = e^t.w$, $y = t^2 + w$. Para hallar f_t se podría expresar f como función de t y w, $f(t, w) = (e^t.w)^2 + 2.(e^t.w).(t^2 + w)$, y luego derivar con respecto a t, o bien aplicar la regla de la cadena, así:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial\left(x^2 + 2.x.y\right)}{\partial x}.\frac{\partial\left(e^t.w\right)}{\partial t} + \frac{\partial\left(x^2 + 2.x.y\right)}{\partial y}.\frac{\partial\left(t^2 + w\right)}{\partial t} = (2x + 2y).e^t.w + (2x).(2y)$$

resultado que puede expresarse, si se desea, exclusivamente como función de t y w:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2.e^t.w.(e^t.w + t^2 + w) + 4.e^t.w.t$$

Derivadas de orden superior

Las derivadas parciales que hemos definido en relación a la función f(x, y), se denominan *derivadas parciales de primer orden*, y son dos: $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$. A continuación se definen las *derivadas parciales de segundo orden*. La derivada segunda respecto de x de la función f(x, y) se obtiene derivando respecto de x la función $f_x(x, y)$. Notación:

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left[f_x(x, y)\right]'_x$$

Análogamente:

$$f_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left[f_y(x, y)\right]'_y$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left[f_x(x, y)\right]'_y$$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \left[f_y(x, y)\right]'_x$$

En condiciones muy generales se cumple que $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. Una condición suficiente para que se cumpla la igualdad es que ambas derivadas segundas sean funciones continuas.

La derivada tercera de f(x, y) respecto de x se obtiene derivando respecto de x la función $f_{xx}(x, y)$. Otras derivadas terceras se obtienen con definiciones similares.

Ejemplo: Sea f: f(x, y) una función definida como forma cuadrática.

f(x, y) = $(x, y).\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Queremos conocer las derivadas parciales primeras y segundas de la forma. f(x, y) también se puede escribir así: f(x, y) = $a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2$. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2.a.x + 2.b.y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2.b.x + 2.c.y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2.a \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.c$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2.b$$

A partir de las derivadas de segundo orden se puede definir una matriz cuadrada denominada *matriz hessiana*, concepto sobre el que volveremos al tratar los problemas relacionados con la determinación de los extremos de la función. La matriz hessiana para el caso de dos variables es:

$$\mathrm{H(x, y)} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix}$$

y su correspondiente determinante es:

$$|H(x, y)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

Diferenciación

El diferencial de una función, cuando se trabaja en una variable, es una función de dos variables: x y dx.

$$y = f(x)$$
$$dy = f\,'(x).dx$$

Cuando se trabaja con dos variables, z = f(x, y), el diferencial es una función de cuatro variables: x, y, dx, dy.

<u>Definición</u>: Si z = f(x, y), entonces: $dz = f_x(x, y).dx + f_y(x, y).dy$

Condición suficiente de diferenciabilidad: f es diferenciable si f_x y f_y son funciones continuas.

El diferencial dz mide *aproximadamente* el cambio que se origina en la función z como consecuencia de las variaciones dx y dy en las variables independientes.

Ejemplo: Una empresa produce dos productos, X e Y, mediante un proceso de producción que tiene la siguiente función de costos:

$$C = 1000 + 5.x + 6.y + 0{,}2.x.y$$

El diferencial de C es: dC =(5 + 0.2.y).dx + (6 + 0.2.y).dy, para todo (x,y). Si actualmente se producen 10 ton. de X y 12 ton. de Y, ¿Cómo incide aproximadamente en el costo total un incremento de la producción a 10,5 y 12,2 respectivamente?

dx = 0,5 $\qquad$ $f_x(10,12) = 7{,}4$
dy = 0,2 $\qquad$ $f_y(10,12) = 8$

dC = 7,4x0,5 +8x0,2 = 5,3

¿Cuál es el incremento verdadero de C? $\Delta C = C(10{,}5;\ 12{,}2) - C(10,\ 12) = 5{,}32$.

Teorema: H) z = f(x, y) diferenciable $\qquad$ T) $dz = f_t.dt + f_w.dw$
x = g(t, w) diferenciable
y = h(t, w) diferenciable

Por definición es $dz = f_x(x, y).dx + f_y(x, y).dy$. El teorema prueba que si x e y son a su vez funciones de otras dos variables, entonces el dz puede expresarse con la misma fórmula de la definición, pero en función de las variables últimas: t, w. Esta propiedad se conoce con el nombre de *invariancia del diferencial* y expresa que el dz tiene la misma forma tanto si x e y son variables independientes o si a su vez son funciones de otras variables.

Ejemplo: Sea f: $f(x, y) = x^2 + 2.x.y$ donde $x = e^t.w$, $y = t^2 + w$. Anteriormente calculamos la derivada parcial respecto de t. Para calcular dz necesitamos conocer también la derivada parcial respecto de w.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2.e^t.w.(e^t.w + t^2 + w) + 4.e^t.w.t$$
$$\frac{\partial f}{\partial w} = 2.(2.e^t.w + t^2 + w)$$

Entonces: $dz = \left[2.e^t.w.(e^t.w + t^2 + w) + 4.e^t.w.t\right]dt + 2.(2.e^t.w + t^2 + w).dw$

Derivación parcial implícita

La relación $z^2 = x^2 + y^2$ permite despejar la z como función de las otras dos variables: z = f(x, y)[2]. Pero en muchos otros ejemplos el "despeje" es bastante difícil o imposible. En condiciones muy generales se pueden calcular las derivadas parciales de f sin necesidad de hacer explícita la relación funcional. El método consiste en derivar ambos miembros de la relación asumiendo que z es una función (derivable) de las otras dos variables. Para hallar z_x en el ejemplo, se procede como sigue.

---

[2] En rigor, la relación planteada da origen a dos funciones, $f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $f_2(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2 + y^2\right)}{\partial x}$$
$$2.z.z_x = 2.x$$
$$z_x = \frac{2.x}{2.z} = \frac{x}{z}$$

Análogamente se obtiene: $z_y = \dfrac{y}{z}$. Ambas derivadas parciales quedaron expresadas como funciones de z. En muchos problemas esto no presenta dificultad, pues se sabe, por ejemplo, que z debe ser positiva, y lo que interesa es conocer el signo de las derivadas parciales.

Ejemplo: Sea C una función del costo conjunto de producción de x unidades del producto X y y unidades del producto Y, definida implícitamente por la ecuación:

$$C^2 + C = (10 + x^2).y^2 + 40.y.\sqrt{21+x^2} + 400$$

a) ¿Cuál es el costo total de producir 10 unidades de X y 8 unidades de Y?

$C^2(10, 8) + C(10, 8) = (10 + 10^2).8^2 + 40.8.\sqrt{21+10^2} + 400 = 10.960$

$C^2 + C = 10.960$

$C^2 + C - 10.960 = 0$

$C(10, 8) = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4.10960}}{2} = \dfrac{-1 \pm 209{,}4}{2}$

La única raíz positiva es $C(10, 8) = 104{,}2$.

b) Hallar los costos marginales respecto de X e Y cuando x = 10, y = 8.

Se trata de hallar $C_x(10, 8)$ y $C_y(10, 8)$. Para ello calculamos las funciones derivadas parciales, y luego las evaluamos en el punto.

$$\left(C^2 + C\right)\Big|'_x = y^2.2.x + 40.y.\frac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}$$
$$2.C.C_x + C_x = y^2.2.x + 40.y.\frac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}$$
$$\left(2.C+1\right).C_x = y^2.2.x + 40.y.\frac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}$$
$$C_x = \frac{y^2.2.x + 40.y.\dfrac{2.x}{2.\sqrt{21+x^2}}}{2.C+1}$$

Al evaluar en el punto (10, 8) se obtiene: $C_x(10, 8) = 4{,}54$. Con el mismo procedimiento se calcula la función $C_y(x,y)$ y al evaluar en el punto se obtiene $C_y(10, 8) = 6, 36$. Interpretación: \$4,54 es aproximadamente el costo incremental al pasar de 10 unidades de X y 8 unidades de Y a producir 11 unidades de X y 8 unidades de Y. \$6,36 es aproximadamente el costo incremental de producir una unidad adicional de Y dejando constante la cantidad de X.

Derivada total

En algunos problemas de Economía, las variables no son independientes, es decir, x e y están relacionadas de alguna manera.

Sea la función z = f(x, y) donde a su vez y = g(x). Se trata de calcular la tasa de cambio de z teniendo en cuenta que las variables no son independientes sino que están relacionadas a través de la función g. Para calcular la derivada de z respecto de x se aplica la regla de la cadena.

$$z'_x = f'_x.x'_x + f'_y.y'_x = f'_x + f'_y.g'(x)$$

Ejemplo: La función de demanda del producto A es función del precio del producto A y del precio de un sustituto B, mediante la relación:

$$z = q_A = \frac{1}{p_A}.(p_B - 2)^2$$

donde a su vez los precios de ambos productos se relacionan así: $p_B = 2.(1 - e^{-p_A})$. Se quiere calcular la derivada de la función de demanda con relación al precio del producto A.

$$z'_{p_A} = \left[\frac{1}{p_A}(p_B - 2)^2\right]'_{p_A} + \left[\frac{1}{p_A}(p_B - 2)^2\right]'_{p_B}.\left[2(1 - e^{-p_A})\right]'_{p_A} = \frac{-(p_B - 2)^2}{p_A^2} + \frac{2(p_B - 2)}{p_A}.2.e^{-p_A}$$

Luego, si el precio actual del producto A es 2, ¿cuál es aproximadamente la incidencia en la demanda del producto A de un incremento del 10% en su precio?

$p_A = 2$. Entonces, $p_B = 2.(1-e^{-2}) = 1{,}73$.

$$dz = dq_A = z'_{pA}.dp_A = \left[\frac{-(1{,}73 - 2)^2}{2^2} + \frac{2.(1{,}73 - 2)}{2}.2.e^{-2}\right].0{,}20 = -0{,}018$$

La incidencia de un incremento en el precio de A del 10% es aproximadamente una disminución de la demanda del 1,8%.

Vector gradiente

Dada una función de n variables, diferenciable respecto de todas sus variables, se llama vector gradiente de f al vector que tiene por componentes, en forma ordenada, las funciones derivadas respecto de cada una de las variables.

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad Vector\ gradiente : \nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ ..... \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

En el caso particular de funciones de dos variables, f: f(x, y), el vector gradiente es:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

MODELO KEYNESIANO DE LA DEMANDA AGREGADA

Supuestos

a) Se trata de una economía con tres agentes: familias, empresas y gobierno.
b) La producción es determinada exclusivamente por la demanda interna agregada.
c) Los precios son fijos (no hay inflación) y en la economía hay desempleo (no hay restricciones en caso que las empresas demanden más mano de obra).
d) Todo el producto (Y) de las empresas (el producto es la diferencia entre el valor de la producción y el consumo intermedio) se distribuye a las familias, previo pago de impuestos (T), que son proporcionales al nivel del producto ($T = t.Y$, donde "t" es la tasa de los impuestos).
e) Las familias utilizan el ingreso disponible ($Y_d = Y - T$) para su consumo en todo o en parte. Se supone que el consumo es una función lineal del ingreso disponible: $C = C_0 + c.Y_d$ con $C_0 \geq 0$ y $0 \leq c < 1$, donde C_0 es el "consumo autónomo" (independiente del ingreso), y c es la "propensión marginal a consumir" y mide la porción del ingreso disponible que las familias destinan directamente al consumo.
f) La parte del ingreso disponible que las familias no consumen, lo destinan al ahorro, y ese ahorro lo pueden invertir. Lo pueden invertir en activos financieros (depósitos bancarios, bonos) o lo pueden invertir en la economía "real" incrementando el stock de capital destinado a la producción. La inversión en la economía real (I) es función de la tasa de rentabilidad de los activos financieros: $I = I_0 - \beta.r$, donde r es la tasa de rentabilidad de los activos financieros y β mide la sensibilidad de las inversiones ante cambios en r. Vamos a suponer que en nuestra economía es $r = 0$, es decir, la inversión es autónoma, $I = I_0$ (supuesto fuerte).
g) Se supone que el gasto del gobierno es una variable exógena al modelo (al igual que el nivel de la inversión), es decir, no queda determinado por el modelo ($G = G_0$).

Problema: Calcular el nivel del producto de equilibrio

Como consecuencia de los supuestos, para que haya equilibrio el nivel del producto debe coincidir con el nivel de la demanda interna agregada: C + I + G. Entonces:

$$Y = C + I + G$$

Utilizando los supuestos: $$Y = C + I_0 + G_0$$

$$Y = (C_0 + c.Y_d) + I_0 + G_0$$

$$Y = C_0 + c.(Y - T) + I_0 + G_0$$

$$Y = C_0 + c.(Y - t.Y) + I_0 + G_0$$

$$Y = C_0 + c.(1 - t).Y + I_0 + G_0$$

$$[1 - c.(1 - t)].Y = C_0 + I_0 + G_0$$

$$\boxed{Y = \left[\frac{1}{1 - c.(1-t)}\right].\left(C_0 + I_0 + G_0\right)}$$

El nivel del producto de equilibrio depende en el modelo del factor 1/[1–c.(1–t)], conocido como "multiplicador keynesiano", y del factor (C_0 + I_0 + G_0) que representa el gasto autónomo de la economía (C_0 + G_0) más la inversión autónoma (I_0) según los supuestos del modelo.

De acuerdo con el resultado obtenido, cualquier incremento del gasto o inversión autónomos produce un incremento aún mayor en el producto, como consecuencia del "efecto multiplicador". En efecto:

$$\Delta Y = \left[\frac{1}{1 - c.(1-t)}\right].\Delta\left(C_0 + I_0 + G_0\right)$$

Y como 1/[1–c.(1–t)] > 1, el incremento del producto es superior al incremento del gasto o de la inversión. Sin embargo, hay un límite para el incremento del producto. La inversión incremental o el mayor gasto generarán más producto si existe mano de obra ociosa dispuesta a incorporarse a la actividad productiva (desempleo).

A partir de los resultados obtenidos, se pide al lector que realice los siguientes ejercicios.

I) Probar que el multiplicador keynesiano (α) es efectivamente mayor que la unidad.

II) Si se define el Resultado Fiscal del Gobierno como F = T – G_0, probar que $\frac{\partial F}{\partial G_0} = (c-1).(1-t).\alpha < 0$ y dar una interpretación económica de este resultado.

III) Probar que $\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha.(1-c).Y > 0$ y dar una interpretación económica de este resultado.

Repartido Práctico 17.1: Derivadas Parciales

Ejercicio 1

En cada uno de los siguientes casos calcular las funciones derivadas parciales respecto de todas las variables.

a) $f(x,y) = 3x^2 – 4y^4 + 5y – 8$
b) $g(x,y,z) = 6xy – y^2 + 2yz$
c) $h(z,t) = 5tz – 4z + 1$
d) $j(w,v) = e^w – e^{-w} + (1/2)v$
e) $k(p,q) = \sqrt{p.q}$
f) $r(l,k) = 5.t^{0,2}.k^{0,8}$
g) $s(x,y) = e^{2(x+y)}$
h) $m(u,v) = L(u^2+v^3)$

Ejercicio 2

Calcular las derivadas parciales en los puntos que se indican a continuación, en relación con las funciones del **Ejercicio 1**.

a) $f_x(1,1)$ b) $f_y(-1,-1)$ c) $g_z(2,2,-2)$ d) $h_t(5,6)$
e) $j_w(2,0)$ f) $j_v(2,0)$ g) $k_q(10,100)$ h) $r_k(50,40)$
i) $s_y(-3,-3)$ j) $m_v(1,1)$

Ejercicio 3

Demostrar que si $z = x.e^{x-y} – y.e^{y-x}$, entonces: $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x-y} - e^{y-x}$

Ejercicio 4

Sea el polinomio $P(x,y) = 3x^2 + 4xy – 5y^2$.

a) Demostrar que $P(\lambda x,\lambda y) = \lambda^2.P(x,y)$.
b) Hallar las dos derivadas parciales de P.
c) Hallar las cuatro derivadas segundas, y verificar que dos de ellas son iguales.
d) Calcular todas las derivadas terceras de P, y verificar que son todas iguales.

Ejercicio 5

En los siguientes problemas $C(x,y)$ es una función del costo de producción y “x” e “y” son las cantidades a producir de dos artículos. Hallar la función del costo marginal para cada uno de los artículos.

a) $C(x,y) = 4x + 0,3y^2 + 2y + 500$
b) $C(x,y) = x\sqrt{x+y} + 1000$
c) $C(x,y) = 0,03(x+y)^3 – 0,6(x+y)^2 + 4,5(x+y) + 7700$

Ejercicio 6

Sea $f(x,y) = 3x^2 – 6xy – 4y^3 + 5x^2y – 4$.

a) Calcular $f_{xx}(1,2)$.
b) Calcular $f_{xyy}(1,2)$.

Repartido Práctico 17.1: Derivadas Parciales

Ejercicio 7

Sea la función del costo de producción de dos productos A y B:

$$C(q_A,q_B) = \sqrt{3.q_A^2 + 4.q_B^2 + 500}$$

Hallar $\dfrac{\partial^2 C}{\partial q_A \partial q_B}$ cuando $q_A=10$ y $q_B=15$.

Ejercicio 8

Sea $f(x,y) = L(x^2 + y^2)$. Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Ejercicio 9 (Teorema de Euler)

Probar que si f de dos variables, admite derivadas parciales continuas y es homogénea de grado k, entonces se cumple que $x.\dfrac{\partial f}{\partial x} + y.\dfrac{\partial f}{\partial y} = k.f(x,y)$.

Ejercicio 10

En cada caso, hallar las derivadas que se indican.

Función original	Relaciones entre variables	Derivadas a calcular
a) $f(x,y) = x^3 + 2xy - 3y^2$	$x=t^2-2u$ $y=5u^2$	f_t, f_u
b) $f(x,y) = e^{x+y}$	$x=t^2+3$ $y=t^{3/2}$	f_t
c) $f(x,y,z) = L(x^2+y^2+z^2)$	$x=2-3t$ $y= t^2+3$ $z=4-t$	f_t
d) $f(x,y) = \sqrt{5x+2y}$	$x=4t+7$ $y= t^2-3t+4$	f_t cuando $t=1$

Ejercicio 11

La siguiente información corresponde a dos productos relacionados, A y B.

Función de costos: $C(q_A,q_B) = (3q_A^2 + q_B^2 +4)^{1/3}$

Funciones de demanda: $\begin{cases} q_A = 10 - p_A + p_B^2 \\ q_B = 20 + p_A - 11p_B \end{cases}$

Calcular, usando la regla de la cadena, las derivadas parciales de la función de costos respecto de los precios, en el punto ($p_A=25$, $p_B=4$).

Ejercicio 12

Sean $Z = f(x,y)$, con $x=g(t)$ y $y=h(t)$.

a) Hallar, usando la regla de la cadena, Z_t'.
b) Hallar Z_t' en el caso particular $h(t)=t$.

Repartido Práctico 17.2: Productos Competitivos y Complementarios

Ejercicio 1

Hallar el costo marginal del artículo "y" para el nivel de producción dado en cada uno de los casos siguientes casos.

Función del costo de producción	Nivel de la producción
a) $C(x,y) = 4x + 0{,}3y^2 + 2y + 500$	x=20, y=30
b) $C(x,y) = x\sqrt{x+y} + 1000$	x=40, y =60
c) $C(x,y) = 0{,}03(x+y)^3 - 0{,}6(x+y)^2 + 4{,}5(x+y) + 7700$	x=50, y=50

Ejercicio 2

En los siguientes casos P(t,k) es una función de producción, y "t" y "k" son los factores de la producción (t= trabajo y k=capital). Hallar las funciones de producción marginales respecto de los factores.

a) $P(t,k) = 20.t.k - 2.t^2 - 4.k^2 + 800$
b) $P(t,k) = 10.t^{0,2}.k^{0,8}$

Ejercicio 3 (Función de producción de Cobb-Douglas)

En Economía, una función de producción Cobb-Douglas tiene la forma:

$$P(t,k) = a.t^b.k^c$$

donde a, b y c son constantes, a>0 y b+c=1. Para una función de producción de esta forma demostrar las siguientes proposiciones.

a) $\dfrac{\partial P}{\partial t} = \dfrac{b.P}{t}$

b) $\dfrac{\partial P}{\partial k} = \dfrac{c.P}{k}$

c) P es una función homogénea de grado 1.

c) $t.\dfrac{\partial P}{\partial t} + k.\dfrac{\partial P}{\partial k} = P.$ Esta proposición demuestra que en una función Cobb-Douglas de producción, al sumar las productividades marginales de cada factor multiplicadas por la cantidad de ese factor se obtiene la producción total.

Ejercicio 4

En los siguientes problemas q_A y q_B son las funciones de demanda para los productos A y B, donde p_A y p_B son los respectivos precios. Hallar las derivadas parciales y determinar si A y B son "competitivos", "complementarios" o ninguno de los dos.

a) $q_A = 1000 - 50p_A + 2p_B$
$q_B = 500 + 4p_A - 20p_B$

b) $q_A = 20 - p_A - 2p_B$
$q_B = 50 - 2p_A - 3p_B$

c) $q_A = \dfrac{100}{p_A\sqrt{p_B}}$; $\quad q_B = \dfrac{500}{p_B\sqrt[3]{p_A}}$

Repartido Práctico 17.2: Productos Competitivos y Complementarios

Ejercicio 5

Sea la función de producción $P(t,k) = \dfrac{k.t}{k+t}$.

a) Hallar las funciones de productividad marginal.
b) Demostrar que cuando $t = k$, la suma de las productividades marginales es constante.

Ejercicio 6

Los ingresos anuales de los egresados universitarios, diez años después de recibidos, puede modelarse actualmente por la ecuación:

$$Y = 10.000 + 800.t + 600.u$$

donde t y u son los años de experiencia en el trabajo antes y después de recibir el título universitario. Hallar las derivadas parciales de Y e interpretar los resultados obtenidos.

Ejercicio 7

Las siguientes son las funciones de demanda de dos productos relacionados A y B.

$$q_A = e^{-p_A/p_B} \qquad q_B = \frac{16}{p_A \cdot p_B^2}$$

a) Estudiar si A y B son competitivos o complementarios.
b) Si los precios de A y B son \$1 y \$2 respectivamente, estimar el cambio en la demanda de A cuando el precio de B disminuye \$0,04 y el precio de A se mantiene constante.

Ejercicio 8

La siguiente es la función del costo de producción de dos productos A y B.

$$C(q_A, q_B) = \frac{q_A^2 \cdot \sqrt{q_B^3 + q_A}}{17} + q_A \cdot \sqrt[3]{q_B} + 600$$

a) Encontrar las funciones de costos marginal respecto de las cantidades a producir.
b) Calcular el costo marginal respecto de q_A cuando $q_A=17$ y $q_B=8$.
c) Estimar el cambio en el costo si la producción del producto A disminuye de 17 a 16 unidades, mientras que la producción del producto B se mantiene en 8.

18. ELASTICIDAD PARCIAL

<u>Definición</u>: Sea $z = f(x_1, x_2, \ldots.., x_k)$. Se denomina *elasticidad parcial* de z con respecto a x_i a la elasticidad de z con respecto a x_i cuando las otras variables se consideran constantes.

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{f(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{x_i}}$$

$\varepsilon(x_i)$ es aproximadamente la variación porcentual de f como consecuencia de un incremento del 1% en x_i, manteniéndose constantes las demás variables.

Ejemplo: Sea f: $f(x, y) = \alpha.x^{\beta}.y^{\gamma}$. Calcular la elasticidad de f con respecto a x e y.

$f_x(x, y) = \alpha.\beta x^{\beta-1}.y^{\gamma}$. Entonces: $\varepsilon_x = \dfrac{\alpha.\beta.x^{\beta-1}.y^{\gamma}}{\dfrac{\alpha.x^{\beta}.y^{\gamma}}{x}} = \beta$. Análogamente resulta $\varepsilon_y = \gamma$.

Sea una función de demanda para un producto A, $q_A = f(p_A, p_B)$, donde q_A es la cantidad demandada de A cuando su precio por unidad es p_A y el precio por unidad de otro producto relacionado B es p_B. La *elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a* p_A se define así:

$$\varepsilon_{p_A} = \frac{\dfrac{\partial q_A}{\partial p_A}}{\dfrac{q_A}{p_A}}$$

La *elasticidad parcial de la demanda de A con respecto a* p_B se define análogamente así:

$$\varepsilon_{p_B} = \frac{\dfrac{\partial q_A}{\partial p_B}}{\dfrac{q_A}{p_B}}$$

En términos generales, $\varepsilon(p_A)$ es la razón de cambio (porcentual) en la cantidad demandada de A, frente a un cambio porcentual en el precio de A cuando el precio de B está fijo. En forma similar, $\varepsilon(p_B)$ puede interpretarse como la razón de cambio porcentual en la cantidad demandada de A frente a un cambio porcentual en el precio de B cuando el precio de A está fijo.

Repartido Práctico 18: Elasticidad Parcial

Ejercicio 1

Sea f: f(x_1, x_2, …, x_k) = $A.x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}.....x_k^{\alpha_k}$. Calcular $\varepsilon(x_i)$.

Ejercicio 2

En los siguientes tres casos encontrar $\varepsilon(p_A)$ y $\varepsilon(p_B)$ para los valores dados de p_A y p_B.

Caso 1: $q_A = 1000 - 50.p_A + 2.p_B$, con $p_A = 2$ y $p_B = 10$.

Caso 2: $q_A = 20 - p_A - 2.p_B$, con $p_A = 2$ y $p_B = 2$.

Caso 3: $q_A = 100/(p_A.p_B^{0,5})$, con $p_A = 1$ y $p_B = 4$.

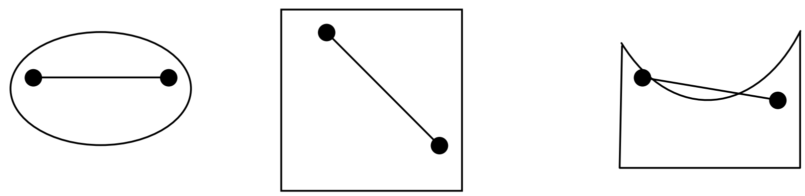
Ejercicio 3

Sea la función de demanda del producto A, $q_A = e^{-p_A/p_B}$. Calcular $\varepsilon(p_A)$ y $\varepsilon(p_B)$.

19. CONJUNTOS CONVEXOS Y FUNCIONES CONVEXAS

Conjunto convexo

Definición: Un conjunto es ***convexo*** si el segmento que une dos puntos cualesquiera del conjunto, también pertenece al conjunto.

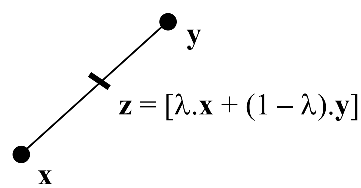


Convexo **Convexo** **No es convexo**

Aunque los gráficos corresponden a conjuntos definidos en el plano, la definición es válida para puntos con cualquier número de coordenadas. Ejemplos de conjuntos convexos: una semirrecta, un intervalo abierto, un intervalo cerrado, un cuadrado, un círculo, una esfera. Si **x** e **y** son dos puntos cualesquiera del conjunto, entonces la expresión:

$$\mathbf{z} = [\lambda.\mathbf{x} + (1 - \lambda).\mathbf{y}] \quad \text{con } \lambda \in [0,1]$$

representa el conjunto de puntos del segmento **xy**. En particular, cuando $\lambda = 1$ resulta **z = x**, y cuando $\lambda = 0$ resulta **z = y**.



Observaciones

1. Los espacios vectoriales son conjuntos convexos (pues toda combinación lineal de dos vectores es un vector del espacio).
2. Como casos particulares en R^2, R^3 y R^n: son conjuntos convexos las rectas, los planos, los hiperplanos, las semirrectas, los semiplanos y los semiespacios.
3. Propiedad: La intersección de dos conjuntos convexos también es un conjunto convexo.

Convexidad y concavidad

Definición: Una función f con *dominio convexo* es una ***función convexa*** si para todo par de puntos del dominio, **x** e **y**, se cumple que:

$$f[\lambda.\mathbf{x} + (1 - \lambda).\mathbf{y}] \leq \lambda.f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda).f(\mathbf{y}) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

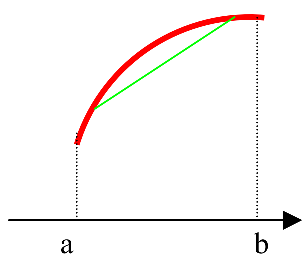
Una función f con *dominio convexo* es una ***función cóncava*** si para todo par de puntos del dominio, **x** e **y**, se cumple que:

$$f[\lambda.\mathbf{x} + (1 - \lambda).\mathbf{y}] \geq \lambda.f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda).f(\mathbf{y}) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

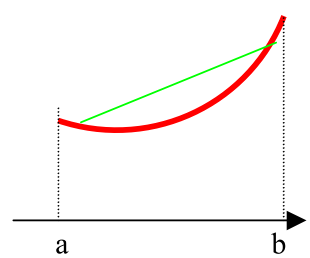
La interpretación geométrica que se realiza a continuación también es válida para superficies (dos variables) o hiper superficies (tres o más variables).

Sea una función $y = f(x)$ definida en el intervalo [a, b]. Se dice que *f es convexa en [a, b]* (o con concavidad positiva o cóncava “hacia arriba”) cuando para todo par de puntos del intervalo, la cuerda (el segmento de recta) que determinan se dibuja por encima de la gráfica de f.

Se dice que *f es cóncava en [a, b]* (o con concavidad negativa o cóncava “hacia abajo”) cuando para todo par de puntos del intervalo, la cuerda (el segmento de recta) que determinan se dibuja por debajo de la gráfica de f.



La función es cóncava



La función es convexa

Propiedades

Para funciones de una sola variable

1. Si f: f(x) con D(f) = R y con derivada segunda, entonces f es convexa si $f''(x) > 0$ $\forall x \in R$.

2. Si f: f(x) con D(f) = [a,b] y con derivada segunda, entonces f es convexa si $f''(x) > 0$ $\forall x \in [a,b]$.

Para funciones de una, dos o más variables

1. Si f es cóncava, entonces (-f) es convexa, y viceversa.

2. Si f y g son cóncavas (convexas), entonces (f+g) es cóncava (convexa).

3. Si $f(x_1,x_2,.....,x_n)$ está definida en un dominio convexo, entonces es una función convexa si todos los valores propios de la matriz hessiana H_f son ≥ 0. (Si f es una función de varias variables, entonces, el elemento genérico de la matriz H es $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial x_j}$).

4. Si f(x,y) está definida en un dominio convexo, entonces es una función convexa si se cumplen a la vez las dos condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \left|H_f\right| \geq 0, \forall (x,y) \in D(f) \\ Traza(H_f) \geq 0, \forall (x,y) \in D(f) \end{cases}$$

5. Toda función lineal es convexa.

6. Si $f(x_1,x_2,.....,x_n)$ es una función convexa, entonces el conjunto formado por los puntos $(x_1,x_2,.....,x_n)$ que verifican $f(x_1,x_2,.....,x_n) \leq 0$ es un conjunto convexo.

La existencia de la derivada segunda no es una condición necesaria para el estudio de la concavidad / convexidad de una función. Los siguientes ejemplos ilustran la manera de estudiar esta propiedad de las funciones, en dos casos bien sencillos.

Ejemplo 1: Estudiar la concavidad / convexidad de la función f: $f(x) = x^2$ en todo su dominio.

Aplicando la definición, probaremos que se trata de una función convexa.

$$f[\lambda.x + (1-\lambda).y] = [\lambda.x + (1-\lambda).y]^2 \leq \lambda.x^2 + (1-\lambda).y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2.x^2 + 2.\lambda.(1-\lambda).x.y + (1-\lambda)^2.y^2 \leq \lambda.x^2 + (1-\lambda).y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda.(1-\lambda).(-x^2 + 2.x.y - y^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow - \lambda.(1-\lambda).(x-y)^2 \leq 0$$

lo cual es cierto para todo x e y reales, $\lambda \in [0, 1]$.

Ejemplo 2: Estudiar la concavidad / convexidad de la función f: $f(x) = 2.x$ en todo su dominio.

$$f[\lambda.x + (1-\lambda).y] = 2.[\lambda.x + (1-\lambda).y] = .\ \lambda.(2.x) + (1-\lambda).(2.y)$$

En este caso se cumple la igualdad, y por tanto valen las dos definiciones, f(x) = 2.x es a la vez cóncava y convexa. La convexidad de una función lineal estaba expresada previamente en la propiedad 5.

Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad

Se supone a continuación que el dominio de la función f es un conjunto convexo (por ejemplo, un intervalo en funciones de una variable, un rectángulo en el caso de funciones de dos variables).

Definición: Una función es **cuasicóncava** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que $f(y) \geq f(x)$, resulta $f[\lambda.x + (1-\lambda).y] \geq f(x)$, con $\lambda \in [0,1]$.

Definición: Una función es **cuasiconvexa** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que $f(y) \geq f(x)$, resulta $f[\lambda.x + (1-\lambda).y] \leq f(y)$, con $\lambda \in [0,1]$. También se puede definir una función f como **cuasiconvexa** si se cumple que -f es cuasicóncava.

Definición: Una función es **cuasicóncava en sentido estricto** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que f(y) ≥ f(x), resulta f[λ.x + (1 – λ).y] > f(x), con λ ∈ [0,1].

Definición: Una función es **cuasiconvexa en sentido estricto** si para todo par de valores del dominio de f, **x** e **y**, tales que f(y) ≥ f(x), resulta f[λ.x + (1 – λ).y] < f(y), con λ ∈ [0,1].

Propiedades

1. Si f es cóncava ⇒ f es cuasicóncava. El recíproco es falso.
2. Si f es convexa ⇒ f es cuasiconvexa. El recíproco es falso.

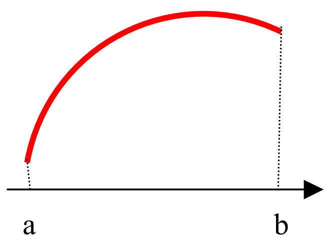
   Observación: Según estas propiedades, las condiciones de cuasiconcavidad y de cuasiconvexidad son más débiles que las condiciones de concavidad y convexidad respectivamente.
3. Si f es cuasicóncava (cuasiconvexa) y F es estrictamente creciente ⇒ La función compuesta, F[f(**x**)] es cuasicóncava (cuasiconvexa).
4. Sea $z = \alpha.x^{\beta}.y^{\gamma}$ con α, β y γ> 0 (función de Cobb-Douglas). Se cumple que:

   a) z es cuasicóncava

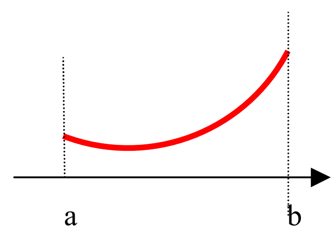
   b) z es cóncava si $\beta + \gamma \leq 1$

   c) z es estrictamente cóncava si $\beta + \gamma < 1$.

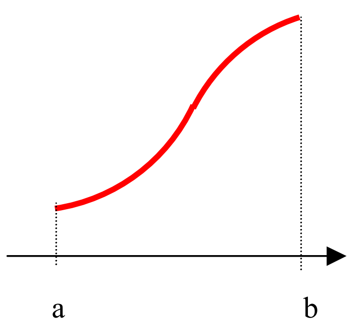
Ejemplos de funciones en el intervalo [a, b]:



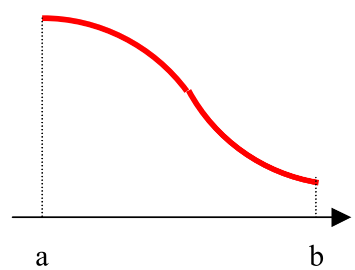
Cóncava
Cuasicóncava
Cuasicóncava en sentido estricto



Convexa
Cuasiconvexa
Cuasiconvexa en sentido estricto

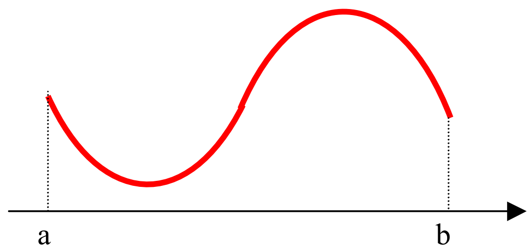


No es cóncava
No es convexa
Es cuasicóncava
Es cuasiconvexa



No es convexa
No es cóncava
Es cuasiconvexa
Es cuasicóncava

No es cóncava
No es convexa
No es cuasicóncava
No es cuasiconvexa



Repartido Práctico 19: Conjuntos y funciones convexas

Ejercicio 1

Indicar cuáles de los siguientes conjuntos definidos en R son convexos.

a) [a,b]
b) (a,b)
c) $\{x : x \geq a\}$
d) Entorno de centro a y radio r
e) Entorno reducido de centro a y radio r.

Ejercicio 2

Indicar cuáles de los siguientes conjuntos definidos en R^2 son convexos.

a) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$
b) $\{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
c) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 4\}$
d) $\{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$
e) R^2
f) $\{(x,y) : y \leq e^x\}$

Ejercicio 3

Indicar cuáles de las siguientes funciones son convexas en los dominios respectivos.

a) $f(x) = 2 + 3x$	$D(f) = R$
b) $f(x,y) = 5 + 3x - y$	$D(f) = R^2$
c) $f(x,y) = 5 + 2x + 4y$	$D(f) = \{(x,y) : x.y > 0\}$
d) $f(x,y) = e^{x+y}$	$D(f) = R^2$
e) $f(x,y) = x + y - L(x+y)$	$D(f) = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}$
f) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$	$D(f) = \{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1\}$
g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + 1$	$D(f) = R^3$
h) $f(x,y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$	$D(f) = R^2$

Ejercicio 4

Probar que si $f(x_1,x_2,.....,x_n)$ es una función lineal y tiene por dominio R^n, entonces f es convexa.

20. EXTREMOS EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Los comentarios que siguen refieren a funciones de dos variables, aunque pueden generalizarse a funciones de tres o más variables. Cuando éste no sea el caso, se hará mención expresa del enunciado correspondiente para más de dos variables.

Definiciones de puntos extremos
$z = f(x,y)$ presenta un ***mínimo relativo*** en el punto (x_0,y_0) si para todo punto (x,y) de la intersección del D(f) con un entorno centrado en (x_0,y_0) se cumple que: $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.

$z = f(x,y)$ presenta un ***máximo relativo*** en el punto (x_0,y_0) si para todo punto (x,y) de la intersección del D(f) con un entorno centrado en (x_0,y_0) se cumple que: $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.

Si la función $z = f(x,y)$ presenta un mínimo o máximo relativos en el punto (x_0,y_0), entonces se dice que (x_0,y_0) es un ***punto de extremo relativo***.

$z = f(x,y)$ presenta un ***mínimo absoluto*** en el punto (x_0,y_0) si para todo punto (x,y) del dominio de la función f, D(f), se cumple que: $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$.

$z = f(x,y)$ presenta un ***máximo absoluto*** en el punto (x_0,y_0) si para todo punto (x,y) del dominio de la función f, D(f), se cumple que: $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.

Si la función $z = f(x,y)$ presenta un mínimo o máximo absolutos en el punto (x_0,y_0), entonces se dice que (x_0,y_0) es un ***punto de extremo absoluto***.

Las definiciones precedentes corresponden a puntos extremos ***en sentido amplio***. Si en las mismas se cambian los signos "≤" y "≥" por "<" y ">", entonces se tienen extremos ***en sentido estricto***.

Conjuntos abiertos y cerrados
Sea C un conjunto de puntos del plano, $C \in R^2$. Un punto de C es ***interior*** del conjunto, si existe un entorno del punto totalmente incluido en C.

El conjunto C es ***abierto*** si todos sus puntos son interiores.

Un punto es ***frontera*** del conjunto C si todo entorno centrado en el punto contiene elementos de C y elementos que no son de C.

Un conjunto C es ***cerrado*** si contiene todos sus puntos frontera.

Un conjunto del plano es ***acotado*** si existe un círculo (de radio finito) que lo contiene.

Se llama ***interior*** de C al conjunto de sus puntos interiores. Se llama ***frontera*** de C al conjunto de sus puntos frontera.

Observaciones
Los puntos frontera no necesariamente deben pertenecer al conjunto. Existen conjuntos que contienen sólo una parte de sus puntos frontera. Estos conjuntos no son abiertos ni cerrados. De acuerdo con las definiciones presentadas, un conjunto es cerrado si su complemento respecto de R^2 es abierto. Vale también el recíproco. Todo triángulo,

rectángulo, círculo o circunferencia del plano son conjuntos acotados. El primer cuadrante del plano no es un conjunto acotado. Todas las definiciones y resultados precedentes son válidos si $C \in R^n$.

Teorema de Weierstrass

H) Sea f: f(x, y) continua en su dominio, con D(f) cerrado y acotado.
T) Existen mínimo y máximo absolutos de f en su dominio.

Este resultado puede extenderse sin ninguna dificultad a funciones con dominio en R^n. El teorema afirma que, en ciertos casos (función continua en un dominio cerrado y acotado) existen mínimo y máximo absoluto. En primer lugar las condiciones no son necesarias sino suficientes para asegurar la existencia de los extremos. En segundo lugar, el teorema sólo hace afirmaciones sobre la existencia de extremos, pero no proporciona un método para hallarlos.

Algunas cuestiones básicas

1. ¿Todas las funciones presentan extremos relativos y/o absolutos?
   Tal como ocurre con las funciones de una variable, en las de dos o más variables, no todas las funciones presentan extremos relativos. Ejemplo: z = x + y, cuyo gráfico es un plano en el espacio de tres dimensiones, no tiene extremos relativos. Tal como ocurre con las funciones de una variable, una función de varias variables puede presentar extremos relativos y no presentar extremos absolutos, y viceversa. La función z = 3 representa un plano paralelo al plano Oxy, a distancia 3 en el sentido positivo de la cota. Todos los puntos (x,y) cumplen con las definiciones de extremos relativos y absolutos en sentido amplio. Dicha función no presenta extremos en sentido estricto.

2. ¿Cómo pueden obtenerse los puntos de extremos relativos?
   El problema es bastante complicado si no existe alguna de las derivadas parciales de la función. Supongamos que z = f(x,y) es derivable $\forall(x,y) \in D(f)$. Entonces, puede haber puntos de extremos relativos en los puntos interiores de D(f) que son solución del sistema:

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

   Los puntos que satisfacen las condiciones (A) se llaman ***puntos estacionarios***. Si en un punto una de las derivadas parciales no existe y las restantes derivadas se anulan, entonces dicho punto se denomina ***punto crítico.*** Aunque no analizaremos estos problemas en el curso (funciones con puntos críticos), la detección de estos puntos es relevante porque también son candidatos a ser puntos extremos (relativos o absolutos).

   Obsérvese que –si existen f_x y f_y– las condiciones (A) en los puntos interiores de D(f) son necesarias, pero no suficientes para la existencia de extremos relativos. En otras palabras, para encontrar los extremos relativos, estos se pueden encontrar resolviendo el sistema (A), pero no todas las raíces del sistema son de puntos extremos.

3. ¿Cómo se puede saber si los puntos que satisfacen (A) son o no puntos de extremos relativos, y en caso afirmativo, si son mínimos o máximos? Para responder a esta pregunta vamos a hacer un nuevo supuesto (que si no se cumple, entonces el problema se complica). Supuesto: z = f(x,y) admite derivadas segundas continuas $\forall(x,y) \in D(f)$. Entonces se definen la **matriz *hessiana*** y su correspondiente determinante:

$$|H(x,y)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

y se sigue la siguiente regla general para cada punto (x_0,y_0) que satisface (A):

- Si $|H(x_0,y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ f presenta un mínimo relativo en (x_0,y_0).
- Si $|H(x_0,y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ f presenta un máximo relativo en (x_0,y_0).
- Si $|H(x_0,y_0)| < 0 \Rightarrow$ f no tiene extremos relativos en (x_0,y_0).
- Si $|H(x_0,y_0)| = 0 \Rightarrow$ no se puede saber qué ocurre en (x_0,y_0) por aplicación de esta regla, y se necesitan otros instrumentos para seguir analizando.

Si la función es de más de dos variables, entonces la regla del ***hessiano*** se generaliza así:

H) $f(x_1,x_2,.....,x_n)$
p es un punto estacionario de la función
H es la matriz hessiana, donde $h_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i . \partial x_j}$
λ_i son los valores propios de **H**

T) Si $\lambda_i > 0$ para todo i, entonces f tiene un mínimo relativo en **p**
Si $\lambda_i < 0$ para todo i, entonces f tiene un máximo relativo en **p**
Si algún $\lambda_i > 0$ y otro $\lambda_j < 0$, entonces f tiene un punto de silla en **p**
Si algún $\lambda_i = 0$ y los restantes valores propios son de igual signo, entonces no se sabe qué ocurre en **p** y se necesitan otros instrumentos de análisis.

4. Hasta aquí hemos visto cómo encontrar extremos relativos. Ahora, ¿cómo se pueden obtener los puntos de extremos absolutos de la función? Supuesto: z = f(x,y) admite derivadas primeras y segundas continuas $\forall(x,y) \in D(f)$. Entonces, para obtener extremos absolutos se pueden seguir las siguientes reglas.

Regla 1: Dominio cualquiera

z = f(x,y) presenta en (x_0,y_0) un único mínimo relativo y f es convexa en D(f). Entonces, en (x_0,y_0) f presenta un mínimo absoluto.

z = f(x,y) presenta en (x_0,y_0) un único máximo relativo y (-f) es convexa en D(f). Entonces, en (x_0,y_0) f presenta un máximo absoluto.

Regla 2: Dominio cerrado

- Se estudia la existencia de extremos relativos en el interior del dominio.
- Se estudia el comportamiento de f en la frontera del dominio, para encontrar candidatos a mínimo o máximo absolutos.
- Se encuentran los extremos absolutos comparando los extremos relativos del interior con los candidatos de la frontera.

Regla 3: Dominio restringido con restricciones de igualdad

- Se aplica el método de los Multiplicadores de Lagrange para encontrar puntos de extremos relativos.
- Se estudia la concavidad / convexidad de la f o algún método alternativo (como por ejemplo el signo de la función en un entorno de los puntos que proporciona el método) para determinar si los extremos relativos son también absolutos.

Regla 4: Dominio restringido con restricciones de desigualdad

- Se aplica el Teorema de Kuhn-Tucker para obtener puntos de extremos relativos.
- Si f y las funciones que definen las restricciones son convexas y diferenciables, entonces Kuhn-Tucker proporciona los puntos de extremos absolutos.

Veremos a continuación algunos ejemplos de aplicación de las Reglas 1 y 2. En la Sección 21 se estudian los métodos de Lagrange y Kuhn-Tucker.

Ejemplo 1: Sea f: $f(x, y) = x^2 - x.y + y^2$ con $D(f) = R^2$. Se trata de hallar mínimos y máximos relativos y absolutos. En primer lugar observamos que el dominio de f es convexo. En segundo lugar, observamos que la función f es diferenciable por tratarse de una función polinómica. En consecuencia, si existen extremos relativos, los mismos se encuentran en los puntos estacionarios. ¿Cuántos puntos estacionarios hay?

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.x - 1 = 0 \\ 2.y - 1 = 0 \end{cases}$$

Hay un único punto estacionario: (½, ½). Probaremos, mediante la regla del hessiano, que se trata de un punto de mínimo relativo.

$\left|H(x,y)\right| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ $\forall$ (x, y) $\in$ R^2. En particular, el determinante hessiano es mayor que cero en el punto (½, ½). Como además, en dicho punto la derivada de segundo orden con respecto a x es positiva, $f_{xx}(½, ½) = 2$, entonces la función f presenta en dicho punto un mínimo relativo. Además, no existen máximos relativos, porque si los hubiera, deberían estar en los puntos estacionarios.

Finalmente, el punto de mínimo relativo, ¿es también de mínimo absoluto? De acuerdo con la **Regla 1**, alcanzaría con verificar que f es una función convexa. Y efectivamente, f es convexa porque se cumple que el determinante hessiano es ≥ 0 y también la Traza(H_f) es ≥ 0. Entonces el punto (½, ½) es de mínimo absoluto, y el valor mínimo de la función es: f(½, ½) = ¼.

Ejemplo 2: Sea f: $f(x, y) = x^2 - y^2$ con $D(f) = R^2$. Se trata de hallar mínimos y máximos relativos y absolutos, si existen.

Es fácil advertir que la función no está acotada. Por ejemplo, si y = 0, $f(x, 0) = x^2$ toma valores tan grandes como se desee, y si x = 0 entonces $f(0, y) = - y^2$ toma valores tan grandes como se desee, pero con signo negativo. Entonces, si f no está acotada, no tiene ni máximo ni mínimo absolutos. Pero podría tener extremos relativos. Para hallarlos, calculamos los puntos estacionarios (no hay puntos críticos, por tratarse de una función polinómica).

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.x = 0 \\ -2.y = 0 \end{cases}$$

Entonces, el único punto estacionario es (0, 0). Se cumple que f(0, 0) = 0. ¿Se trata de un punto de extremo relativo? Si aplicamos la regla del hessiano resulta:

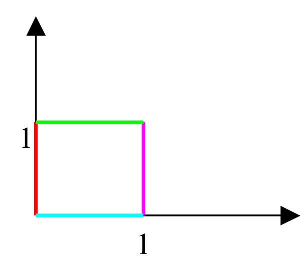
$|H(x, y)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$, y de acuerdo con dicha regla, en (0, 0) no hay puntos extremos.

¿Qué es lo que ocurre con la función en (0, 0)? Ocurre que en cualquier *bola*[3] centrada en (0, 0) hay puntos donde la función es mayor que f(0, 0) y también hay puntos donde la función es menor que f(0, 0). Como en (0, 0) la función se anula, alcanza con observar que en todo círculo centrado en (0, 0) hay puntos donde la función toma valores positivos y negativos. Si (x, y) ≠ (0, 0) y x = 0, entonces f(0, y) = - y^2, que toma siempre valores negativos. Si (x, y) ≠ (0, 0) y y = 0, entonces f(x, 0) = x^2, que toma siempre valores positivos. Entonces en (0, 0) no hay extremos relativos.

Cuando un punto estacionario no es de extremo relativo, se dice que es un ***punto de silla***.

Ejemplo 3: Sea f: f(x, y) = $x^2 - x.y + y^2$ con D(f) = {(x, y): 0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1}. Se trata de hallar mínimos y máximos relativos y absolutos. Como vimos en el Ejemplo 1 la función tiene un único punto estacionario, (½, ½), que corresponde a un mínimo relativo, y que cae dentro del dominio de esta nueva función. Como además, la función es convexa (en un dominio convexo), (½, ½) es también un punto de mínimo absoluto. Por el Teorema de Weierstrass sabemos, además, que la función tiene máximo absoluto porque f es una función continua en un dominio cerrado y acotado (el dominio de f es un cuadrado de lado 1). Como no existen otros puntos estacionarios, el punto de máximo absoluto debe estar sobre la frontera del dominio. En este caso la frontera está formada por cuatro segmentos:

I) 0 ≤ x ≤ 1, y = 0
II) 0 ≤ x ≤ 1, y = 1
III) 0 ≤ y ≤ 1, x = 0
IV) 0 ≤ y ≤ 1, x = 1



Analicemos el comportamiento de la función f en los puntos de la frontera.

I) 0 ≤ x ≤ 1, y = 0 ⇒ f(x, y) = f(x, 0) = x^2, que tiene su máximo en x = 1. Entonces, candidato a punto de máximo absoluto: (1, 0). Es f(1, 0) = 1.

[3] Se denomina así al interior de un círculo, de una esfera o, en más de tres variables, para referirse al conjunto de puntos que dista menos de una cierta distancia de un punto que se toma como centro.

II) $0 \leq x \leq 1$, $y = 1 \Rightarrow f(x, y) = f(x, 1) = x^2 - x + 1$. Su derivada se anula en ½, donde de acuerdo con el signo presenta un mínimo. El signo de la derivada de la función con respecto a x es negativo entre 0 y ½, y positivo entre ½ y 1. La función es decreciente entre 0 y ½, y creciente entre ½ y 1. En consecuencia, los candidatos a punto de máximo están en x = 0 y en x = 1. Resultan: $f(0, 1) = f(1, 1) = 1$

III) $0 \leq y \leq 1$, $x = 0$; se prueba que (0, 1) es candidato a máximo y resulta $f(0, 1) = 1$.

IV) $0 \leq y \leq 1$, $x = 1$; se prueba que los candidatos son (1, 0) y (0, 1), donde la función toma el valor 1.

En resumen, la frontera agrega tres puntos candidatos a máximo absoluto, en los cuales la función toma el mismo valor: $f(0, 1) = f(1, 0) = f(1, 1) = 1$. Por tanto, el máximo absoluto de la función es 1, y dicho máximo se alcanza en tres puntos, que son tres de los cuatro vértices del cuadrado que define el dominio.

Repartido Práctico 20: Extremos en Funciones de Varias Variables

Ejercicio 1

Hallar, si existen, los extremos relativos de las siguientes funciones. Mediante la regla de la derivada segunda decidir si se trata de máximos o mínimos relativos.

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 6x + 4y$
b) $f(x,y) = x.y - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$
c) $f(x,y) = y - y^2 - 3x - 6x^2$
d) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 9x + 1$
e) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x^3$
f) $f(t,k) = -3.t.k + t^3 + k^3$
g) $f(x,y) = (y^2 - 4).(e^x - 1)$

Ejercicio 2

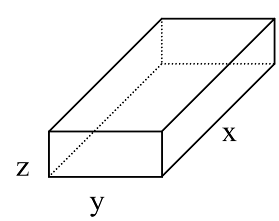
Una fábrica de calzado produce pares de zapatos (Z) y botas (B), con costos medios de producción constantes iguales a \$60 y \$70 respectivamente. Las funciones de demanda de los productos dependen de los precios de venta de ambos:

$$q_Z = 5.p_B - 5.p_Z \qquad\qquad q_B = 5.p_Z - 10.p_B + 500$$

a) Hallar los precios de venta de ambos productos que maximizan la ganancia de la fábrica (asúmase que el máximo relativo es también máximo absoluto).
b) ¿Cuál sería la demanda por producto si se decide vender a los precios que hacen máxima la ganancia? ¿Cuál sería la ganancia máxima?
c) ¿Cuánto se perdería de ganar si se decide vender a $p_Z = 81$ y $p_B = 86$?

Ejercicio 3

Una piscina rectangular debe tener un volumen de 40 m^3. El costo del m^2 del material para el fondo de la piscina es \$80. El costo del m^2 del material del frente y la parte de atrás es \$64 y el costo del m^2 del material para las paredes laterales es \$27. Hallar las dimensiones de la piscina (x=largo, y=frente, z=profundidad) de costo mínimo.



Ejercicio 4

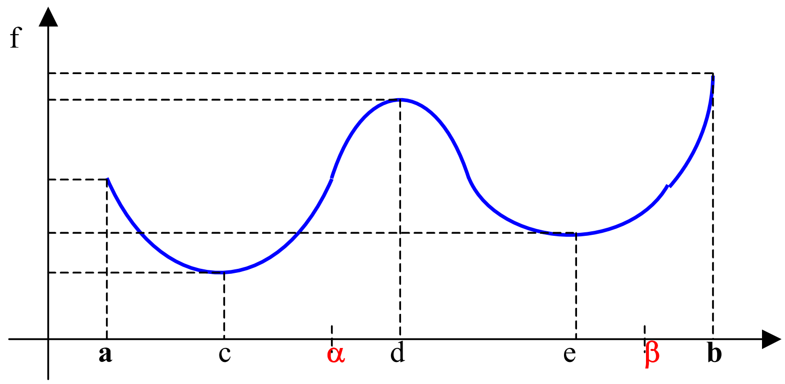
A y B son las únicas dos empresas en un mercado que producen el mismo producto (A y B forman un *duopolio*). Las empresas deciden ponerse de acuerdo en un precio único y en los niveles de producción (en este caso se dice que entran en *colusión*). La función de demanda del producto es $q_A + q_B = 92 - p$. Las funciones de costo para A y B son respectivamente: $C_A = 10q_A$ y $C_B = q_B^2/2$.

a) Demostrar que la función de utilidad del duopolio es: $U = p.q_A - C_A + p.q_B - C_B$.
b) Determinar cómo debe distribuirse la producción entre A y B para maximizar la utilidad del duopolio.

21. OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES: LAGRANGE, KUHN-TUCKER

Restricciones con igualdades

Los precios y las cantidades no pueden tomar valores cualesquiera. Los precios no pueden ser negativos y las cantidades, además de la condición de no negatividad, suelen estar acotadas por la capacidad máxima de producción. El presupuesto implica una restricción adicional al nivel de la producción, conocida como *restricción presupuestaria*. Estos son sólo algunos ejemplos de las restricciones que pueden aparecer en los problemas de optimización.



En el gráfico precedente la función depende de una sola variable. En el intervalo [a, b] el máximo absoluto de la función f se encuentra en $x = b$, $f_{MAX} = f(b)$; mientras que el mínimo absoluto de la función en el mismo intervalo se encuentra en $x = c$, siendo el valor del mínimo, $f_{MIN} = f(c)$. Pero si el dominio de la función se restringe al intervalo $[\alpha, \beta]$, el máximo y el mínimo de la función cambian, y se encuentran ahora en los puntos de abcisas $x = d$ y $x = e$ respectivamente. Cuando se restringe el dominio, como en este caso, se encuentra que:

$$\text{MAX de f en } [a, b] \geq \text{MAX de f en } [\alpha, \beta]$$
$$\text{MIN de f en } [a, b] \leq \text{MIN de f en } [\alpha, \beta]$$

En los problemas de optimización que se presentaron en la sección anterior, el supuesto implícito era que las variables de la función a optimizar eran independientes. Ahora nos ocuparemos de problemas de optimización donde eventualmente las variables del problema están relacionadas entre sí, como en el ejemplo que sigue.

Supongamos que una canasta de consumo está formada por k artículos. Un consumidor puede decidir cuántas unidades de cada artículo, x_i, habrá de adquirir en un período de tiempo. Los precios por unidad son p_i y el presupuesto para consumo es C. Supongamos que existe una función de utilidad que a cada combinación posible de cantidades de artículos, a cada vector $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k)$, le asigna un valor. El problema consiste en elegir el vector $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k)$ que maximiza la función de utilidad, sujeto a la restricción presupuestaria:

$$\text{MAX } U(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k)$$
$$\text{Restricción: } \sum_{i=1}^{k} p_i . x_i = C$$

La restricción con el signo de desigualdad, $\sum_{i=1}^{k} p_i . x_i \leq C$, podría ser más apropiada en éste y otros problemas en que las cantidades a adquirir no son perfectamente divisibles. Las restricciones con desigualdades aparecen naturalmente al tomar en cuenta que las cantidades a adquirir no pueden ser negativas. En este problema habría que introducir k restricciones de la forma x_i. Por el momento postergaremos el tratamiento de los problemas de optimización con restricciones de desigualdad.

Un problema de optimización con restricciones de igualdad se conoce como un *problema lagrangiano*[1] . Los problemas lagrangianos más generales son del tipo que sigue.

$$\left.\begin{matrix} MAXIMIZAR \\ MINIMIZAR \end{matrix}\right\} f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) \ \ sujeto \ \ a \ \ las \ \ condiciones \left\{\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) = C_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) = C_2 \\ ------------- \\ g_r(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) = C_r \end{array}\right.$$

Para resolver el problema de optimización Lagrange plantea introducir nuevas variables, λ_j, una por cada restricción, de manera que el problema de encontrar un vector de k variables que optimice la función f se transforma en un problema de optimización con (k + r) variables: $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_r$. Las variables λ_j se conocen con el nombre de *multiplicadores de Lagrange*, y se introducen para definir una nueva función, llamada *función lagrangiana*:

$$F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_r) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j . \left[C_j - g_j(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r)\right]$$

Se demuestra que si $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_k^*\right)$ es un punto estacionario de f, es decir, se verifica que $\nabla f = 0$, entonces $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_r$ tales que $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_r\right)$ es un punto estacionario de F (es decir, $\nabla F = 0$). Aunque parezca paradójico, al introducir r variables adicionales, muchas veces resolver el sistema $\nabla F = 0$ es más sencillo que resolver $\nabla f = 0$.

Observaciones

1. La aplicación del método lagrangiano exige que la función f y las funciones g_j sean diferenciables (que admitan derivadas parciales de primer orden continuas respecto de $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$).
2. El problema lagrangiano más sencillo consta de sólo dos variables y una restricción. El mismo puede formularse así:
$$\left.\begin{matrix} MAXIMIZAR \\ MINIMIZAR \end{matrix}\right\} f(x, y) \ \ sujeto \ \ a \ \ la \ \ condición \ \ g(x, y) = C.$$
3. Algunos autores prefieren escribir la función lagrangiana como función sólo de las variables x_i, por cuanto las λ_j pueden verse como parámetros más que como variables o bien porque se trata de variables de una naturaleza diferente. Algunos

[1] José Luis Lagrange (1736-1813) notable matemático francés, conocido principalmente como geómetra.

autores prefieren escribir dentro del paréntesis recto la expresión con signo cambiado: $g_j(x_1, x_2, ..., x_r)$ - C_j. La opción que hemos hecho quedará plenamente justificada más adelante con la interpretación económica. En el caso de restricciones con desigualdades se plantearán variantes.

El método lagrangiano consiste en:

1º) Hallar las derivadas parciales de primer orden de la función lagrangiana respecto de las variables x_1, x_2, ….. , x_k e igualarlas a cero: $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$.

2º) Resolver el sistema formado por las k ecuaciones $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ y las r restricciones $g_j(x_1, x_2, ….. , x_k) = C_j$. Se tiene un sistema de (k + r) ecuaciones con (k + r) incógnitas.

3º) Si $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\right)$ es una raíz del sistema, entonces el vector $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\right)$ es un candidato para resolver el problema de optimizar f sujeto a las restricciones.

Observaciones

1. El sistema puede no tener raíces.
2. Si existen raíces del sistema, puede ser difícil encontrarlas (las ecuaciones podrían contener expresiones complicadas como fracciones algebraicas, radicales, exponenciales o polinomios de grados altos).
3. Si existen raíces del sistema, $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\right)$, puede que el vector $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\right)$ no resuelva el problema de optimización. Por ejemplo, el vector podría resolver un problema de minimización cuando el objetivo es maximizar f.

La siguiente proposición levanta, en algunos casos particulares, la limitación que se plantea en la tercera observación.

Condición suficiente para la existencia del óptimo

<table>
<tr><td colspan="2">$\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r\right)$ es raíz del sistema con (k + r) incógnitas</td></tr>
<tr><td>F es cóncava
$\Downarrow$
$\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\right)$ resuelve el problema de maximización.</td><td>F es convexa
$\Downarrow$
$\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_k^*\right)$ resuelve el problema de minimización.</td></tr>
</table>

Ejemplo 1: Un consumidor debe decidir cómo distribuye un presupuesto semestral de $1.750 entre entradas de cine (x) y entradas de teatro (y), las cuales cuestan $50 y $100 respectivamente. Se conoce la función de utilidad del consumidor, U(x,y). Es $U(x, y) = 150 – 0,1.x^2 – y – 0,25.y^2$. Hallar la combinación de entradas de cine y de teatro que maximiza la función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria.

Por razones de simplicidad, vamos a transformar el problema de maximización en un problema de mínimo. Obsérvese que MAX U(x, y) = MIN [– U(x, y)].

$$\text{MIN} - U(x, y) = \text{MIN}\ [-150 + 0{,}1.x^2 + y + 0{,}25.y^2]$$

Restricción: $50.x + 100.y = 1.750$

$$F(x, y, \lambda) = -150 + 0{,}1.x^2 + y + 0{,}25.y^2 + \lambda.[1.750 - 50.x - 100.y]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0{,}2.x - 50.\lambda \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 0{,}5.y - 100.\lambda \\ 50.x + 100.y = 1750 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto estacionario } (x_0, y_0) = (15, 10) \text{ con } \lambda = 3.$$

¿F es convexa? $\lambda.[1.750 - 50.x - 100.y]$ es convexa por ser una función lineal. Entonces, para que F sea convexa, alcanza con probar que –U lo es (pues suma de funciones convexas es convexa). La matriz hessiana de –U(x, y) es $\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ con todos sus valores propios positivos, por tanto –U(x, y) es una función convexa, y también lo es F. Entonces, (15, 10) minimiza –U(x, y). Entonces, (15, 10) maximiza U(x, y). ¿Cuál es el máximo de la función de utilidad? U(15, 10) = 92,5.

Ejemplo 2: Una empresa industrial tiene tres establecimientos para la producción de un único producto. Sean x, y, z las cantidades mensuales que producen los tres establecimientos. El costo de producción en cada establecimiento es:

$$C(x) = 100 + 0{,}025.x^2$$
$$C(y) = 100 + 0{,}5\,y + 0{,}01.y^2$$
$$C(z) = 100 + z^2$$

Se trata de minimizar el costo total mensual de producción, C(x, y, z) = C(x) + C(y) + C(z) sabiendo que en el mes se necesita producir 1.385 unidades de producto.

$$\text{MIN } C(x, y, z) = 300 + 0{,}025.x^2 + 0{,}5\,y + 0{,}01.y^2 + z^2$$
Restricción: $x + y + z = 1.385$

Definimos $F(x, y, \lambda) = 300 + 0{,}025.x^2 + 0{,}5\,y + 0{,}01.y^2 + z^2 + \lambda.[1.385 - (x + y + z)]$, calculamos las derivadas parciales y seguimos los pasos del método lagrangiano.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0{,}05.x - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0{,}5 + 0{,}02.y - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2.z - \lambda = 0 \\ x + y + z = 1.385 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto estacionario } (400, 975, 10) \text{ con } \lambda = 20.$$

Como la matriz hessiana de C es $\begin{pmatrix} 0{,}05 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}02 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, sus valores propios son todos positivos (son los valores de la diagonal principal) y por tanto la función C es convexa. Entonces, en el punto (400, 975, 10) la función C presenta un mínimo absoluto. El costo mínimo de producción es: C(400, 975, 10) = 13.593,75.

Ejemplo 3: Se trata de MINIMIZAR f(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las condiciones: x + y + z = 1; 2.x – y – z = 5.

Definimos F(x, y, z, λ, ρ) = $x^2 + y^2 + z^2$ + λ.[1 – x – y – z] + ρ.[5 – 2.x + y + z].

$$\begin{cases} F_x = 2.x - \lambda - 2.\rho = 0 \\ F_y = 2.y - \lambda + \rho = 0 \\ F_z = 2.z - \lambda + \rho = 0 \\ x + y + z = 1 \\ 2.x - y - z = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{Punto estacionario } (2, -1/2, -1/2) \text{ con } \lambda = 2/3 \text{ y } \rho = 5/3.$$

Sabemos que (2, -1/2, -1/2) es un punto estacionario, pero por la convexidad de F, podemos asegurar que se trata de un punto de mínimo absoluto. El mínimo de la función F es: F(2, -1/2, -1/2) = 9/2. ¿Cuál habría sido el mínimo de F si no hubiera restricciones? El mínimo de ($x^2 + y^2 + z^2$) se da en el punto (0, 0, 0) y es F(0, 0, 0) = 0.

Interpretaciones económicas de los multiplicadores de Lagrange

A) Consideremos el problema MAX f(x, y) sujeto a la restricción g(x, y) = C. Supongamos que el vector (x_0, y_0) resuelve el problema. ¿Qué pasa si cambia el valor de C? En general, también cambia la solución. Entonces las coordenadas del vector (x_0, y_0) dependen del valor de C. Supongamos que $x_0(C)$ y $y_0(C)$ son funciones diferenciables de C. Entonces, el máximo de la función f, f[$x_0(C)$, $y_0(C)$] es una función de C. Pero al aplicar el método de Lagrange ocurre que, en general, también la variable λ depende de C. La propiedad relevante, que se cumple en condiciones muy generales, es que:

$$\frac{\partial f\left[x_0(C), y_0(C)\right]}{\partial C} = \lambda(C)$$

Por tanto, el multiplicador de Lagrange, λ, es la tasa de variación del valor óptimo de f cuando varía la constante de la restricción. Si simbolizamos una pequeña variación de C con la expresión dC, entonces:

$$f[x_0(C+dC), y_0(C+dC)] - f[x_0(C), y_0(C)] \cong \lambda(C).dC$$

Si f es una función de utilidad o de ganancias y C es una restricción presupuestaria entonces, un incremento de los recursos en dC origina un aumento aproximado de λ(C).dC en la utilidad o beneficio.

En el Ejemplo 1 teníamos un presupuesto de $1.750 para gastar en cine y teatro. El óptimo se obtenía para 15 entradas de cine y 10 de teatro, con λ = 3. La utilidad máxima era 92,5. Si las cantidades de producto fueran perfectamente divisibles (obsérvese que no es éste el caso), entonces un aumento de \$1 (dC) en el presupuesto generaría un incremento de la utilidad del consumidor de aproximadamente 3 unidades (en las que se mide la utilidad): $\lambda(C).dC = 3.1 = 3$.

En Economía, cuando el problema es de recursos, λ se denomina el *precio sombra* de una unidad del recurso C.

B) Supongamos que en el mismo problema MAX f(x, y) sujeto a la restricción g(x, y) = C, la función f es una función de utilidad, que x e y son las cantidades de una canasta de consumo de dos artículos, y $g(x, y) = p_1.x + p_2.y$ es la restricción presupuestaria, donde p_1 y p_2 son los precios de los respectivos artículos de la canasta.

La función lagrangiana es: $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda[C - p_1.x - p_2.y]$. El método lagrangiano conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x,y) - \lambda.p_1 = 0 \\ f_y(x,y) - \lambda.p_2 = 0 \\ p_1.x + p_2.y = C \end{cases}$$

El punto (x_0, y_0) que resuelve el problema verifica las tres ecuaciones. Trabajando con las dos primeras se deduce:

$$\lambda = \frac{f_x(x_0, y_0)}{p_1} = \frac{f_y(x_0, y_0)}{p_2}$$

Como ya hemos visto, $f_x(x_0, y_0)$ y $f_y(x_0, y_0)$ proporcionan la utilidad marginal de un incremento en el consumo de una unidad adicional de uno de los artículos (permaneciendo el consumo del otro constante) a partir del vector de consumo (x_0, y_0). Entonces se deduce que si (x_0, y_0) maximiza la utilidad del consumidor sujeto a la restricción presupuestaria, entonces el cociente entre la utilidad marginal de un artículo y su precio unitario tiene que ser el mismo para los dos artículos de la canasta (para todos los artículos de la canasta, si hay más de dos). En el problema de optimizar la función de utilidad del consumidor, la cantidad demandada de un producto compite con la demanda por otros productos por disponerse de un presupuesto restringido. En consecuencia, la cantidad demandada de un producto depende de:

- el precio del producto
- el presupuesto
- el precio de otros productos
- las utilidades marginales del producto y de los otros que integran la canasta.

Obsérvese que el multiplicador de Lagrange es justamente la constante que resulta de dividir la utilidad marginal de un producto (en el óptimo) sobre su precio unitario. Cuando la canasta de consumo tiene k productos:

$$\lambda = \frac{\dfrac{\partial f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k)}{\partial x_i}}{p_i} \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,k$$

Restricciones con desigualdades

Cuando se trata de optimizar una función de utilidad del consumidor sujeta a la restricción presupuestaria, la condición $\sum_{i=1}^{k} p_i.x_i = C$ parece poco realista por cuanto el consumidor muchas veces no piensa en gastar una cantidad <u>C exacta</u> sino que está dispuesto a gastar <u>hasta C</u>, de manera que una formulación más apropiada para la restricción sería $\sum_{i=1}^{k} p_i.x_i \leq C$. Las restricciones del tipo $x_i \geq 0$ para las cantidades también deberían ser incluidas en las condiciones del problema. En esta sección abordaremos este tipo de cuestiones.

El problema más general de optimización sujeto a restricciones con desigualdades es como sigue.

Teorema de Kuhn-Tucker (Caso general)

(P) $$\left.\begin{matrix} MAXIMIZAR \\ MINIMIZAR \end{matrix}\right\} f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) \ \ sujeto \ \ a \ \ las \ \ condiciones \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) \leq C_1 \\ g_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) \leq C_2 \\ ------------- \\ g_r(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) \leq C_r \end{cases}$$

H) Se define

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j.\left[g_j(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r) - C_j\right]$$

Se cumple:

(C) $$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 & i = 1,2,\ldots\ldots,k \\ \lambda_j.\left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) - C_j\right] = 0 & j = 1,2,\ldots\ldots,r \\ g_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq C_j & \\ \lambda_j \geq 0 & j = 1,2,\ldots\ldots,r \end{cases}$$

T) Si existen puntos $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_k^*\right)$ que satisfacen todas las condiciones (C) y el problema tiene solución, entonces alguno de los puntos $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots\ldots, x_k^*\right)$ resuelve el problema de optimización.

Observaciones

1. El conjunto de puntos que verifican todas las restricciones se denomina ***conjunto admisible o conjunto factible***. El conjunto factible no es otra cosa que un dominio restringido para f donde interesa hallar el máximo absoluto y/o el mínimo absoluto de la función.

2. Alguna o algunas de las restricciones g pueden ser tan sencillas como $x_i \geq 0$ que expresa la condición de no negatividad de la variable x_i.
3. Alguna de las restricciones podría tener la forma $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq C$ (con la desigualdad "mayor o igual que"). Para tener un problema en la forma (P) esta restricción se modificará multiplicando la desigualdad por (-1) así:
$$- g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq - C$$
4. Alguna de las restricciones podría tener la forma $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = C$. Para llevar el problema a la forma (P), dicha restricción se ha de sustituir por las dos desigualdades $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq C$ y $-g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq -C$. Esta equivalencia de las restricciones con desigualdad con las restricciones con igualdad permite llevar cualquier problema lagrangiano a un problema de optimización con restricciones con desigualdades del tipo (P).
5. Cuando el vector que resuelve el problema de optimización verifica la condición $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) < C$ (con el signo de menor estricto), se dice que la restricción $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq C$ está ***inactiva o no saturada***. Interpretación económica: si $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq C$ es una restricción presupuestaria y en el óptimo es $g(x_1, x_2, \ldots, x_k) = C$ ello significa que para alcanzar el óptimo hay que gastar todo el presupuesto disponible.
6. Si la función objetivo f es lineal y las restricciones g_j son todas funciones lineales, entonces el problema (P) se conoce con el nombre de ***problema de programación lineal***. Para este tipo de problemas existen métodos específicos que no veremos en el curso, pues también se pueden resolver, como los problemas de programación no lineal, por el método que se expone a continuación.

El *método general* establece condiciones necesarias para la existencia del óptimo, pero las mismas no son suficientes: los puntos raíces del sistema pueden ser óptimos, pero también pueden ser puntos de silla. Por otra parte, la resolución del sistema de ecuaciones e inecuaciones exige una importante cantidad de trabajo.

Por los motivos expuestos, y con la intención de simplificar la tarea de encontrar solución en los problemas de optimización con restricciones con desigualdad, vamos a considerar algunos casos particulares para los cuales las condiciones de Kuhn-Tucker garantizan la obtención del óptimo. Los casos particulares refieren a la concavidad / convexidad[2] de las funciones f y g_j y a la no negatividad de las variables x_i.

<u>Problema 1</u> MINIMIZAR $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$

$$\textit{sujeto a las condiciones} \quad (A) \quad \begin{cases} g_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq C_j \quad con \quad j = 1,2,\ldots,r \\ \\ x_i \geq 0 \quad con \quad i = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

Caso particular de Kuhn-Tucker

H) f, $g_1, g_2, \ldots, g_r$ son diferenciables y ***<u>convexas</u>***

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j . \left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_r) - C_j \right]$$

[2] El mismo análisis, con casos un poco más generales, implica analizar la cuasiconcavidad / cuasiconvexidad de las funciones objetivo y de restricciones (Ver SYDSAETER y HAMMOND, obra citada en la bibliografía del curso).

$\left(x_1^*, x_2^*, \ldots.., x_k^*\right)$ es un punto estacionario de F que verifica las condiciones (A) y las condiciones (B):

$$(B)\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots..,k \\ \lambda_j.\left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_k) - C_j\right] = 0 \quad j = 1,2,\ldots..,r \\ \lambda_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots..,r \end{cases}$$

T) $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots.., x_k^*\right)$ es el mínimo absoluto de f sujeto a las restricciones.

Para aplicar el método de Kuhn-Tucker al Problema 1 es necesario:
- verificar que las funciones f, g_1, g_2, … , g_r son diferenciables y ***convexas***
- encontrar los puntos que satisfacen las condiciones (A) y (B).

Observación
Cuando el problema es de minimización, el planteo de la función lagrangiana exige que en el paréntesis recto se registre $g_j(x_1, x_2, \ldots.., x_k) - C_j$, y no con los signos cambiados, tal como registramos en los problemas de optimización con restricciones de igualdad.

Problema 2 MAXIMIZAR $f(x_1, x_2, \ldots.., x_k)$

$$sujeto \;\; a \;\; las \;\; condiciones \quad (A)\begin{cases} g_j(x_1, x_2, \ldots.., x_k) \leq C_j \quad con \quad j = 1,2,\ldots,r \\ \\ x_i \geq 0 \quad con \quad i = 1,2,\ldots,k \end{cases}$$

Obsérvese que el problema MAX f es el mismo problema que MIN (-f). Entonces el Problema 2 se puede transformar en un Problema 1, lo que exige verificar que (-f), g_1, g_2, … , g_r son diferenciables y ***convexas***.

Ejemplo 1: Minimizar la función $f(x, y) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ sujeto a las restricciones $\begin{cases} 2.x + 3.y \geq 6 \\ 3.x + 2.y \leq 12 \end{cases}$, x e y no negativas.

En primer lugar, vamos a llevar el problema a la forma (P). Para ello, la primera restricción se trasforma en: $- 2.x - 3.y \leq - 6$. En segundo lugar analicemos si f, g_1 y g_2 son funciones diferenciables y convexas. g_1 y g_2 lo son porque se trata de funciones lineales. Para saber si f lo es:

$f_x = 2.(x - 4)$
$f_y = 2.(y - 4)$
$f_{xx} = 2$
$f_{xy} = 0$
$f_{yy} = 2$

f es diferenciable por ser un polinomio y también es convexa porque el determinante de la matriz hessiana es positivo, $\left|H_f\right| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \;\; \forall(x,y)$ y la traza de

H_f también es positiva: $H_f = 4 \geq 0 \; \forall(x,y)$. Ahora se trata de encontrar los puntos (x, y) que satisfagan a la vez las condiciones (A) y (B) según el teorema de Kuhn-Tucker. La forma habitual de trabajo consiste en analizar las condiciones con signo de igualdad, y luego, para los puntos obtenidos, verificar que se cumplan las condiciones con signo de desigualdad.

Definimos: $F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + \lambda_1.(-2.x - 3.y + 6) + \lambda_2.(3.x + 2.y - 12)$. El mínimo absoluto debe satisfacer todas las condiciones siguientes.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2.(x-4) - 2.\lambda_1 + 3.\lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2.(y-4) - 3.\lambda_1 + 2.\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1.(-2.x - 3.y + 6) = 0 \\ \lambda_2.(3.x + 2.y - 12) = 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \\ 2.x + 3.y \geq 6 \\ 3.x + 2.y \leq 12 \end{cases}$$

Se observa que la resolución del sistema de ecuaciones e inecuaciones si se trabaja en forma ordenada analizando los siguientes casos exhaustivos y excluyentes:

CASO 1: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$
CASO 2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$
CASO 3: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$
CASO 4: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$

CASO 1: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$
Sistema de ecuaciones (las inecuaciones se verifican a posteriori)

$$\begin{cases} 2.(x-4) = 0 \\ 2.(y-4) = 0 \end{cases}$$

Se obtiene la raíz única: $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (4, 4, 0, 0)$, la cual no verifica la condición: $3.x + 2.y \leq 12$.

CASO 2: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$

$$\begin{cases} 2.(x-4) + 3.\lambda_2 = 0 \\ 2.(y-4) + 2.\lambda_2 = 0 \\ 3.x + 2.y - 12 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene la única raíz: $\left(\dfrac{28}{13}, \dfrac{36}{13}, 0, \dfrac{16}{13}\right)$ que verifica todas las condiciones dadas por las inecuaciones del sistema.

CASO 3: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$

$$\begin{cases} 2.(x-4) - 2.\lambda_1 = 0 \\ 2.(y-4) - 3.\lambda_1 = 0 \\ 2.x + 3.y - 6 = 0 \end{cases}$$

Resulta en la única raíz $\lambda_1 < 0$, y por tanto no verifica todas las condiciones del sistema.

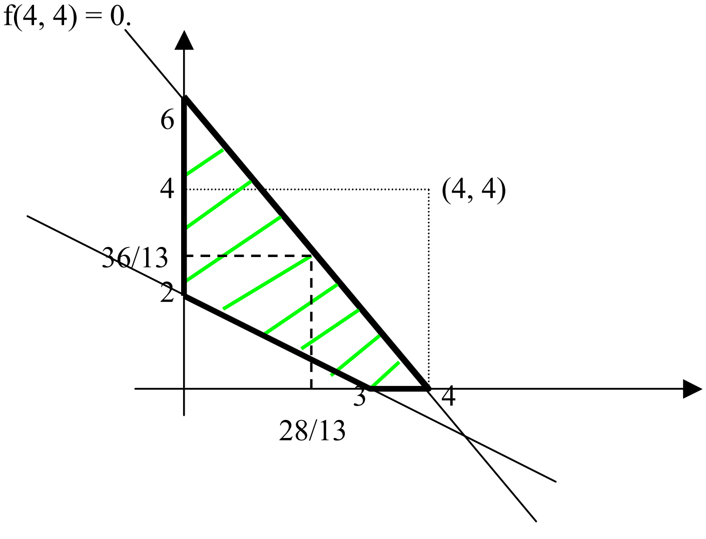
CASO 4: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$

$$\begin{cases} 3.x + 2.y - 12 = 0 \\ \\ 2.x + 3.y - 6 = 0 \end{cases}$$

Resulta que en la única raíz es $y = -6/5 < 0$, y por tanto no verifica todas las condiciones del sistema.

Entonces, la solución del problema es $(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = \left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}, 0, \frac{16}{13}\right)$. El valor mínimo de la función objetivo es: $f\left(\frac{28}{13}, \frac{36}{13}\right) = \left(\frac{28}{13} - 4\right)^2 + \left(\frac{36}{13} - 4\right)^2 = \frac{832}{169} = \frac{64}{13} \cong 4{,}9$.

Interpretación geométrica: la función $f(x, y) = (x-4)^2 + (y-4)^2$ representa en el espacio de tres dimensiones un parabaoloide cuyo vértice se ubica sobre el plano xy, en el punto (4, 4). Como la función es $f(x, y) \geq 0\ \forall(x, y)$, por ser suma de cuadrados, el mínimo de la función sin restricciones se encuentra en (4, 4) y el valor mínimo de la función es f(4, 4) = 0.



Las restricciones determinan un dominio restringido para f en forma de cuadrilátero con vértices en los puntos (3, 0), (4, 0), (0, 2) y (0, 6). El paraboloide crece en todas las direcciones a medida que se aleja del punto (4, 4). El paraboloide encuentra su mínimo en el dominio restringido en el punto (28/13, 36/13), que es un punto frontera, dado por la restricción $3.x + 2.y \leq 12$, el más “cercano” al punto (4, 4).

Si el problema del Ejemplo 1 fuera de maximización en lugar de minimización, ¿cómo se podría resolver? ¿Se trata de un problema del tipo **Problema 2**? La respuesta es negativa, porque la función (- f) en este caso no es convexa. Entonces, para resolver el problema de maximizar $f(x, y) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2$ sujeto a las condiciones del ejemplo, sólo podría resolverse aplicando los resultados del caso general. En tal caso, la función lagrangiana es:

$$F(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + \lambda_1.(- 6 + 2.x + 3.y) + \lambda_2.(12 - 3.x - 2.y) + \lambda_3.x + \lambda_4.y$$

Los dos últimos multiplicadores corresponden a las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, que en el caso general deben incorporarse en la función objetivo. Al resolver este problema se encuentra que el máximo de la función es 20 y que hay dos puntos de máximo: en (0, 2) y en (0, 6).

Ejemplo 2: El costo de producción de un producto industrial depende exclusivamente de la horas de trabajo utilizadas y del capital disponible para la producción (capital fijo más capital de giro). Las cifras refieren a un mes de producción. Los costos unitarios son:

(t) = Horas de trabajo	p_t = U$S 4, precio de la hora de trabajo
(k) = Capital en miles	p_k = U$S 8, costo de U$S1.000 de capital en un mes

Se quiere minimizar el costo mensual de producción, $C(t, k) = 4.t + 8.k$. La función de producción es del tipo Cobb-Douglas. La cantidad de unidades a producir (Q) se expresa mediante la fórmula $Q(t, k) = 5.t^{0,4}.k^{0,6}$. Si se deben producir por lo menos 1.000 unidades por mes (por ejemplo, porque los clientes exigen ese mínimo mensual), entonces las restricciones del problema son:

$$5.t^{0,4}.k^{0,6} \geq 1.000$$
$$t \geq 0$$
$$k \geq 0$$

Se trata de saber cuál es la dotación de capital y de trabajo a contratar para minimizar el costo de producción. Se trata entonces de un problema de optimización con restricciones de desigualdad. Veamos si es del tipo del **Problema 1**.

Función objetivo: $C(t, k) = 4.t + 8.k$

Restricciones: $5.t^{0,4}.k^{0,6} \geq 1.000$
$$t \geq 0$$
$$k \geq 0$$

La función objetivo es diferenciable y convexa por ser una función lineal. La función $Q(t, k) = 5.t^{0,4}.k^{0,6}$ es diferenciable a condición que $t > 0$ y que $k > 0$, lo que no genera ningún problema desde el punto de vista de la interpretación: si no hay capital o trabajo se supone que no hay producción. Sin embargo, estaríamos en problemas si la solución implicara $t = 0$ o bien $k = 0$. Para que el problema sea del tipo 1 la primera restricción la trasformamos así: $- 5.t^{0,4}.k^{0,6} \leq - 1.000$. Entonces la función g de la primera restricción es $g(t, k) = - 5.t^{0,4}.k^{0,6}$. ¿Es convexa?

$g_t(t, k) = - 2.t^{-0,6}.k^{0,6}$ $\quad$ $g_{tt}(t, k) = 1,2.t^{-1,6}.k^{0,6}$ $\quad$ $g_{tk}(t, k) = - 1,2.t^{-0,6}.k^{-0,4}$

$g_k(t, k) = - 3.t^{0,4}.k^{-0,4}$ $\quad$ $g_{kk}(t, k) = 1,2.t^{0,4}.k^{-1,4}$

Resulta $|H_g| = 1{,}44.\ t^{-1,2}.k^{-0,8} \geq 0$ para todo t > 0, k > 0, y Traza(H_g) = $1{,}2.t^{-1,6}.k^{0,6} + 1{,}2.t^{0,4}.k^{-1,4}$ también no negativo para todo t > 0, k > 0. Entonces, g es una función convexa. Estamos en las hipótesis del **Problema 1**.

$F(t, k, \lambda) = 4.t + 8.k + \lambda.[-\ 5.t^{0,4}.k^{0,6} - (-1.000)]$

El método conduce al sistema:

$$\begin{cases} 4 - \lambda.2.t^{-0,6}.k^{0,6} = 0 \\ 8 - \lambda.3.t^{0,4}.k^{-0,4} = 0 \\ \lambda.\left(1.000 - 5.t^{0,4}.k^{0,6}\right) = 0 \\ 5.t^{0,4}.k^{0,6} \geq 1.000 \\ t > 0 \\ k > 0 \\ \lambda \geq 0 \end{cases}$$

El sistema tiene la raíz dada por $t = 200.(4/3)^{0,6} \cong 237{,}68$ y $k \cong 178{,}26$ con $\lambda \cong 2{,}38$. El mínimo de la función objetivo es C(237,68; 178,26) = U$S2.376,80. La cantidad a producir en el óptimo es Q = 1.000 unidades. La producción de 1.000 unidades a costo mínimo requiere contratar por mes unas 238 horas de trabajo y disponer de un capital de U$S178.260.

Repartido Práctico 21.1: Optimización con restricciones de igualdad (Lagrange)

Ejercicio 1

En los siguientes casos hallar los puntos estacionarios y probar si se trata de extremos absolutos de las funciones condicionadas por las restricciones que se indican.

Función	**Restricciones**	
a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 6$	$2x - 8y = 20$	
b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$	$2x + y - z = 9$	
c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$	$x + y + z = 1$	$x - y + z = 1$
d) $f(x,y,z) = x.y.z$	$x + y + z = 12$	$x + y - z = 0$
e) $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$	$x + y = 2$	

Ejercicio 2

Para cumplir con un pedido de 100 automóviles, una fábrica decide distribuir la producción entre sus dos plantas de montaje. La función de costos es:

$$C(q_1,q_2) = 2q_1^2 + 140q_1 + 300q_2 + 20.000$$

donde: q_1 = cantidad de automóviles a producir en la planta 1
q_2 = cantidad de automóviles a producir en la planta 2.

Determinar el número de automóviles a producir en cada planta de montaje de forma de minimizar el costo de producción.

Ejercicio 3

La función de producción de una empresa es: $f(t,k) = 12t + 20k - t^2 - 2k^2$. Los costos de una unidad de trabajo (t) y capital (k) son respectivamente 4 y 8.

a) Si el presupuesto de la empresa es 88, determinar la combinación de factores que maximiza la producción.
b) Calcular la producción máxima dada por la restricción.
c) Si la restricción fuera una desigualdad, del tipo Presupuesto $\leq$ 88, ¿se podría obtener una producción aún mayor que la determinada en el punto anterior a menor costo?

Ejercicio 4

Una empresa tiene un presupuesto para publicidad de \$60.000 por mes, a repartir entre radio y televisión. Si se gastan "x" pesos en radio y "y" pesos en televisión, se estima que las ventas mensuales ascenderán a $V = 90.x^{1/4}.y^{3/4}$. ¿Cómo se deben asignar los \$60.000 del presupuesto publicitario para maximizar las ventas?

Repartido Práctico 21.1: Optimización con restricciones de igualdad (Lagrange)

Ejercicio 5

La función de producción de un fabricante es: $q = (1/16).[65 - 4(t-4)^2 - 2(k-5)^2]$, con un costo de \$4 por unidad de trabajo (t) y \$8 por unidad de capital. El precio de venta del producto es \$32 por unidad.

a) Expresar la Utilidad en función de t y k.
b) Hallar el máximo relativo de la función de utilidad.
c) Maximizar la utilidad como función de q, t y k, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, asumiendo como restricción la relación dada por la función de producción.
d) El máximo relativo hallado en b), ¿es también el máximo absoluto?

Ejercicio 6

Un consumidor dispone de 48 unidades monetarias para gastar en cine y teatro en el año. La entrada de cine cuesta 2 u. m. y la de teatro 3 u. m. La función de utilidad del consumidor, en relación con estos productos es $U(x,y) = x^3.y^3$, donde x = número de entradas de cine a consumir en el año y y = número de entradas de teatro en el año. ¿Cómo debe distribuir su presupuesto el consumidor para maximizar la utilidad?

Ejercicio 7

Sea $U = f(x,y)$ una función de utilidad sujeta a la restricción presupuestaria $C = x.p_X + y.p_y$. Demostrar que para maximizar la satisfacción es necesario que:

$$\lambda = \frac{f_x(x,y)}{p_x} = \frac{f_y(x,y)}{p_y}$$

donde $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ son las utilidades marginales de los productos X e Y. Se deduce de lo anterior que la satisfacción máxima se obtiene cuando el consumidor distribuye su presupuesto de forma que la utilidad marginal por unidad monetaria de X sea igual a la utilidad marginal por unidad monetaria de Y. λ se denomina la *utilidad marginal del ingreso.*

Repartido Práctico 21.2: Optimización con restricciones de desigualdad (Kuhn-Tucker)

Ejercicio 1

Sea la función objetivo a minimizar: $f(x,y) = 4.x^2 + y^2$
sujeta a las restricciones: $x + 2.y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 1$.

a) Probar que f es una función convexa
b) Hallar el mínimo absoluto de f sujeto a las restricciones.

Ejercicio 2

Sea la función objetivo a maximizar: $f(x,y) = 20 - 4.x^2 - y^2$
sujeta a las restricciones: $x + 2.y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 1$.

a) Probar que -f es una función convexa.
b) Hallar el máximo absoluto de f sujeto a las restricciones.

Ejercicio 3

Sea la función de costos: $C(t,k) = t^2 + k^2$, sujeta a las restricciones: $t + k \geq 2$, $t \geq 0$ y $k \geq 0$. Hallar la combinación de factores de costo mínimo.

Ejercicio 4

Retomar el Ejercicio 3 del Repartido Práctico 20.1. Maximizar la función de producción, aplicando Kuhn-Tucker, utilizando la restricción presupuestaria con el signo "$\leq$".

22. INTEGRALES DEFINIDAS MÚLTIPLES

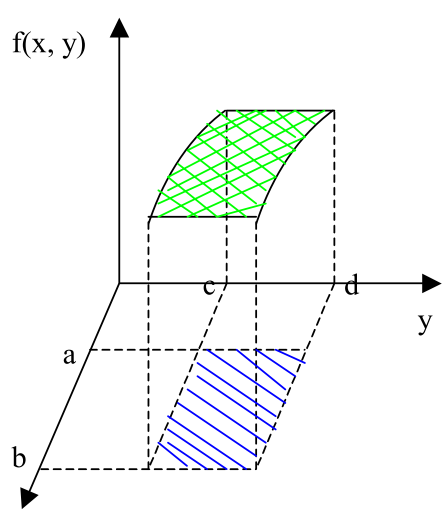
Consideremos en primer lugar el caso de funciones que dependen de dos variables.

El problema de las derivadas parciales consiste en encontrar unas funciones f_x y f_y a partir de una función f dada. Podemos pensar en el problema inverso, que consiste en encontrar alguna función cuya derivada parcial es f_x ó f_y.

Ejemplo: Sea $f_x(x, y) = 2.x.y + x^2 + y^2$. ¿Es posible encontrar alguna función f tal que $f_x(x, y) = 2.x.y + x^2 + y^2$? La respuesta es afirmativa, pero la solución no es única. Por ejemplo, $f(x, y) = x^2.y + x^3/3 + x.y^2$ es una respuesta al problema. Pero $f(x, y) = x^2.y + x^3/3 + x.y^2 + 5$ es otra respuesta posible, y $f(x, y) = x^2.y + x^3/3 + x.y^2 + P(y)$, donde $P(y)$ es un polinomio cualquiera (que depende de "y" pero no de "x") es otro conjunto de respuestas posibles.

Entonces, las funciones de dos variables admiten varias primitivas respecto de una variable y todas ellas no difieren en una constante tal como ocurre con funciones de una sola variable.

La integral doble de una función f en un intervalo cerrado [a, b] para la variable "x", y un intervalo cerrado [c, d] para la variable "y" se simboliza $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy.dx$.
Obsérvese que para identificar cuál es el intervalo de integración que corresponde a cada variable, los límites de integración se escriben en un orden y los diferenciales en el orden inverso. Así, la integral doble también admite la notación: $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$.
Consideremos el caso particular: $a < b$, $c < d$ y $f(x, y) \geq 0$ $\forall (x, y)$ del rectángulo $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Desde el punto de vista geométrico, la integral doble de la función en el rectángulo representa el volumen de un *prismoide* limitado por debajo por el plano xy, lateralmente por los cuatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, y en la parte superior por el gráfico de la función f.



El procedimiento de cálculo de la integral doble en un rectángulo sigue las siguientes reglas.

1º) Primitivar la función f(x, y) respecto de una de las variables (la que se indica en el paréntesis recto o la primera que aparece en el orden de los diferenciales) tomando la otra variable como constante. Sea F(x, y) tal que $F_y(x, y) = f(x, y)$.

2º) Evaluar la primitiva F en y = c y en y = d: $F(x,y)\Big|_{y=c}^{y=d} = g(x)$.

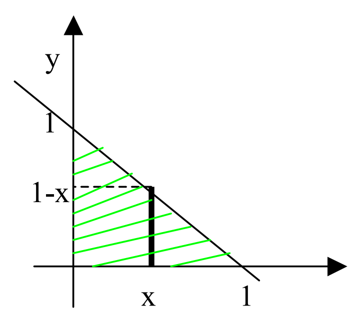
3º) Calcular $\int_a^b g(x).dx$.

Observaciones

1. En condiciones muy generales es $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$. De manera que el cálculo se puede realizar primitivando primero respecto de "y" y luego de "x" o viceversa.
2. El resultado de la integral doble en el rectángulo es un número. Si a < b, c < d y f(x, y) ≥ 0, entonces dicho número se puede interpretar geométricamente como el volumen de un prismoide.
3. La integral doble puede calcularse también si no se cumple alguna de las condiciones a < b, c < d ó f(x, y) ≥ 0. En tales casos, la interpretación geométrica no es tan obvia.
4. La existencia de la integral doble depende, como en el caso de integrales en una sola variable, de la existencia de primitivas. El cálculo de la integral doble depende de la factibilidad de encontrar primitivas, porque aún cuando existan, a veces no es posible explicitarlas.
5. Las integrales dobles se pueden calcular en cualquier dominio de integración. El rectángulo {(x, y): a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d}es sólo un caso particular.

Ejemplo 1: Calcular la integral doble de $f(x, y) = (x - y)^2$ en el dominio de integración {(x, y): x ≥ 0, y ≥ 0, x + y ≤ 1}.

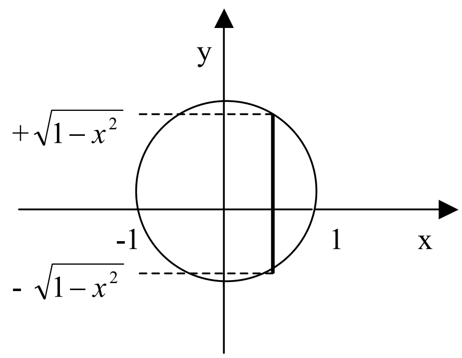
La base del prismoide es ahora un Triángulo. Cuando la "x" toma valores en intervalo [0, 1], la "y" toma valores en el intervalo [0, 1-x]. Entonces la integral $\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x-y)^2 dy\right]dx$ resuelve el problema.



Obsérvese que $\int_0^1 \left[\int_0^{1-y} (x-y)^2 \, dx \right] dy$ también resuelve el problema. En este caso el cálculo tiene el mismo grado de dificultad en cualquiera de las dos soluciones planteadas. En otros ejemplos, una solución podría resultar más sencilla que otra. Calculemos la integral propuesta en primer lugar como solución del problema.

$$\int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x-y)^2 \, dy \right] dx = \int_0^1 \left[-\frac{(x-y)^3}{3} \Bigg|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \int_0^1 \left[-\frac{(2.x-1)^3}{3} + \frac{x^3}{3} \right] dx = -\frac{(2.x-1)^4}{24} + \frac{x^4}{24} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Ejemplo 2: Se trata de calcular el volumen de un cilindroide, cuya base es un círculo de centro (0, 0) y radio 1 y que tiene por "tapa" el plano $z = 1 + x + y$. El dominio de integración es el conjunto $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$. Para plantear el problema se puede utilizar la notación: $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (1+x+y) dx.dy$. Para calcular la integral es necesario explicitar los límites de integración para cada variable.



Obsérvese que si se hace variar la "x" en el intervalo [-1, +1], entonces la variable "y" varía entre $-\sqrt{1-x^2}$ y $+\sqrt{1-x^2}$. Entonces, el cálculo de la integral doble procede así:

$$\int_{-1}^{1} \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (1+x+y) dy \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[y + xy + \frac{y^2}{2} \Bigg|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right] dx = \int_{-1}^{1} \left[2.\sqrt{1-x^2} + 2.x.\sqrt{1-x^2} \right] dx$$

Observando que el primer sumando del integrando es una función par y que el segundo es impar, y que el intervalo de integración es simétrico, entonces la integral es igual a: $= \int_0^1 2.\sqrt{1-x^2} \, dx$. Esta integral puede resolverse mediante el método de sustitución utilizando el cambio de variable $x = \text{sen } t$. El resultado es $\pi/4$: $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (1+x+y) dx.dy = \frac{\pi}{4}$.

No hay inconveniente en generalizar el cálculo de las integrales dobles a dominios infinitos. Las técnicas de primitivación se combinan con el cálculo de límites, tal como en integrales de funciones con una sola variable. Ejemplos: $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y} dy.dx$; $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2} \frac{x}{y^2+1} dx.dy$.

El cálculo de integrales triples o con un número mayor de variables utiliza las mismas técnicas de las integrales dobles: primitivación de la función integrando respecto de una variable, tomando las demás como constantes. Por ejemplo, la integral triple $\int_0^2 \int_3^5 \int_{10}^{12} \left(x^2 - y.z + 4.x.y \right) dz.dy.dx$ se debe entender así: primero se debe primitivar respecto de la “z” y evaluar en el intervalo [10, 12], luego primitivar respecto de la “y” y evaluar en el intervalo [3, 5], y finalmente primitivar respecto de la “x” y evaluar en [0, 2].

Repartido Práctico 22: Integrales Múltiples

Ejercicio 1

Calcular las siguientes integrales definidas.

$a)\int_{1}^{2}\int_{0}^{2}4.x.y\ dydx$ $\quad b)\int_{-1}^{1}\int_{1}^{3}y\ dydx$ $\quad c)\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}4x\ dxdy$ $\quad d)\int_{0}^{2}\int_{0}^{3}8x^3\ dydx$ $\quad e)\int_{-2}^{2}\int_{0}^{2}(x+2y)dydx$

$f)\int_{0}^{3}\int_{0}^{t}(x^2+xy)dxdy$ $\quad g)\int_{0}^{3}\int_{0}^{x}(3.x^2+2.xy)dydx$ $\quad h)\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}x\ dxdy$ $\quad i)\int_{-2}^{2}\int_{-x}^{x}(x+y)dydx$

$j)\int_{0}^{2}\int_{1}^{3}e^{x+y}\ dxdy$ $\quad k)\int_{0}^{2}\int_{1}^{y}e^{x+y}\ dxdy$ $\quad m)\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}\int_{0}^{3}12.x.y^2.z^2\ dxdydz$

Ejercicio 2

En Estadística, una función de densidad conjunta z = f(x,y), definida en una región del plano Oxy, se representa por una superficie en el espacio de tres dimensiones. Dicha función permite calcular probabilidades en cualquier rectángulo del plano Oxy, (a ≤ x ≤ b, c ≤ y ≤ d), mediante la fórmula:

$$P(a \le x \le b,\ c \le y \le d) = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x,y)\ dx\ dy$$

La cual representa el volumen comprendido entre la superficie, el plano xy, y los cuatro planos perpendiculares al xy determinados por: x=a, x=b, y=c, y=d.

a) Hallar P(0 ≤ x ≤ 1/2, 1/2 ≤ y ≤ 3/4) si f(x,y) = 1 definida en el cuadrado (0 ≤ x ≤ 1, 0 ≤ y ≤ 1). Interpretar el resultado a partir del gráfico.
b) Hallar P(0 ≤ x ≤ 2, 1 ≤ y ≤ 2) si f(x,y) = e^{-x-y} definida en el primer cuadrante del plano xy.
c) Hallar P(3 ≤ x ≤ 4, 0 ≤ y ≤ 2) si f(x,y) = 12.e^{-4x-3y} definida en el primer cuadrante del plano xy.
d) Hallar P(x ≥ 1, y ≥ 2) si f(x,y) = 12.e^{-4x-3y} definida en el primer cuadrante del plano xy.