Serie armónica

Toda serie puede pensarse como la caminata de una persona que realiza pasos de tamaños dados por la sucesión (a_n).

Por ejemplo, la serie de términos constantes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}$ se corresponde con la caminata de una persona que da pasos de -digamos- $\frac{1}{2}$ metro. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ se corresponde con una persona que da pasos cada vez más chicos: 1m, $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{8}$ m, y así sucesivamente.

Desde esta perspectiva, clasificar la serie no es otra cosa que describir cuál es el resultado de la caminata de la persona. Si la caminata es la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, la persona -a lo sumo- va a recorrer 2 metros de distancia (dependiendo de cuánto demore en dar cada paso). Si la caminata es la serie de términos constantes $\frac{1}{2}$, la persona va a avanzar siempre y a dar la vuelta al mundo una y otra vez. Una situación muy distinta es la de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$, la misma corresponde a una persona que no va hacia ningún lado ya que está dando un paso hacia atrás y otro hacia adelante (ambos de 1 m) de forma alternada.

En este contexto, la condición necesaria de convergencia podría describirse informalmente así: si sabemos que la caminata de una persona recorre una distancia finita entonces esa persona tiene que estar dando pasos cada vez más chicos (tendientes a 0).

Es razonable plantearse la pregunta inversa: si una persona da pasos cada vez más chicos (tendientes a 0) ¿Qué sucede con su caminata?

Veamos un ejemplo concreto, la **serie armónica**:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

En este caso la persona da pasos de tamaños $\frac{1}{2}$ m, $\frac{1}{3}$ m, $\frac{1}{4}$ m, $\frac{1}{5}$ m, $\frac{1}{6}$ m, …, cada vez más chicos y tendientes a 0. ¿Qué sucederá con la caminata de esta persona?

Comparemos esta caminata con la de aquella persona que da pasos constantes de tamaño $\frac{1}{2}$.

Paso	Caminante serie armónica (A)	Caminante serie pasos constantes (B)
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{2}$
7	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{2}$

Supongamos que ambos caminantes inician su caminata desde el mismo lugar. Solo en el primer paso ambos avanzan lo mismo, ya que del segundo en adelante los pasos de A siempre son menores que los de B.

Por otro lado, observemos que la suma de los pasos 2 y 3 del caminante A es mayor que $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, en el cuarto paso A alcanza la posición de B en el segundo paso. De forma análoga, la suma de los pasos 4, 5, 6 y 7 del caminante A es mayor que $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, en el séptimo paso A alcanza la posición de B en el tercero. Y así sucesivamente.

Caminante serie armónica (A)	Caminante serie pasos constantes (B)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$

Ejercicio- En el quinto paso el caminante B alcanza los 2,5 metros, ¿cuántos pasos demora A en llegar hasta ahí?

Esta observación nos permite concluir que el caminante A se va a ir rezagando, pero a la larga va a alcanzar cualquier posición por donde haya pasado B. Por lo tanto, como B da la vuelta al mundo una y otra vez, también lo hará A (aunque demore un poco más).

Más formalmente, esto quiere decir que el recíproco de la condición necesaria de convergencia no es cierto. Por lo tanto:

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ entonces no puede afirmase que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge