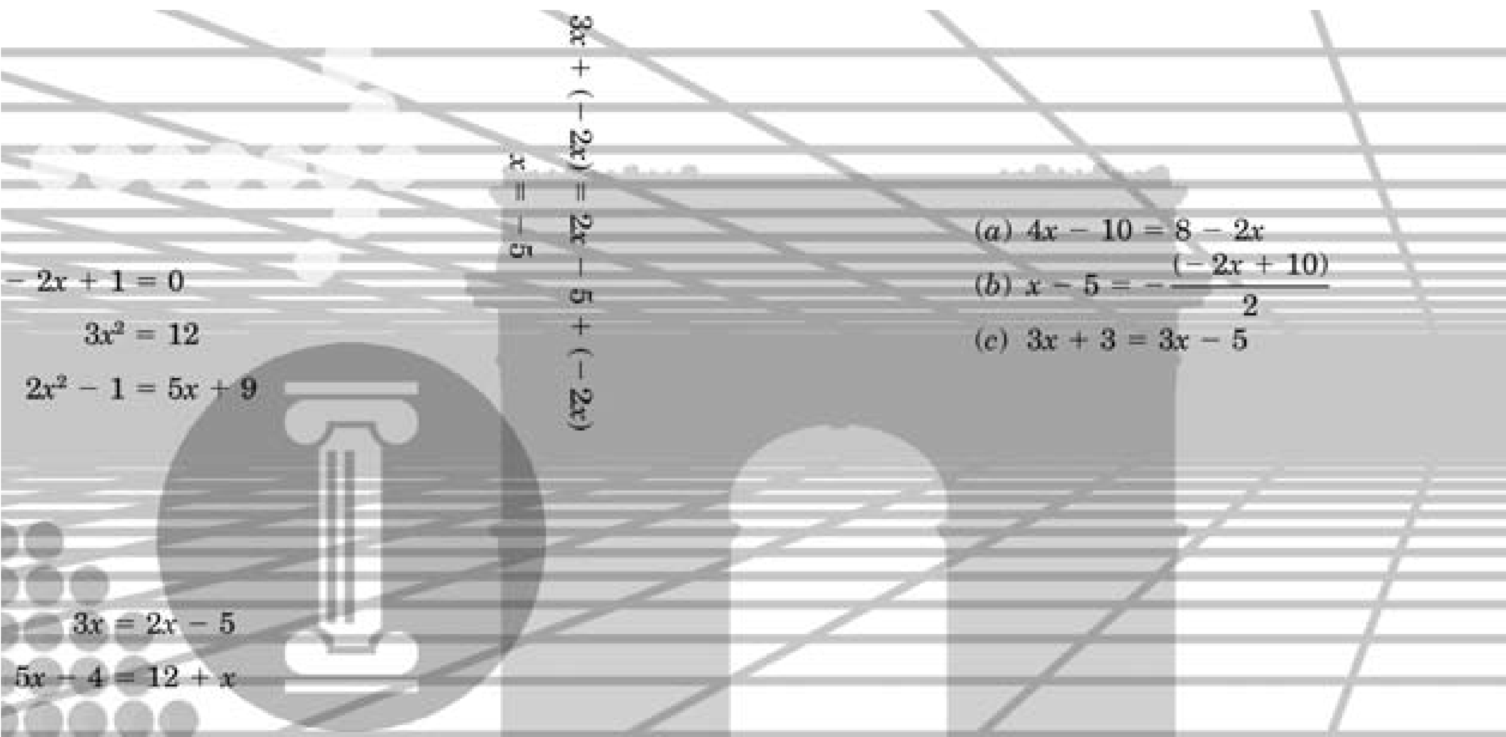
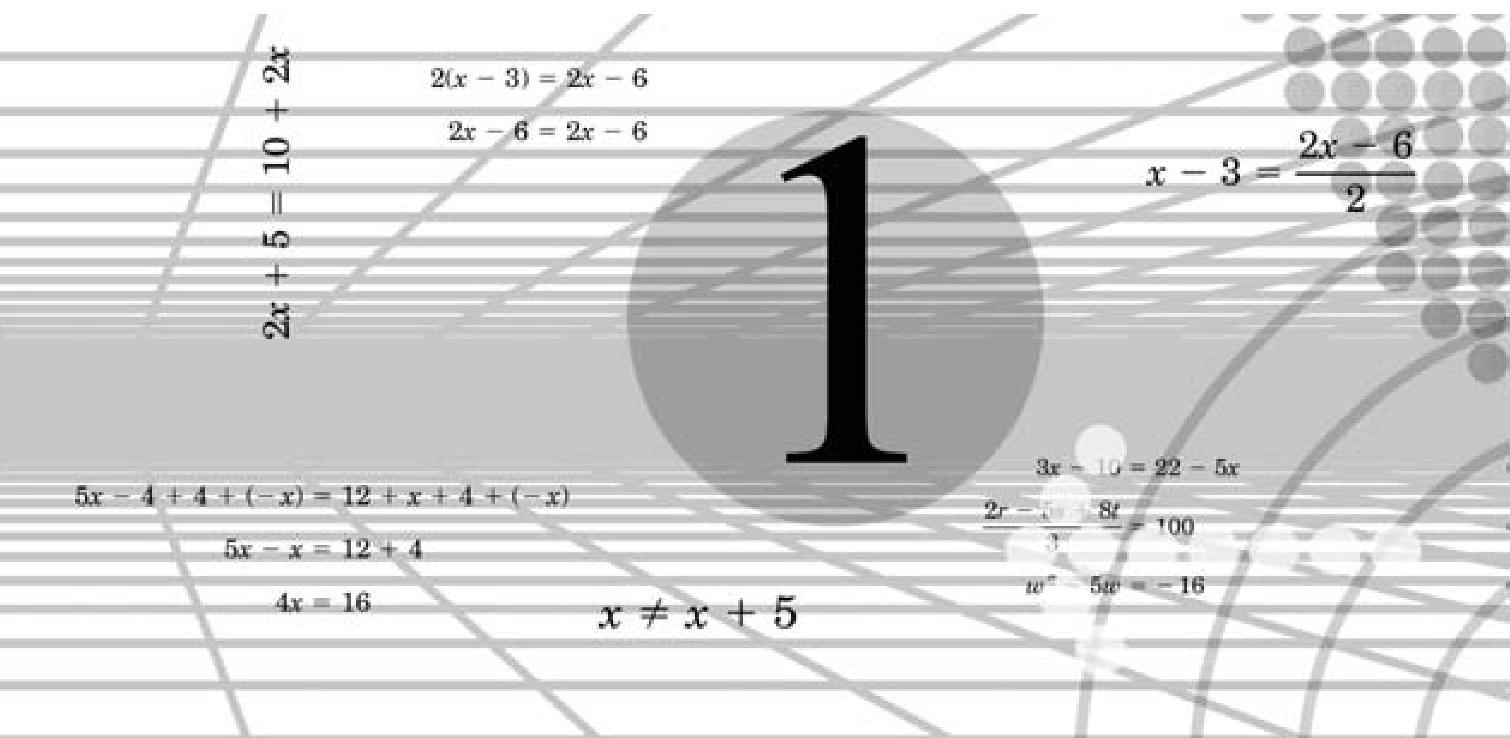
CAPÍTULO 1

Algunos conocimientos preliminares



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Estudiar las ecuaciones y los métodos de solución.
- Presentar las propiedades de las desigualdades y los métodos de solución.
- Ilustrar las relaciones del valor absoluto.
- Introducir las propiedades de los sistemas de coordenadas rectangulares.



Este capítulo presenta un análisis de conceptos algebraicos selectos. Para estudiar de manera exitosa el material de este libro de texto, es un requerimiento previo entender estos conceptos, así como los conceptos fundamentales que se revisan en el apéndice A.

1.1 Ecuaciones de primer grado con una variable

En este libro continuamente se trabaja con ecuaciones. Es esencial en absoluto comprender el significado de las ecuaciones y sus propiedades.

Las ecuaciones y sus propiedades

Una **ecuación** indica la igualdad de dos expresiones algebraicas. Las expresiones algebraicas pueden escribirse en términos de una o más *variables*. Los siguientes son algunos ejemplos de ecuaciones.

$$3x - 10 = 22 - 5x \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{2r - 5s + 8t}{3} = 100 \qquad \textbf{(2)}$$

$$w^2 - 5w = -16 \qquad \textbf{(3)}$$

En las ecuaciones (1) y (3), las variables son x y w, respectivamente. En la ecuación (2) hay tres variables, r, s y t. Se utiliza el término *variable* porque se pueden sustituir las letras con distintos valores numéricos.

La **solución** de una ecuación consta de esos valores numéricos, los cuales, al ser sustituidos por las variables, hacen válida una ecuación. Los valores numéricos que hacen válida una ecuación se conocen como **raíces** de una ecuación. Se dice que las raíces son los valores de la(s) variable(s) que *satisface(n) la ecuación*. En la ecuación (1), la sustitución del número 0 por la variable x da como resultado

$$-10 = 22$$

lo cual no es cierto. El valor $x = 0$ no es una raíz de la ecuación. Sin embargo, al sustituir el número 4 por la variable x se obtiene

$$3(4) - 10 = 22 - 5(4)$$

o

$$2 = 2$$

Se considera que el valor $x = 4$ es una raíz de la ecuación.

Se pueden distinguir tres tipos de ecuaciones. Una ***identidad*** es una ecuación que es válida para cualquier valor numérico asignado a las variables. Un ejemplo de una identidad es la ecuación

$$6x + 12 = \frac{12x + 24}{2}$$

Otro ejemplo es

$$5(x + y) = 5x + 5y$$

En cada una de estas ecuaciones, cualquier valor que se asigne a las variables hará que ambos lados sean iguales.

Una ***ecuación condicional*** es válida únicamente para un número limitado de valores de las variables. Por ejemplo, la ecuación

$$x + 3 = 5$$

es verdadera sólo cuando x es igual a 2.

Un ***enunciado falso***, o ***contradicción***, es una ecuación que nunca es verdadera. Esto significa que no hay valor alguno que se pueda asignar a las variables para que los dos lados de la ecuación sean iguales. Un ejemplo es la ecuación

$$x = x + 5$$

Se indica que los dos lados *no son iguales* al usar el símbolo $\neq$; para este ejemplo,

$$x \neq x + 5$$

La *solución de una ecuación* se refiere al proceso de encontrar las raíces de una ecuación, si es que existe alguna. Con el fin de resolver ecuaciones, por lo general se manipulan o se reordenan. Las reglas siguientes indican las operaciones permitidas.

Reglas seleccionadas para el manejo de ecuaciones

I *Se pueden sumar o sustraer expresiones con valores reales que son iguales de ambos lados de una ecuación.*

II *Es posible multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por cualquier constante diferente a cero.*

III *Se pueden multiplicar ambos lados de una ecuación por una cantidad que implique variables.*

IV *Es posible elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación.*

V *Se pueden dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que incluya variables siempre que la expresión no sea igual a 0.*

Las reglas I y II llevan a la creación de ***ecuaciones equivalentes***. *Las ecuaciones equivalentes son ecuaciones que tienen las mismas raíces.* Las reglas III y IV pueden dar como resultado raíces que no son raíces de la ecuación original. Estas raíces se denominan ***raíces extrañas***. La aplicación de la regla V puede llevar a ecuaciones que no tienen todas las raíces contenidas en la ecuación original o ecuaciones que no son equivalentes a las ecuaciones originales.

El ***grado de un polinomio*** se define como el grado del término elevado a la mayor potencia en un polinomio. Si se puede escribir una ecuación en la forma

$$\textit{Expresión polinomial} = 0$$

el grado de la expresión polinomial es el ***grado de la ecuación***. Por tanto, la ecuación $2x - 4 = 0$ es una ecuación de primer grado. La ecuación $4r^2 - r + 10 = 0$ es una ecuación de segundo grado. La ecuación $n^4 - 3n^2 + 9 = 0$ es una ecuación de cuarto grado.

Solución de ecuaciones de primer grado con una variable

El procedimiento que se emplea para resolver ecuaciones depende de la naturaleza de la ecuación. Considérense primero ecuaciones de primer grado que implican una variable. Los siguientes son algunos ejemplos de estas ecuaciones.

$$3x = 2x - 5$$
$$5x - 4 = 12 + x$$

Es relativamente fácil resolver ecuaciones de esta forma. Al usar las reglas de manejo apropiadas, el planteamiento consiste sólo en aislar la variable en un lado de la ecuación y todas las constantes al otro lado de la ecuación.

Ejemplo 1 Resuelva las dos ecuaciones de primer grado que se presentaron antes.

SOLUCIÓN

Para la ecuación $3x = 2x – 5$, se suma $-2x$ en ambos lados de la ecuación para obtener

$$3x + (-2x) = 2x - 5 + (-2x)$$

o

$$x = -5$$

Nuestra conclusión: el único valor de x que satisface esta ecuación es -5.

Para la ecuación $5x - 4 = 12 + x$, se puede sumar 4 y $-x$ a ambos lados

$$5x - 4 + 4 + (-x) = 12 + x + 4 + (-x)$$
$$5x - x = 12 + 4$$

o

$$x = 16$$

Dividir ambos lados entre 4 (o al multiplicarlos por $\frac{1}{4}$) dan la raíz de la ecuación:

$$x = 4$$

Nuestra conclusión: el único valor de x que satisface la ecuación es 4.

Ejemplo 2 Para resolver la ecuación

$$2x + 5 = 10 + 2x$$

se puede sustraer $2x$ de ambos lados, lo que da como resultado

$$2x + 5 - 2x = 10 + 2x - 2x$$

o

$$5 = 10$$

Este resultado es un *enunciado falso*, o contradicción, que señala que la ecuación original no tiene raíces.

Ejemplo 3 Para resolver la ecuación

$$x - 3 = \frac{2x - 6}{2}$$

se multiplican ambos lados de la ecuación por 2, lo que da como resultado

$$2(x - 3) = 2x - 6$$
$$2x - 6 = 2x - 6$$

Ambos lados de la ecuación son *idénticos* y esto sugiere que es posible asignar cualquier valor a x para satisfacer la ecuación. Si se trata de aislar x en el lado izquierdo de la ecuación, al sustraer $2x$ en ambos lados se tiene como resultado

$$-6 = -6$$

Esto es una identidad, que también señala que se puede asignar cualquier valor a la variable x. ❑

Ejercicio de práctica

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $4x - 10 = 8 - 2x$
b) $x - 5 = -\dfrac{(-2x + 10)}{2}$
c) $3x + 3 = 3x - 5$

Respuesta: a) 3, *b*) cualquier número real, *c*) no hay valores.

Sección 1.1 Ejercicios de seguimiento

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado.

1. $x + 5 = 2x - 8$
2. $18 - 2x = 8 - 3x$
3. $2x + 4 = 6 - x$
4. $-5x + 12 = 16 - 3x$
5. $2(x - 8) = 3(x + 4)$
6. $5(3 - x) = 3(5 + x)$
7. $16 + 2t = 4t + 12$
8. $8y + 10 = 6y + 20$
9. $3 - 5t = 3t + 5$
10. $10y + 2 = 6y + 4$
11. $3t + 10 = 4t + 6$
12. $3(2t + 8) = 4(2 + t)$
13. $\frac{x}{6} - 5 = \frac{x}{2} - 7$
14. $(x + 6) - (5 - 2x) + 2 = 0$
15. $3 - \frac{x}{2} = \frac{x}{3} - 2$
16. $\frac{t-3}{2} + \frac{t+3}{4} = \frac{8-t}{3} + 2$
17. $4 + x = 3 + \frac{x}{2}$
18. $\frac{v}{2} - 3 = 5 + \frac{v}{2}$
19. $(t - 3)/2 = (4 - 3t)/4$
20. $3(x - 2) = (x + 3)/2$
21. $2(y + 1) - 3(y - 1) = 5 - y$
22. $3(12 - x) - 16 = 2$
23. $3(x - 2) + 4(2 - x) = x + 2(x + 1)$
24. $3x + 1 = 2 - (x - 4) + 3x$

1.2 Ecuaciones de segundo grado con una variable

Una ecuación de segundo grado que implica la variable x tiene la forma generalizada

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes, con la condición adicional de que a $\neq 0$. Normalmente se dice que las ecuaciones de segundo grado son ***ecuaciones cuadráticas***. Si a es igual a cero, el término x^2 desaparece y la ecuación deja de ser de segundo grado. Éstos son algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado

$$6x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$2x^2 - 1 = 5x + 9$$

Solución de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática (excluyendo una identidad) puede tener ***raíces no reales***, ***una raíz real*** o ***dos raíces reales***. Es posible utilizar diferentes procedimientos para determinar las raíces de una ecuación cuadrática. Se analizarán dos de estos procedimientos. En cualquier caso, el primer paso consiste en volver a escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Método de factorización. Si se puede factorizar el lado izquierdo de la ecuación cuadrática, será muy fácil identificar las raíces. Considérese la ecuación cuadrática

$$x^2 - 4x = 0$$

Se puede factorizar el lado izquierdo de la ecuación, lo que da como resultado

$$x(x - 4) = 0$$

La forma factorizada de la ecuación sugiere que el producto de los dos términos es igual a 0. El producto equivaldrá a 0 si cualquiera de los dos factores es igual a 0. Para esta ecuación, el primer factor equivale a 0 cuando $x = 0$ y el segundo factor es igual a 0 cuando $x = 4$. Por tanto, las dos raíces son 0 y 4.

Ejemplo 4 Determine las raíces de la ecuación

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

SOLUCIÓN

Se puede factorizar el lado izquierdo de la ecuación obteniendo como resultado

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

Al establecer cada factor igual a 0, se descubre que hay una raíz para la ecuación y ésta ocurre cuando $x = -3$. ❑

Fórmula cuadrática. Cuando no se puede factorizar la ecuación cuadrática o si no es posible identificar los factores, puede aplicarse la ***fórmula cuadrática*** para identificar todas las raíces de una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \textbf{(1.1)}$$

Dados los valores para a, b y c, la fórmula cuadrática es

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \qquad \textbf{(1.2)}$$

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de la fórmula.

Ejemplo 5 Dada la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 48 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -2$ y $c = -48$. Al sustituir estos coeficientes en la fórmula cuadrática, las raíces de la ecuación se calculan así

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2}$$

Al usar el signo más, se obtiene

$$x = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Al utilizar el signo menos, se tiene

$$x = \frac{2 - 14}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

Por consiguiente, 8 y -6 son los dos valores reales de x que satisfacen la ecuación cuadrática.

Ejemplo 6 Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$, $a = 1$, $b = -2$ y $c = 1$. Al sustituir los valores en la fórmula da como resultado

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 0}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puesto que el radicando equivale a cero, al aplicar el signo $\pm$ se obtiene la misma raíz, 1.

Ejemplo 7 Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - x + 10$, $a = 1$, $b = -1$ y $c = 10$. La sustitución en la fórmula cuadrática da

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 40}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-39}}{2} \end{aligned}$$

Ya que no hay raíz cuadrada real de –39, se concluye que no hay valores de x que satisfagan la ecuación cuadrática. ❑

Ejercicio de práctica

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$
b) $3x^2 - 2x + 5 = 0$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

Respuesta: *a*) $x = -1, -2$, *b*) no hay valores, *c*) $x = -5$.

La expresión debajo del radical de la fórmula cuadrática, $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de ***discriminante.*** Obsérvense las generalizaciones siguientes con respecto del discriminante y las raíces para ecuaciones de segundo grado.

Interpretaciones del discriminante

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

I *Si $b^2 - 4ac > 0$, hay dos raíces reales.*

II *Si $b^2 - 4ac = 0$, hay una raíz real.*

III *Si $b^2 - 4ac < 0$, no hay raíces reales.*

Sección 1.2 Ejercicios de seguimiento

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización.

1. $x^2 + x - 12 = 0$
2. $x^2 - 36 = 0$
3. $x^2 + 2x + 1 = 0$
4. $x^2 + 3x - 10 = 0$
5. $x^2 - 3x - 4 = 0$
6. $t^2 + 2t - 8 = 0$
7. $2t^2 - 9t + 4 = 0$
8. $5r^2 - 2r - 3 = 0$
9. $6y^2 + 9y - 6 = 0$
10. $x^2 - 10x + 25 = 0$
11. $r^2 - 16 = 0$
12. $3t^2 + 9t + 6 = 0$
13. $x^2 - 2x - 15 = 0$
14. $2x^2 - x - 1 = 0$
15. $4y^2 + 18y - 10 = 0$
16. $x^2 + 10x + 21 = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.

17. $x^2 - 8x + 12 = 0$
18. $x^2 - 12x + 36 = 0$
19. $r^2 + 2r + 1 = 0$
20. $t^2 - 2t + 1 = 0$
21. $x^2 + x + 20 = 0$
22. $x^2 + 3x + 5 = 0$
23. $x^2 + 3x - 10 = 0$
24. $9x^2 - 3x = 2$
25. $2x^2 + 2 = 2x$
26. $3r^2 = 14r - 8$
27. $x^2 = 2x - 2$
28. $4t^2 + 3t = 1$
29. $y^2 + 2 = 2y$
30. $x^2 + 4x + 5 = 0$
31. $x^2 - 2x = -5$
32. $2x^2 - 32 = 0$

1.3 Las desigualdades y su solución

Esta sección estudia las *desigualdades*, la *notación de intervalo* y la *solución de desigualdades*.

Desigualdades

Las ***desigualdades*** expresan la condición de que dos cantidades no son iguales. Una manera de expresar esta condición es mediante el uso de los ***símbolos de desigualdad*** < y >. La tabla siguiente ilustra el uso y la interpretación de estos símbolos:

Desigualdad	**Interpretación**
a) $3 < 5$	"3 es menor que 5"
b) $x > 100$	"el valor de x es mayor que 100"
c) $0 < y < 10$	"el valor de y es mayor que cero y menor que 10"

Estas desigualdades son ***desigualdades estrictas***, puesto que los elementos que se comparan nunca son iguales entre sí. El caso *a*) ilustra una ***desigualdad absoluta***, la cual siempre es verdadera. Una ***desigualdad condicional*** sólo es verdadera en ciertas situaciones. La desigualdad del caso *b*) es verdadera cuando la variable x tiene un valor mayor que 100. Si $x = 150$, la desigualdad es verdadera; si $x = -25$, la desigualdad no es verdadera. El caso *c*) ilustra lo que se denomina una ***doble desigualdad***.

Un uso de las desigualdades es facilitar la comparación de números. La figura 1.1 ilustra la *recta de los números reales*. **Dados dos números reales *a* y *b*, si *a* < *b*, significa que *a* cae a la izquierda de *b* en la recta de los números reales**. En la figura 1.1 se presentan ejemplos de desigualdades.

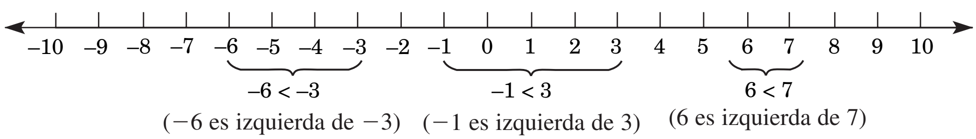


Figura 1.1

Los siguientes enunciados son maneras de expresar la misma relación.

> a es menor que b.
> b es mayor que a.
> $a < b$
> $b > a$
> $b - a > 0$
> $a - b < 0$
> a cae a la izquierda de b en la recta de los números reales.
> b cae a la derecha de a en la recta de los números reales.

Se expresa otro tipo de relación de desigualdad por medio de los símbolos $\geq$ y $\leq$. Dichas relaciones de desigualdad permiten la posibilidad de que dos cantidades puedan ser iguales. La tabla siguiente ilustra estos tipos de desigualdades.

Desigualdad	**Interpretación**
a) $x + 3 \geq 15$	"la cantidad $(x + 3)$ es mayor que *o* igual a 15"
b) $y \leq x$	"el valor de y es menor que *o* igual al valor de x"

Notación de intervalo

Un **intervalo** es un conjunto de números reales que caen entre dos números a y b. Es posible especificar esto usando la siguiente notación:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

La notación **(a, b)** representa el **intervalo abierto** con los extremos a y b. La notación $\{x \mid a < x < b\}$ indica que el intervalo abierto con extremos a y b "consta de los números reales x *tales que* (|) x es mayor que a y x es menor que b". Por "abierto", nos referimos a los valores extremos que *no se incluyen* en el intervalo.

Un **intervalo cerrado** es aquel que incluye los valores de los extremos. La notación **[a, b]** representa el intervalo cerrado que incluye los valores de los extremos a y b. Es posible expresar este intervalo cerrado con mayor precisión como

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Los **intervalos abiertos en un extremo** incluyen un extremo pero no el otro. La notación **(a, b]** representa el intervalo abierto en un extremo que contiene el punto de extremo b pero no a. La notación **[a, b)** expresa el intervalo abierto en un extremo que incluye a pero no b. La figura 1.2 ilustra la representación gráfica de varios intervalos. Nótese que se ilustran dos representaciones de la recta numérica, una que usa paréntesis y corchetes y la otra que utiliza círculos abiertos (○) y sólidos (●). La notación con círculo abierto indica que el valor del extremo *no* se incluye en el intervalo. El círculo sólido indica que *sí* se incluye el valor del extremo.

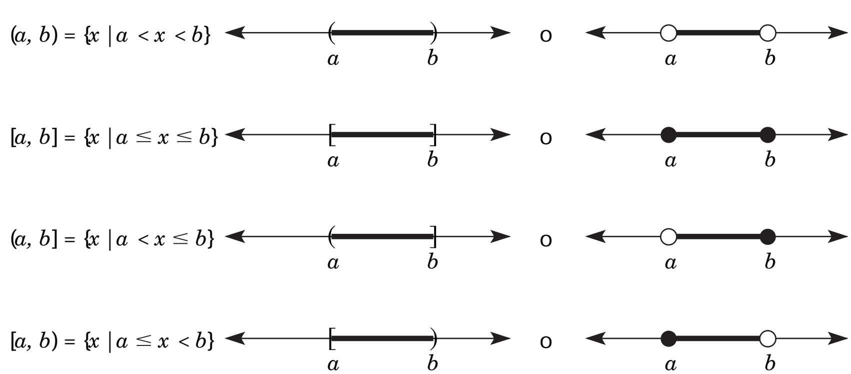


Figura 1.2

Ejemplo 8 Trace los siguientes intervalos: *a*) $(-2, 1)$, *b*) $[1, 3]$, *c*) $[-3, 0)$.

SOLUCIÓN

En la figura 1.3 aparece la representación gráfica de los intervalos.

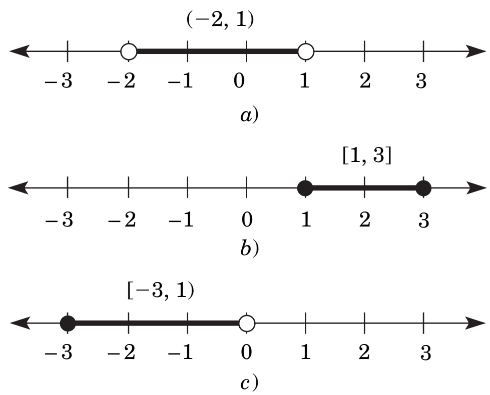


Figura 1.3 ❑

Solución de desigualdades

La solución de desigualdades es muy similar a la solución de ecuaciones. Lo que se intenta determinar es el conjunto de valores de la variable x que satisfacen una desigualdad. Dada una desigualdad de primer grado para una variable, como

$$2x + 3 \geq -5$$

al resolver la desigualdad se determinarían los valores de x que satisfacen la desigualdad. Para resolverla, se trata de aislar la variable x en un lado de la desigualdad usando las mismas operaciones algebraicas que se utilizarían en la solución de ecuaciones. La única diferencia cuando se trabaja con desigualdades es que para multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por o entre un número negativo es necesario cambiar la dirección o el *sentido* de la desigualdad. Para ilustrarlo, dada la desigualdad

$$-2 < 3$$

si se multiplican ambos lados por (-1), se cambia el sentido de la desigualdad, dando como resultado

$$2 > -3$$

Si no se hubiera cambiado el sentido de la desigualdad, el resultado habría sido

$$2 > -3$$

lo cual no es cierto. De modo similar, para resolver la desigualdad

$$-2x < 6$$

se divide entre -2 ambos lados de la desigualdad para aislar x. Se debe cambiar el sentido de la desigualdad dividiendo entre un número negativo, lo que da como resultado

$$x > -3$$ ❑

Ejemplo 9 Para determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad $3x + 10 \leq 5x - 4$, es posible sumar 4 a ambos lados para obtener

$$3x + 14 \leq 5x$$

Al restar $3x$ de ambos lados da como resultado

$$14 \leq 2x$$

Por último, dividir ambos lados entre 2 da el conjunto solución

$$7 \leq x$$

Es decir, se satisface la desigualdad original con cualquier valor de x que sea mayor o igual que 7. La figura 1.4 ilustra la solución gráficamente.

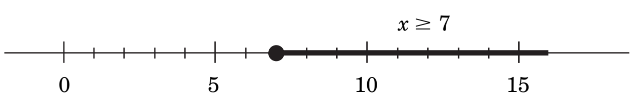


Figura 1.4 Solución para la desigualdad $3x + 10 \leq 5x - 4$.

❑

Ejemplo 10 Para determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad $6x - 10 \geq 6x + 4$, se suma 10 a ambos lados y da como resultado

$$6x \geq 6x + 14$$

Al restar $6x$ de ambos lados se obtiene

$$0 \geq 14$$

que es un enunciado falso. Por ende, no hay valores para x que satisfagan la desigualdad. ❑

Ejemplo 11

Para determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad $4x + 6 \geq 4x - 3$, se resta 6 en ambos lados para obtener

$$4x \geq 4x - 9$$

y al sustraer $4x$ de ambos lados da

$$0 \geq -9$$

La variable x ha desaparecido y queda una desigualdad que siempre es verdadera. Esto indica que *la desigualdad original es verdadera para cualquiera y todos los valores (reales) de x.* ❑

Ejercicio de práctica

Resolver la desigualdad $2x - 5 \geq 3x + 2$. *Respuesta*: $x \leq -7$.

Ejemplo 12

Para determinar los valores de x que satisfacen la doble desigualdad $-2x + 1 \leq x \leq 6 - x$, primero se encuentra el conjunto solución para cada desigualdad.

Los valores de x que satisfacen la desigualdad izquierda se determinan como

$$-2x + 1 \leq x$$
$$1 \leq 3x$$

o

$$\tfrac{1}{3} \leq x$$

Los valores que satisfacen la desigualdad derecha son

$$x \leq 6 - x$$
$$2x \leq 6$$

o

$$x \leq 3$$

Los valores que satisfacen la doble desigualdad constan de los valores de x que satisfacen ambas desigualdades o $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$. La figura 1.5 ilustra la solución.

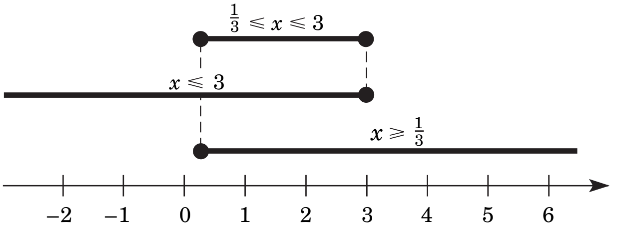


Figura 1.5 Solución para $-2x + 1 \leq x \leq 6 - x$.

Ejemplo 13

Para determinar la solución para la doble desigualdad $2x - 4 \leq x \leq 2x - 10$, primero se resuelve la desigualdad izquierda

$$\begin{aligned} 2x - 4 &\leq x \\ x - 4 &\leq 0 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Los valores de x que satisfacen la desigualdad derecha son

$$\begin{aligned} x &\leq 2x - 10 \\ 0 &\leq x - 10 \\ 10 &\leq x \end{aligned}$$

o

Con base en la figura 1.6, se nota que no hay valores comunes para las soluciones de las dos desigualdades. Por consiguiente, no hay valores que satisfagan la doble desigualdad.

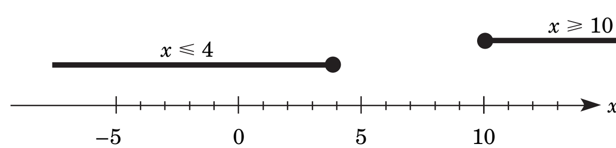


Figura 1.6 Ninguna solución para $2x - 4 \leq x \leq 2x - 10$.

Ejercicio de práctica

Resuelva la desigualdad $10 \leq x + 5 \leq 30$. *Respuesta*: $5 \leq x \leq 25$.

Desigualdades de segundo grado

Si una desigualdad implica una expresión algebraica de orden superior, a menudo puede resolverse si es posible volver a escribir la expresión algebraica en forma factorizada. Los ejemplos siguientes ilustran soluciones para desigualdades de segundo grado.

Ejemplo 14

Para resolver la desigualdad

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

primero se factoriza el lado izquierdo

$$(x - 3)(x - 2) \leq 0$$

Los siguientes atributos de los dos factores del lado izquierdo darán como resultado la desigualdad que se satisface.

	Factor		
	$(x - 3)$	**$(x - 2)$**	**Producto**
Condición 1	$= 0$	Cualquier valor	0
Condición 2	Cualquier valor	$= 0$	0
Condición 3	> 0	< 0	< 0
Condición 4	< 0	> 0	< 0

Condición 1:

$x - 3 = 0$ cuando $x = 3$

Condición 2:

$x - 2 = 0$ cuando $x = 2$

Condición 3:

$x - 3 > 0$ y $x - 2 < 0$

cuando $x > 3$ y $x < 2$

Condición 4:

$x - 3 < 0$ y $x - 2 > 0$

cuando $x < 3$ y $x > 2$

La figura 1.7 resume los resultados de estas cuatro condiciones. Las condiciones 1 y 2 dan como resultado el producto que equivale a cero cuando x es igual a 3 y 2, respectivamente. No hay valores de x que den como resultado los atributos de signo de la condición 3.

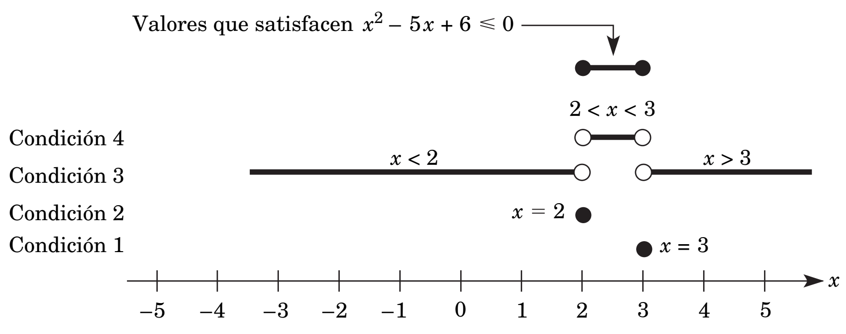


Figura 1.7

Por último, los valores de x que satisfacen la condición 4 son $2 < x < 3$. Al combinar los valores de las condiciones 1, 2 y 4, se satisface la desigualdad si $2 \leq x \leq 3$. ❑

Ejemplo 15

Para resolver la desigualdad

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$

primero se factoriza el lado izquierdo, obteniendo como resultado

$$(x - 5)(x + 3) > 0$$

En comparación con el ejemplo 14, ésta es una desigualdad estricta. El lado izquierdo de la desigualdad será positivo si los dos factores tienen el mismo signo.

	Factor		
	$(x - 5)$	**$(x + 3)$**	**Producto**
Condición 1	> 0	> 0	> 0
Condición 2	< 0	< 0	> 0

Condición 1:

$$x - 5 > 0 \quad y \quad x + 3 > 0$$

cuando $x > 5$ y $x > -3$

Condición 2:

$$x - 5 < 0 \quad y \quad x + 3 < 0$$

cuando $x < 5$ y $x < -3$

La figura 1.8 resume los resultados de estas dos condiciones. Los valores de x que satisfacen la condición 1 son $x > 5$. Los que satisfacen la condición 2 son $x < -3$. Combinando los resultados de las dos condiciones, el resultado de la desigualdad original es $x < -3$ y $x > 5$.

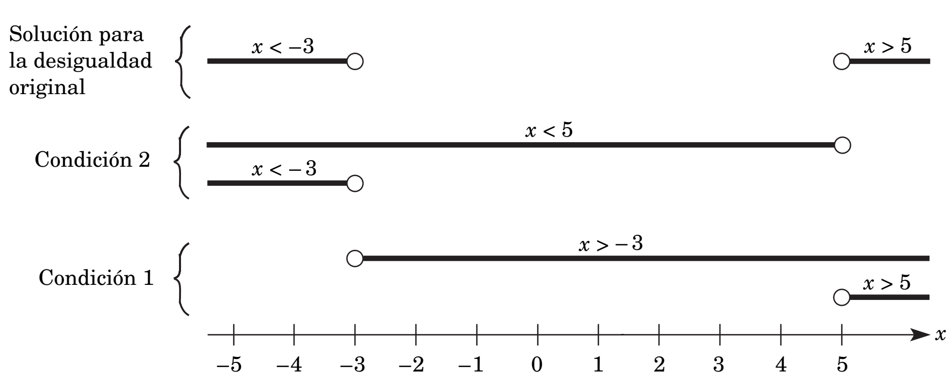


Figura 1.8

Ejercicio de práctica

Resuelva la desigualdad $x^2 + x - 12 \leq 0$. *Respuesta*: $-4 \leq x \leq 3$.

Sección 1.3 Ejercicios de seguimiento

Trace los siguientes intervalos.

1. $(-8, 0)$
2. $(3, 7)$
3. $(-5, -3)$
4. $(-4, 1)$
5. $(0, 5)$
6. $(5, 9)$
7. $[-4, -1]$
8. $[-2, 4]$
9. $[-0.5, 0.5]$
10. $[2, 6]$
11. $[1, 5]$
12. $[-5, -2]$
13. $(-3, 4]$
14. $[2, 8)$
15. $[-5, -2)$
16. $(-3, 2]$

Resuelva las siguientes desigualdades.

17. $3x - 2 \leq 4x + 8$
18. $x + 6 \geq 10 - x$
19. $x \geq x + 5$
20. $2x \leq 2x - 20$
21. $-4x + 10 \geq -20 + x$
22. $3x + 6 \leq 3x - 5$
23. $25x + 6 \geq 10x - 24$
24. $-4x + 10 \leq x \leq 2x + 6$
25. $12 \geq x + 16 \geq -20$
26. $35 \leq 2x + 5 \leq 80$
27. $50 \leq 4x - 6 \leq 25$
28. $6x - 9 \leq 12x + 9 \leq 6x + 81$
29. $-10 \leq x + 8 \leq 15$
30. $25 \leq 5 - x \leq 10$
31. $0 \geq 20 - x \geq -20$
32. $10 + x \leq 2x - 5 \leq 25$

Resuelva las siguientes desigualdades de segundo grado.

33. $x^2 - 25 \leq 0$
34. $x^2 - 16 \geq 0$
35. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$
36. $x^2 + 2x - 8 \geq 0$
37. $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
38. $x^2 + 4x - 12 \leq 0$
39. $2x^2 + 3x - 2 < 0$
40. $2x^2 - x - 10 > 0$
41. $x^2 + 2x - 15 > 0$
42. $2x^2 - 5x + 3 < 0$
43. $4x^2 - 100 < 0$
44. $6x^2 + x - 12 > 0$

1.4 Relaciones de valor absoluto

El **valor absoluto** de un número es su distancia de separación respecto del cero en la recta de los números reales, la cual debe ser mucho mayor que o igual a cero. Se expresa el valor absoluto de un número a como $|a|$. Usando esta definición, se puede confirmar en la figura 1.9 que $|3| = 3$ y $|-3| = 3$. La siguiente es una definición más formal.

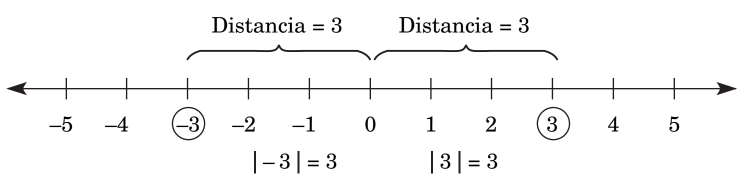


Figura 1.9