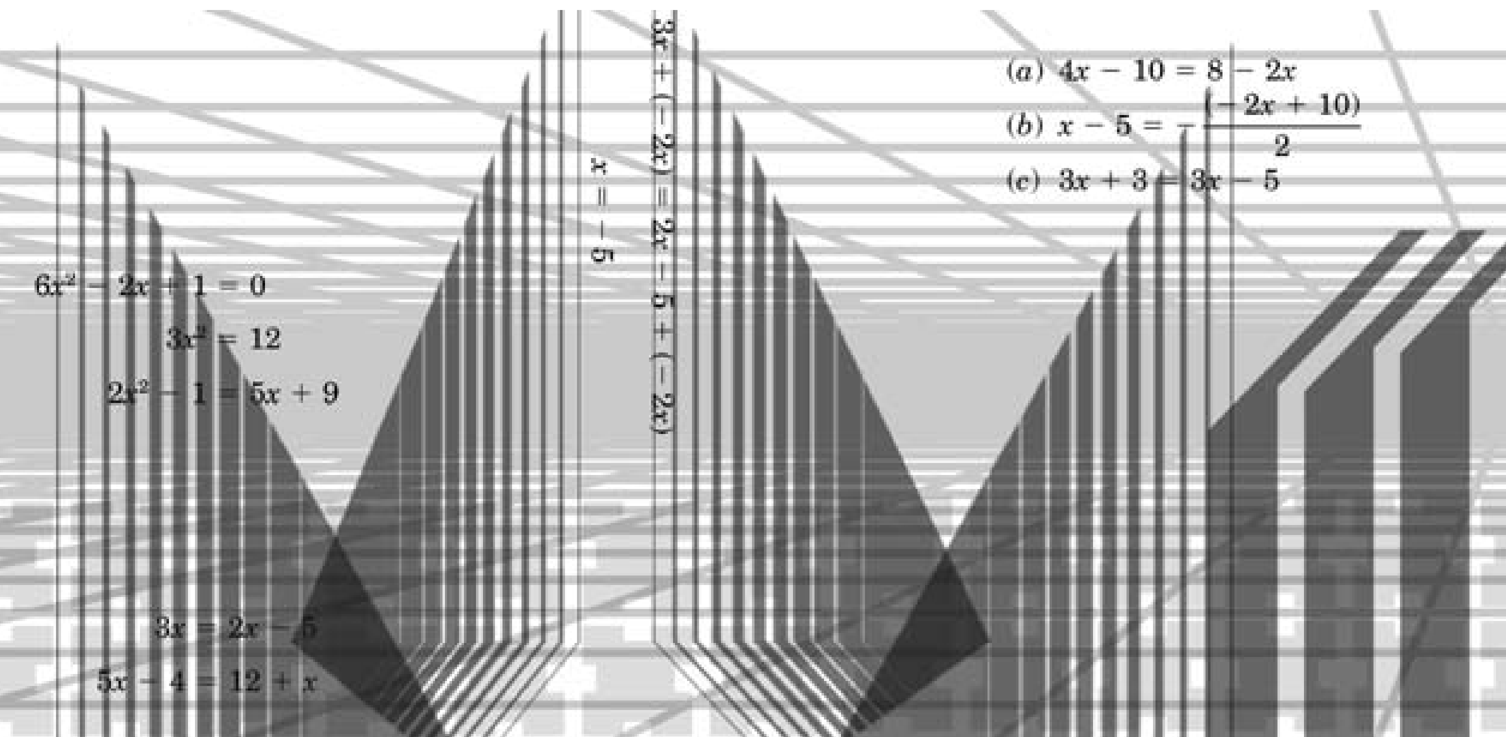
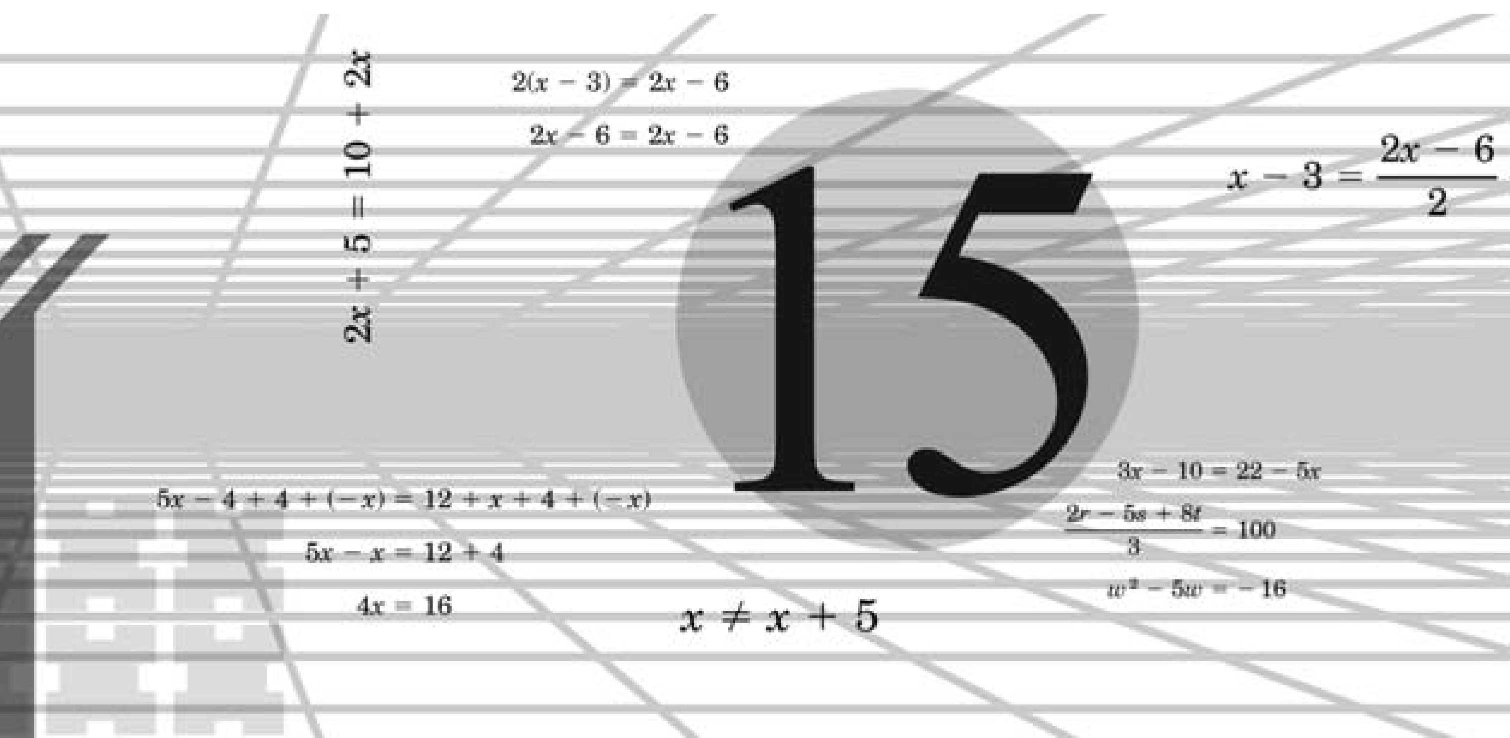
CAPÍTULO 15

Diferenciación



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Dar una introducción de los conceptos de límites y continuidad.
- Lograr que el lector entienda la razón de cambio promedio.
- Lograr que el lector comprenda la derivada, incluyendo su cálculo e interpretación.
- Explicar algunas reglas de la diferenciación y ofrecer ejemplos de su uso.
- Dar una introducción a la naturaleza de las derivadas de orden superior y de su interpretación.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Seguimiento de una epidemia

Una epidemia de gripe se está diseminando a lo largo de un estado del medio oeste de Estados Unidos. Con base en epidemias semejantes que se han presentado en lo pasado, los epidemiólogos han formulado una función matemática que estima el número de personas que serán afectadas por la gripe. *Haciendo uso de la función de estimación, los oficiales del departamento de salud desean predecir los efectos de la epidemia, incluyendo la estimación de la tasa de afectación así como el número de personas que sean contagiadas con la gripe (ejemplo 55).*

Éste es el primero de seis capítulos que examinan el ***cálculo*** y su aplicación a la administración, la economía y otras esferas de la solución de problemas. Dos áreas fundamentales de estudio en el cálculo son el ***cálculo diferencial*** y el ***cálculo integral***. El primero se centra en las *razones de cambio* al analizar una situación. En forma gráfica, el cálculo diferencial resuelve el siguiente problema: *dada una función cuya gráfica es una curva suave y dado un punto en el dominio de la función, ¿cuál será la pendiente de la línea tangente respecto de la curva en este punto?* Más adelante en este capítulo se verá que esa "pendiente" expresa la razón de cambio instantánea de la función.

El cálculo integral incluye la suma de un tipo especial. Desde el punto de vista gráfico, los conceptos de *área* en dos dimensiones o de *volumen* en tres dimensiones son importantes en el cálculo integral. En dos dimensiones, el cálculo integral resuelve el siguiente problema: *dada una función cuya gráfica es una curva suave y dos puntos en el dominio de la función, ¿cuál es el área de la región acotada por la curva y el eje x entre los dos puntos?*

Este capítulo, los siguientes dos y el capítulo 20 analizarán el cálculo diferencial y sus aplicaciones. En el capítulo 18 se dará una introducción al cálculo integral y en el capítulo 19 se analizarán sus aplicaciones. El objetivo de estos capítulos es ofrecer un conocimiento de lo que es el cálculo y sus áreas de aplicación. Aunque se necesitarían varios semestres de estudio intensivo para entender la mayor parte de los puntos más finos del cálculo, lo que aquí se explica permitirá al lector entender las herramientas para efectuar análisis en niveles elementales.

En este capítulo se pretende sentar las bases para lo que se verá en los siguientes. En primer lugar, se describirán dos conceptos que son muy importantes en la teoría del cálculo diferencial: *límites* y *continuidad.* Este análisis se acompañará de un desarrollo intuitivo del concepto de la *derivada.* En el resto del capítulo se proporcionarán las herramientas con que se calculan las derivadas y también se darán ideas sobre la interpretación del significado de la derivada. Las demostraciones de las reglas de la diferenciación no se presentan en la parte principal del capítulo, pero se ofrecen algunas de ellas en el apéndice al final del mismo.

15.1 Límites

Dos conceptos muy importantes en la teoría del cálculo diferencial e integral son el ***límite de una función*** y la ***continuidad***. El concepto de límite se comenta en la presente sección. En la siguiente se extiende este tema y lleva al concepto de continuidad. Se recomienda al lector leer atentamente estas explicaciones, pues se trata de conceptos que muchas veces se entienden en forma equivocada.

Límites de las funciones

En el cálculo a menudo se desea conocer el valor límite de una función a medida que la variable independiente se aproxima a un número real específico. Este valor límite, cuando existe, recibe el nombre de ***límite***. La notación

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L} \tag{15.1}$$

sirve para expresar los valores límites de una función. La ecuación (15.1) se lee "el límite de $f(x)$, a medida que x se aproxima al valor a, es igual a L". *Cuando se investiga un límite, en realidad se está preguntando si $f(x)$ se acerca a un valor específico L a medida que el valor de x se aproxima más y más hacia a.*

Se dispone de varios procedimientos para determinar el límite de una función. La tentación nos lleva a sustituir simplemente el valor $x = a$ en f y a determinar $f(a)$. En verdad se trata de una forma válida de determinar el límite de muchas funciones, pero no de todas.

Un método que puede aplicarse consiste en sustituir los valores de la variable independiente en la función, en tanto se observa el comportamiento de $f(x)$ a medida que el valor de x va aproximándose más y más hacia a. Un aspecto importante de este procedimiento es que el valor de la función se observa conforme el valor de a se aproxima desde ambos lados de a. La notación $\lim_{x \to a^-} f(x)$ representa el límite de $f(x)$ al aproximarse x hacia a desde la izquierda (***límite por la izquierda***) o desde abajo. La notación $\lim_{x \to a^+} f(x)$ representa el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima hacia a desde la derecha (***límite por la derecha***) o desde arriba. ***Si el valor de la función se aproxima al mismo número L conforme x se acerca hacia a desde ambas direcciones, entonces el límite es igual a L***. Esto se expresa con mayor precisión como sigue:

Prueba de la existencia de un límite

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si los valores límite de $f(x)$ son diferentes cuando x se aproxima hacia a desde ambas direcciones, entonces la función no se aproxima a un límite conforme x se acerca hacia a. Los siguientes ejemplos muestran claramente esto.

Ejemplo 1

A fin de determinar el $\lim_{x \to 2} x^3$ (si es que existe), construyamos una tabla de valores supuestos para x y los valores correspondientes para $f(x)$. La tabla 15.1 contiene estos valores. Adviértase que el valor de $x = 2$ ha sido aproximado desde la izquierda y la derecha. Y desde una y otra dirección, $f(x)$ se acerca al mismo valor, 8. Puesto que

Tabla 15.1

Aproximación de $x = 2$ desde la izquierda							
x	1	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
$f(x) = x^3$	1	3.375	6.858	7.415	7.881	7.94	7.988
Aproximación de $x = 2$ desde la derecha							
x	3	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001
$f(x) = x^3$	27	15.625	9.261	8.615	8.121	8.060	8.012

$$\lim_{x \to 2^-} x^3 = 8 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8$$

entonces

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

Obsérvese que este límite podría haberse determinado con sólo sustituir $x = 2$ en f.

La figura 15.1 confirma el resultado. Cuanto más se acerque x al valor de 2, más se aproxima a 8 el valor de $f(x)$.

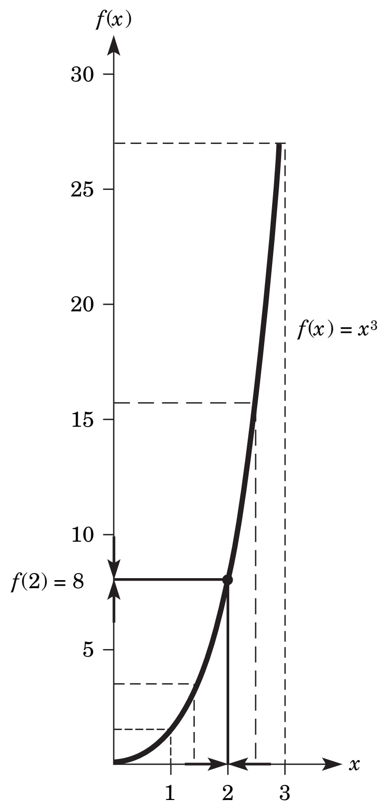


Figura 15.1 $\lim_{x \to 2^-} x^3 = \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8.$

Tabla 15.2

Aproximación de $x = 4$ desde la izquierda						
x	3	3.5	3.8	3.9	3.95	3.99
$f(x) = 2x$	6.0	7.0	7.6	7.8	7.9	7.98
Aproximación de $x = 4$ desde la derecha						
x	5	4.5	4.3	4.1	4.05	4.01
$f(x) = 2x + 3$	13.0	12.0	11.6	11.2	11.1	11.2

Ejemplo 2

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{cuando } x \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{cuando } x > 4 \end{cases}$$

se determinará si existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$. Se elabora una tabla con los valores de $f(x)$ determinados a medida que x se aproxima al valor de 4 desde la izquierda y la derecha (tabla 15.2). Conforme x se aproxima al valor de 4 desde la izquierda, $f(x)$ se acerca al valor de 8, o

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$$

Como x se aproxima a 4 desde la derecha, $f(x)$ se acerca al valor de 11, es decir

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 11$$

Puesto que

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x)$$

la función no se acerca al valor límite cuando $x \to 4$, y no existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$. La figura 15.2 muestra la gráfica de esta función. En el capítulo 4 se dijo que el círculo sólido (●) indicaba que $x = 4$ está incluida en el dominio del segmento de la línea inferior y que el círculo abierto (○) denotaba que $x = 4$

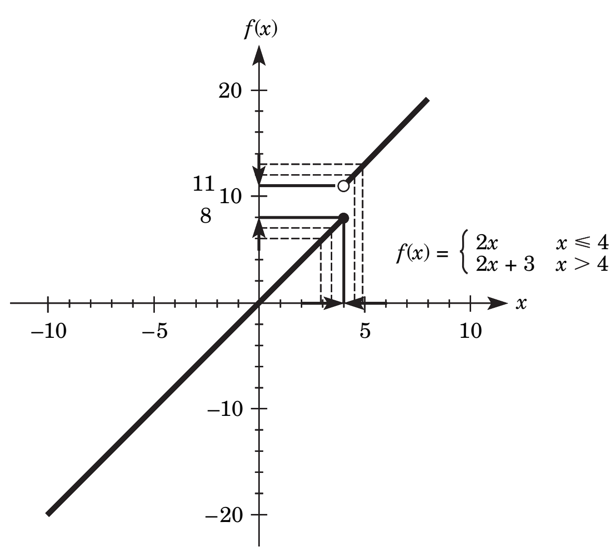


Figura 15.2 $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$.

no está incluida en el dominio del segmento de la línea superior. La interrupción de la función en $x = 4$ es la causa de que el límite no exista. Un punto importante en relación con esta función es que $f(x)$ no se aproxima al límite en el caso de otros valores que no sean $x = 4$.

Ejemplo 3

A continuación se determinará si existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

El denominador es 0 cuando $x = 3$, de manera que se puede concluir que la función no está definida en este punto. Y sería tentador afirmar que no existe límite alguno cuando $x = 3$. Sin embargo, esta función sí se aproxima a un límite conforme x se acerca a 3, a pesar de que esta función no está definida en $x = 3$.

Tabla 15.3

Aproximación de $x = 3$ desde la izquierda					
x	2	2.5	2.9	2.95	2.99
$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$	5.0	5.5	5.9	5.95	5.99
Aproximación de $x = 3$ desde la derecha					
x	4	3.5	3.1	3.05	3.01
$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$	7.0	6.5	6.1	6.05	6.01

La tabla 15.3 contiene valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima a 3 desde la izquierda y la derecha. Puesto que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

entonces

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Aun cuando la función no está definida si $x = 3$, la función se aproxima al valor de 6 a medida que el valor de x se acerca más a 3. La figura 15.3 presenta la gráfica de la función.

Ejemplo 4

Un caso especial es el de los límites en un punto final en el dominio de una función. Considérese la función $f(x) = \sqrt{x}$. El dominio de esta función es $x \geq 0$. Si se está interesado en $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$, no se pueden determinar los límites por la izquierda y por la derecha. Puede determinarse $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}$, pero no $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x}$. *Nuestro interés se centrará siempre en determinar los límites dentro del dominio de una función.* En este ejemplo, el límite se determinará exclusivamente a partir del límite derecho. Puesto que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, entonces $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. La figura 15.4 ilustra esta función. ❑

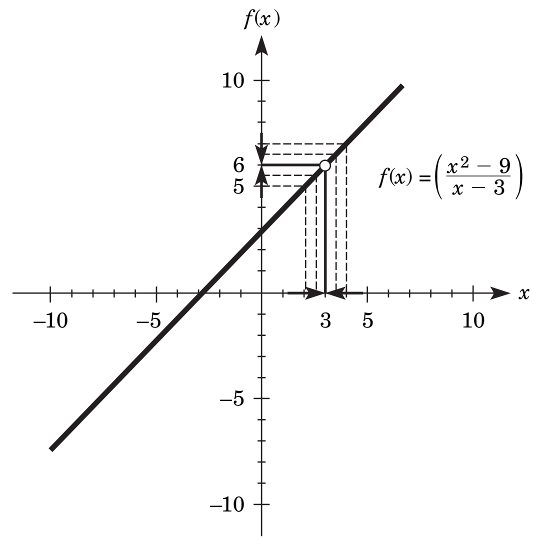


Figura 15.3

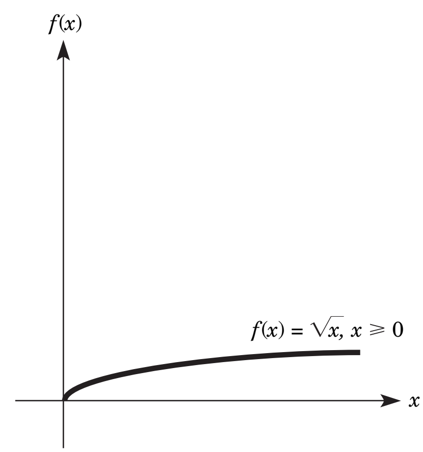


Figura 15.4

Un punto clave en el concepto de límite es que no se desea conocer el valor de f(x) **cuando** $x = a$. *Se requiere conocer el comportamiento de f*(x) *a medida que x se aproxima más y más al valor de a. Y la notación*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que a medida que x se acerca hacia a, pero $x \neq a$, *f*(x) *se aproxima a L.*

Sección 15.1 Ejercicios de seguimiento

1. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.5 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to -5^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -5^+} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -5} f(x)$

d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x \to 0} f(x)$

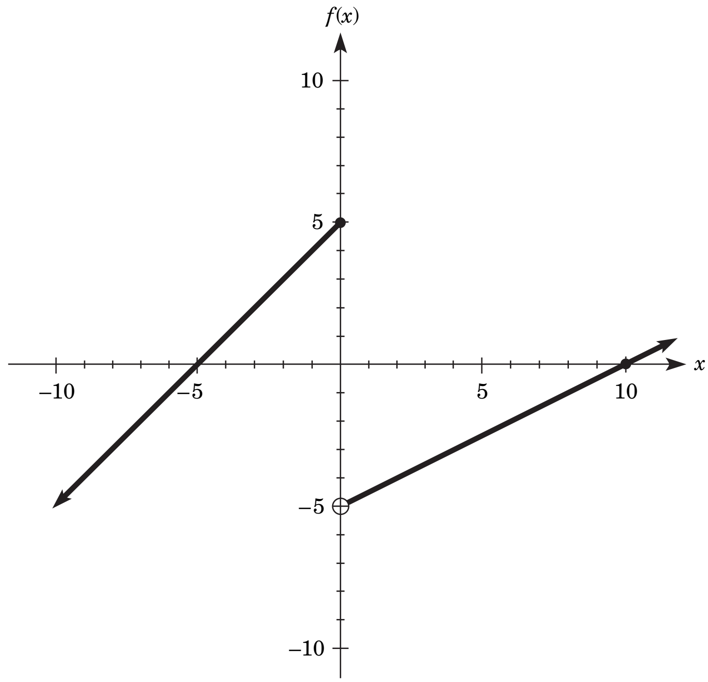


Figura 15.5

2. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.6 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to 0} f(x)$

d) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x \to 3} f(x)$

g) $\lim_{x \to -5} f(x)$ *h*) $\lim_{x \to 1} f(x)$

3. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.7 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to 1} f(x$

d) $\lim_{x \to 0} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x \to 0} f(x$

4. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.8 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to -4^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -4} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x \to -2} f(x)$

g) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ *h*) $\lim_{x \to 1} f(x)$

Para los ejercicios siguientes, determine el límite (si existe) construyendo una tabla de valores para $f(x)$ y examinando los límites de la izquierda y la derecha (donde sea apropiado).

5. $\lim_{x \to 3} 2x^2$

6. $\lim_{x \to -4} (5x + 15)$

7. $\lim_{x \to 5} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x < 5 \\ 20 - 2x & \text{para } x \geq 5 \end{cases}$

8. $\lim_{x \to 5} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{para } x < 5 \\ 2 - x & \text{para } x \geq 5 \end{cases}$

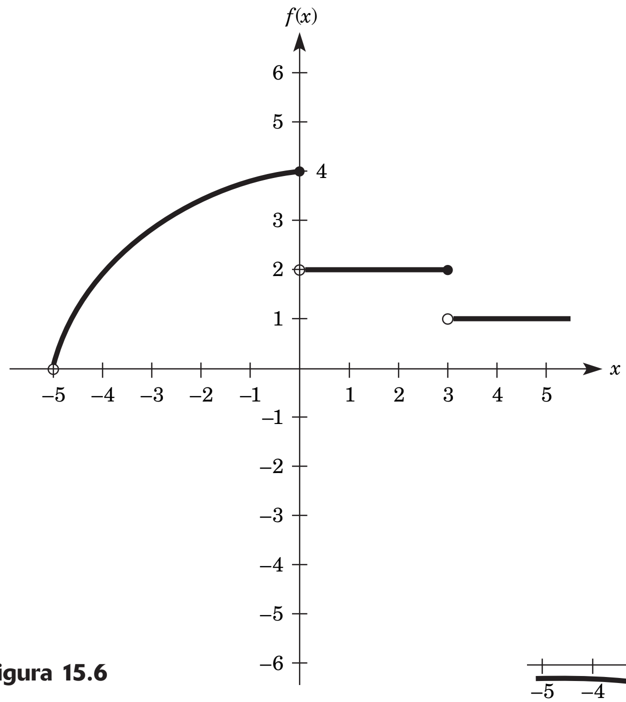


Figura 15.6

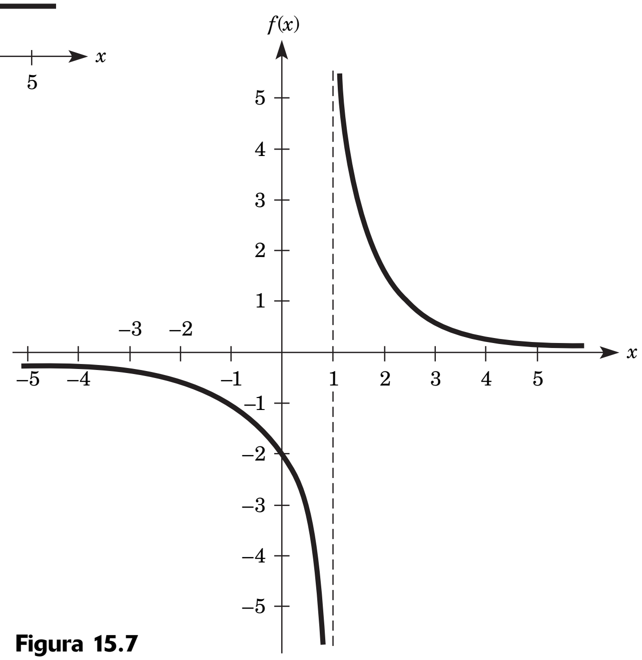


Figura 15.7

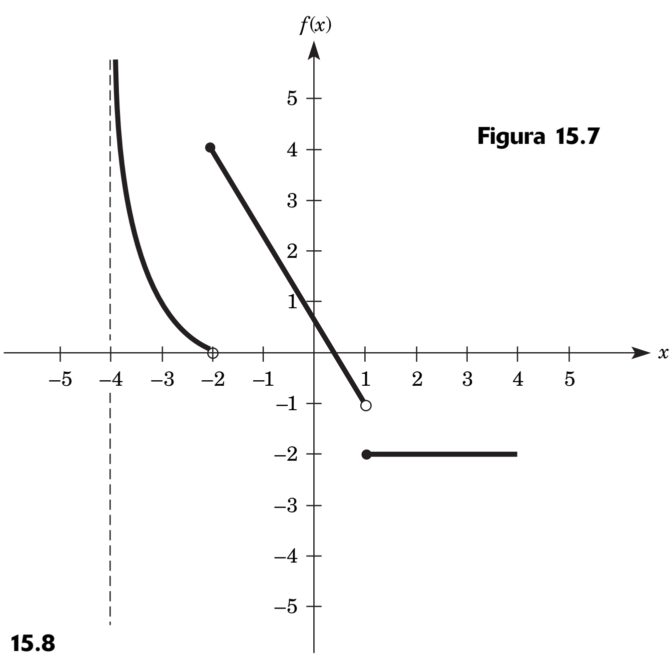


Figura 15.8

9. $\lim_{x \to -1} g(x)$ donde $g(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{para } x < -1 \\ 2x & \text{para } x \geq -1 \end{cases}$

10. $\lim_{x \to 0} h(x)$ donde $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 0 \\ 0.5x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

11. $\lim_{x \to -3} (-2x^3)$

12. $\lim_{x \to 4} (4x^2 - 5x + 1)$

13. $\lim_{x \to 2} (-x^3)$

14. $\lim_{x \to -2} (2x^3 - 16)$

15. $\lim_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 64}{x - 8}$

16. $\lim_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{3 - x}$

17. $\lim_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 9x - 12}{3x + 3}$

18. $\lim_{x \to -1/2} \dfrac{1 - x - 2x^2}{1 - 2x}$

19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{4}{x}$

20. $\lim_{x \to 3} \dfrac{4}{x - 3}$

21. $\lim_{x \to 3} \dfrac{8}{x + 3}$

22. $\lim_{x \to 2} \dfrac{5}{4 - 2x}$

23. $\lim_{x \to -7} \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$

24. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

25. $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

26. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x - 3}$

27. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$

28. $\lim_{x \to 3} \dfrac{2x^2 + 7x - 15}{x - 3}$

15.2 Propiedades de los límites y continuidad

Algunas propiedades de los límites

En la presente sección se analizan algunas propiedades de los límites, que son útiles para determinar el valor límite de una función. Pronto se verá que el proceso de determinación de los límites no siempre requiere una evaluación de $f(x)$ en una serie de puntos a ambos lados de $x = a$.

Propiedad 1 Si $f(x) = c$, donde c es real,

$$\lim_{x \to a} (c) = c$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x \to 3} 100 = 100$$

❑

Propiedad 2 Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$$

❑

Propiedad 3 Si $f(x)$ tiene un límite cuando $x \to a$ y c es real, entonces

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 10} 5x^2 &= 5 \lim_{x \to 10} x^2 \\ &= 5(10)^2 = 500 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 4 Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplo 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} (x^5 - 10) &= \lim_{x \to -1} x^5 - \lim_{x \to -1} 10 \\ &= (-1)^5 - 10 = -1 - 10 = -11 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 5 Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplo 9

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} [(x^2 - 5)(x + 1)] &= \lim_{x \to 4} (x^2 - 5) \cdot \lim_{x \to 4} (x + 1) \\ &= [(4)^2 - 5][4 + 1] \\ &= [16 - 5][5] \\ &= 11(5) = 55 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 6 Si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to x} g(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}, \qquad \text{siempre que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x\to -5} \frac{x}{x^2+10} = \frac{\lim\limits_{x\to -5} x}{\lim\limits_{x\to -5} (x^2+10)}$$
$$= \frac{-5}{(-5)^2+10} = \frac{-5}{35} = \frac{-1}{7}$$

❑

Como se verá en los siguientes ejemplos, para evaluar un límite se requiere a menudo la aplicación de más de una de estas propiedades.

Ejemplo 11

$$\lim_{x\to -1} x^4 = (-1)^4 = 1 \qquad \textbf{(Propiedad 2)}$$

Ejemplo 12

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 5} (x^2 - x + 10) &= \lim_{x\to 5} x^2 - \lim_{x\to 5} x + \lim_{x\to 5} 10 && \textbf{(Propiedad 4)} \\ &= 5^2 - 5 + 10 && \textbf{(Propiedades 1 y 2)} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Ejemplo 13

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -2} 5x^3 &= 5 \cdot \lim_{x\to -2} x^3 && \textbf{(Propiedad 3)} \\ &= (5)(-2)^3 && \textbf{(Propiedad 2)} \\ &= (5)(-8) = -40 \end{aligned}$$

Ejemplo 14

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} [(x^5-1)(x^3+4)] &= \lim_{x\to 0} (x^5-1) \cdot \lim_{x\to 0} (x^3+4) && \textbf{(Propiedad 5)} \\ &= (\lim_{x\to 0} x^5 - \lim_{x\to 0} 1)(\lim_{x\to 0} x^3 + \lim_{x\to 0} 4) && \textbf{(Propiedad 4)} \\ &= (0-1)(0+4) && \textbf{(Propiedades 1 y 2)} \\ &= (-1)(4) = -4 \end{aligned}$$

Ejemplo 15

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2} &= \frac{\lim\limits_{x\to 2} (x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2} x^2} && \textbf{(Propiedad 6)} \\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^3 - \lim\limits_{x\to 2} 1}{\lim\limits_{x\to 2} x^2} && \textbf{(Propiedad 4)} \\ &= \frac{2^3-1}{2^2} = \frac{8-1}{4} = \frac{7}{4} && \textbf{(Propiedades 1 y 2)} \end{aligned}$$

❑

Las propiedades hacen bastante más fácil el proceso de evaluación de los límites para determinadas clases de funciones. Los límites de estos tipos de funciones pueden evaluarse por **sustitución** para determinar $f(a)$. Para estas clases de funciones

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)} \qquad \textbf{(15.2)}$$

Las funciones polinomiales son una clase muy común de funciones para las cuales es válida la ecuación (15.2). Esta conclusión se deduce de las propiedades 1 a 4.

Ejemplo 16

$$\lim_{x \to -2} (3x^2 - 4x + 10) = f(-2)$$
$$= 3(-2)^2 - 4(-2) + 10 = 12 + 8 + 10 = 30$$

❑

En el ejemplo 3 se determinó

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Aun cuando la función no se defina en $x = 3$, su valor se aproxima a 6 a medida que x se acerca a 3. Esta función es un ejemplo de una familia de funciones de "cociente" que pueden simplificarse por factorización.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\ &= \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} \\ &= x + 3, \qquad \text{para toda } x \neq 3 \end{aligned}$$

Si bien $f(x) = [(x + 3)(x - 3)]/(x - 3)$ y $g(x) = x + 3$ *no* son la misma función, *son iguales siempre que se defina* $f(x)$. Como se aprecia en la figura 15.9, g y f se grafican como líneas idénticas exceptuando la presencia de un "hoyo" en $x = 3$ para la gráfica de f. Sin embargo, dado que no nos preocupa lo que sucede si f en $x = 3$, es posible determinar el comportamiento de f estudiando el de g.

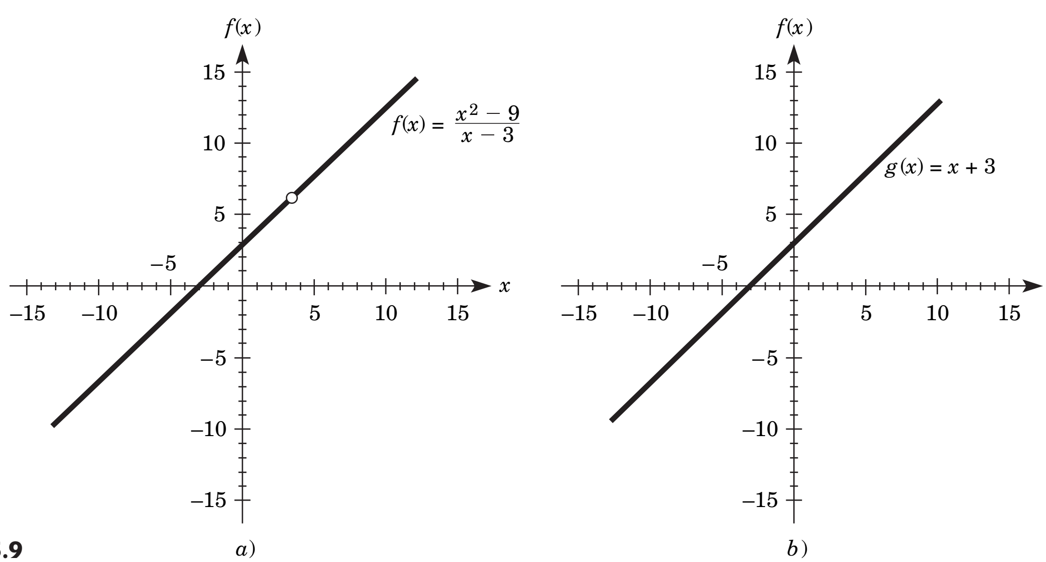


Figura 15.9

Haciendo uso de g como una función equivalente de f, el procedimiento de sustitución para determinar el límite es válido. Es decir,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3)$$
$$= 3 + 3 = 6$$

Ejemplo 17

$$\lim_{x \to -1} \frac{4x^2 + x - 3}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(4x - 3)(x + 1)}{x + 1}$$
$$= \lim_{x \to -1} (4x - 3)$$
$$= 4(-1) - 3 = -7$$

❑

Límites e infinito

A menudo se desea conocer el comportamiento de una función conforme aumenta la variable independiente sin límite alguno ("aproximándose" al infinito, tanto positivo como negativo). Examínense las dos funciones trazadas en la figura 15.10. En la figura 15.10*a*, al acercarse x al infinito negativo, $f(x)$ se aproxima al valor de 4 pero sin alcanzarlo nunca. Usando la notación de límites, se establece que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$$

También puede afirmarse que $f(x)$ tiene una ***asíntota horizontal*** que es $y = 4$ conforme x se acerca a $-\infty$. También, esto significa que $f(x)$ se aproxima a un valor de 4, aunque sin alcanzarlo nunca, a medida que x se acerca a $-\infty$.

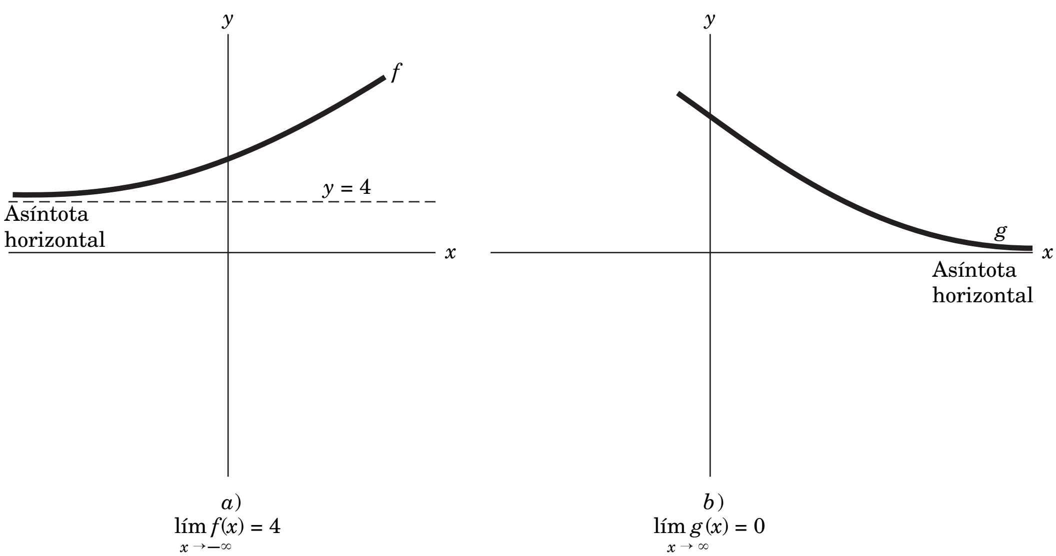


Figura 15.10 Límites hacia el infinito.

De igual manera, en la figura 15.10*b*, g se acerca al eje x aunque sin tocarlo nunca, conforme x se aproxima a ∞. Este comportamiento puede formularse mediante la notación

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Como en el caso de f, g tiene una asíntota horizontal de $y = 0$, al aproximarse x a ∞.

Una definición más formal de una asíntota horizontal es la siguiente.

Definición: Asíntota horizontal

La línea $y = a$ es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de f si y sólo si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

o

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

A continuación se analizará la evaluación de límites a medida que la variable independiente se aproxima al infinito positivo o negativo. Considérese

$$\lim_{x \to \infty} (1/x)$$

En la tabla 15.4 se ofrece la sustitución de los valores muestra de x. En esta tabla se observa que $\lim_{x \to \infty} (1/x) = 0$.

Tabla 15.4

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000
$f(x) = 1/x$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

Considérese la evaluación de $\lim_{x \to \infty} (1/x^2)$. La tabla 15.5 contiene un resumen de los valores de la función para diversos valores de x. Una vez más, se advierte que $\lim_{x \to \infty} (1/x^2) = 0$. En comparación con $\lim_{x \to \infty} (1/x)$, elevar al cuadrado x en el denominador hace que se aproxime el límite a una razón más rápida.

Tabla 15.5

x	1	10	100	1 000	10 000
$f(x) = 1/x^2$	1	0.01	0.0001	0.00001	0.0000001

Ejemplo 18

Pongamos el caso de la evaluación de $\lim_{x \to \infty} (3x^2 + 5x)/(4x^2 - 5)$. *Una técnica con que se evalúa este límite es factorizar el término monomial de mayor grado, tanto en el numerador como en el denominador*. Al factorizar $3x^2$ en el numerador y $4x^2$ en el denominador se obtiene

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{4x^2}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{5x}{3x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{5}{4x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)}{\left(1-\dfrac{5}{4x^2}\right)}\right]$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4}\left[\frac{(1+0)}{(1-0)}\right]$$
$$=\frac{3}{4}$$

Ejemplo 19 Considérese la evaluación de $\lim_{x\to-\infty}(5x^3-20x)/(3x^2+5)$. Al aplicar la misma técnica que en el ejemplo anterior, se factorizan $5x^3$ en el numerador y $3x^2$ en el denominador. Esto da

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x^3}{3x^2}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{20x}{5x^3}\right)}{\left(1+\dfrac{5}{3x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x}{3}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{5}{3x^2}\right)}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x}{3}\cdot\frac{(1-0)}{(1+0)}\right]$$
$$=-\infty$$

❑

Aunque tal vez esto no sea claro en los ejemplos presentados hasta ahora, el límite de una función racional al acercarse x al infinito positivo o negativo es simplemente *el límite del cociente del término monomial de mayor grado en el numerador y el término monomial de mayor grado en el denominador*. Eso se debe a que los términos de mayor grado en el numerador y denominador dominan a los otros términos al aproximarse x al infinito positivo o negativo. En el ejemplo 18 puede evaluarse el límite al determinar el comportamiento de $3x^2/4x^2$ a medida que $x\to\infty$. En el ejemplo 19, el límite se obtiene al evaluar el límite de $5x^3/3x^2$ como $x\to-\infty$.

A continuación este concepto se ilustra específicamente al evaluar

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-2x^3+5x}{25+3x^2-7x^4}$$

Puesto que $4x^4$ y $-7x^4$ son los términos monomiales de mayor grado en el numerador y denominador, respectivamente, el límite puede evaluarse al determinar

$$\lim_{x\to\infty}(4x^4/-7x^4)=\lim_{x\to\infty}(4/-7)$$
$$=\frac{-4}{7}$$

Otra posibilidad de límite se da en la figura 15.11. En esta figura, $f(x)$ se vuelve arbitrariamente grande al aproximarse x al valor de a. En esta situación se afirma que f presenta una ***asíntota vertical*** de $x=a$ debido a que al acercarse x al valor de a, $f(x)$ crece sin lími-

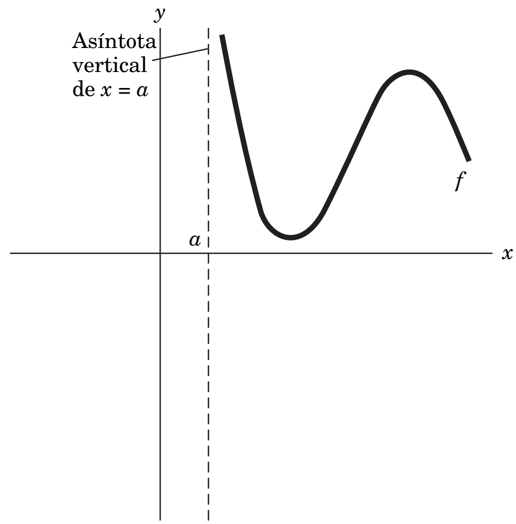


Figura 15.11 Asíntota vertical.

te. Desde el punto de vista visual, la ordenada de la curva que representa f crece sin límite alguno conforme la curva va aproximándose a la línea cuando $x = a$, pero sin tocarla nunca. He aquí una definición más formal de este fenómeno.

Definición: Asíntota vertical

La línea $x = a$ es una ***asíntota vertical*** de la gráfica de f si y sólo si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad (\text{o } -\infty)$$

o

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad (\text{o } -\infty)$$

Ejemplo 20

Para evaluar $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$, se toman los límites izquierdo y derecho al aproximarse x a 0. La tabla 15.6 contiene algunos valores selectos. Deberá llegarse a la conclusión de que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. Desde el punto de vista gráfico, f tiene el aspecto de la figura 15.12. Adviértase que $f(x) = 1/x^2$ tiene una asíntota vertical de $x = 0$, además de asíntotas horizontales de $y = 0$.

Tabla 15.6

Aproximación de $x = 0$ desde la izquierda					
x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	1	4	100	10 000	1 000 000

Aproximación de $x = 0$ desde la derecha					
x	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	1	4	100	10 000	1 000 000

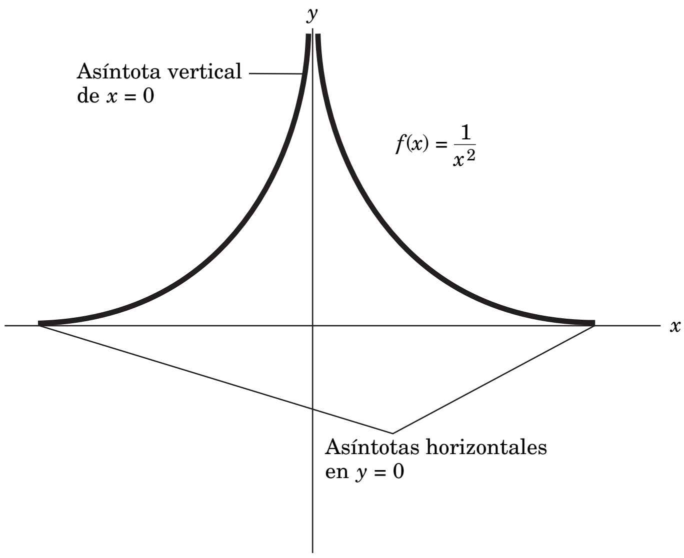


Figura 15.12 Asíntota horizontal en $y = 0$.

❑

NOTA Una conclusión de que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

o

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

implica que *no existe un límite*; es decir, no existe un valor límite en los números reales para $f(x)$.

Continuidad

En un sentido informal, una función se describe como ***continua*** si puede graficarse sin levantar la pluma o el lápiz del papel (es decir, no tiene brechas, ni saltos, ni interrupciones). La mayor parte de las funciones que se examinarán en el cálculo serán funciones continuas. La figura 15.13 indica las gráficas de cuatro funciones distintas. Las descritas en la figura 15.13*a* y 15.13*b* son continuas porque pueden trazarse sin levantar el lápiz del papel. Las de las figuras 15.13*c* y 15.13*d* no son continuas a causa de las “interrupciones” de las funciones. Una función que no sea continua recibe el nombre de ***discontinua***. En seguida se da una definición más formal de la propiedad de la continuidad.

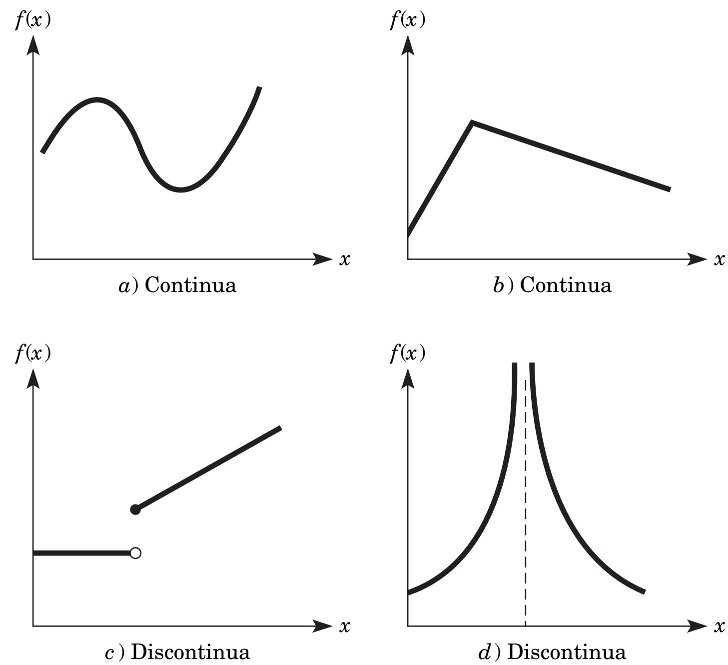


Figura 15.13 Evaluación de la continuidad.

Definición: Continuidad en un punto

Se dice que una función f es ***continua*** en $x = a$ si

1. *la función está definida en $x = a$, y*

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ **(15.3)**

Ejemplo 21 En el ejemplo 1 se determinó que para $f(x) = x^3$

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

Puesto que $f(x) = x^3$ está defina cuando $x = 2$ y $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = f(2) = 8$, se puede afirmar que la función $f(x) = x^3$ es continua en $x = 2$.

Ejemplo 22 En el ejemplo 3 se determinó que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Como $x = 3$ no se encuentra en el dominio de la función, $f(3)$ no está definida y puede afirmarse que la función $(x^2 - 9)/(x - 3)$ es *discontinua* cuando $x = 3$. ❑

Definición: Continuidad sobre un intervalo

La función f es continua sobre un intervalo $[a, b]$ si lo es en todos los puntos del intervalo.

Ejemplo 23 La función $f(x) = x^2 - 2x + 5$ es continua para cualquier x real, debido a que

1. *f está definida para todo número real, y*
2. $$\lim_{x \to a} (x^2 - 2x + 5) = f(a)$$
$$= a^2 - 2a + 5 \qquad \textit{para toda } a \textit{ real}$$

Ejemplo 24 La función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

no está definida cuando

$$x^3 - x = 0$$

o

$$x(x^2 - 1) = 0$$

o bien

$$x(x + 1)(x - 1) = 0$$

Puesto que el miembro izquierdo de la ecuación será 0 cuando $x = 0$, $x = -1$ o $x = +1$, la función es discontinua en esos tres valores. La figura 15.14 presenta una gráfica de la función. Obsérvese que esta función tiene asíntotas verticales descritas por las ecuaciones $x = 1$, $x = -1$, y $x = 0$.

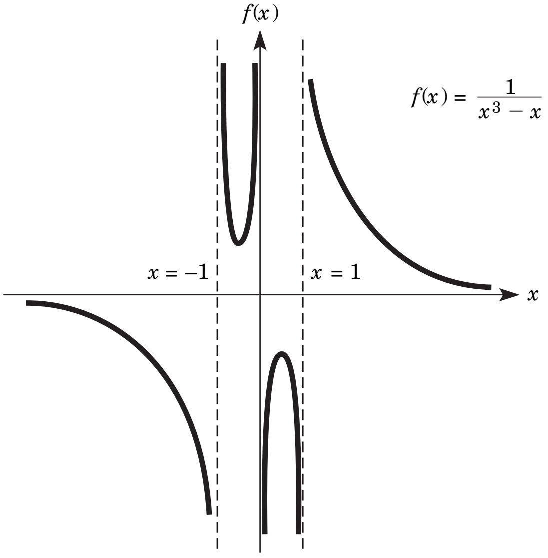


Figura 15.14 Discontinuidades en $x = 0, -1, 1$.

❑

Sección 15.2 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios encuentre el límite indicado.

1. $\lim_{x \to 0} (3x^2 - 5x + 3)$

2. $\lim_{x \to 2} (2x^3 - 10x)$

3. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3}{3} - 7x^2\right)$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{2x - 8}{x + 4}$

5. $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + 3}{x^3 + 4x - 2}$

6. $\lim_{x \to -4} 250$

7. $\lim_{x \to 0} 175$

8. $\lim_{x \to -10} \frac{x^2 + 25}{x}$

9. $\lim_{x \to 1} (3x^3 + 2x^2 + x)$

10. $\lim_{x \to -2} (-x^4 + 8x^2)$

11. $\lim_{x \to -2} (-x^3 + 5x^2 + 10)$

12. $\lim_{x \to 2} (5x^3 + 10x^2)$

13. $\lim_{x \to 5} \left(\frac{4x - 20}{3x^2 - 7x + 5}\right)$

14. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{10 + x^2}{5 - 8x + 2x^2}\right)$

15. $\lim_{x \to -3} (6x^3 + 2x)(5x - 10)$

16. $\lim_{x \to 5} \left[\left(\frac{x + 3}{x + 6}\right)(x^2 - 12)\right]$

17. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 8x - 14}{2x + 7}$

18. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 24}{x - 3}$

19. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

20. $\lim_{x \to -9} \frac{81 - x^2}{9 + x}$

21. $\lim_{x \to c} (4x^3 - 5x^2 + 10)$

22. $\lim_{x \to -d} (x^2 - 2x + 3)$

En los ejercicios siguientes, calcule el límite indicado y comente la existencia de asíntotas.

23. $\lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2}$

24. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x - 3}{x + 10}$

25. $\lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{5x + 100}$

26. $\lim_{x \to -\infty} \frac{8x + 10}{-4x}$

27. $\lim_{x \to -\infty} 2x$

28. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 4}$

29. $\lim_{x \to \infty} \frac{-8x}{4x + 1\,000}$

30. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x + 10\,000}{2x - 5\,000}$

31. $\lim_{x \to -\infty} \frac{100 - 3x^3}{-x^3}$

32. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 500}{5\,000 - x^3}$

En los siguientes ejercicios, determine si existen discontinuidades y, en caso de haberlas, señale dónde se presentan.

33. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

34. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$

35. $f(x) = \frac{x^4}{5}$

36. $f(x) = \frac{3x^2}{x + 5}$

37. $f(x) = \dfrac{1}{8 - 2x}$

38. $f(x) = |x|$

39. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 4x - 21}$

40. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 8x}$

41. $f(x) = \dfrac{4x - 3}{x^3 - x^2 - 6x}$

42. $f(x) = \dfrac{5/x}{2x^2 + 7x - 15}$

43. $f(x) = \dfrac{20}{x^2 - 3x - 10}$

44. $f(x) = \dfrac{4/x}{18 + 3x - x^2}$

45. $f(x) = \dfrac{10/(5 - x)}{4 - x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{5/(3 - x)}{x^2 - 16}$

47. $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^4 - 27x}$

48. $f(x) = \dfrac{3/(x^2 - 1)}{2/(x^2 - 4)}$

15.3 Razón de cambio promedio

Razón de cambio promedio y pendiente

Como se dijo en el capítulo 2, la pendiente de una línea recta puede determinarse aplicando la fórmula de los dos puntos.

Fórmula de los dos puntos

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \textbf{(15.4)}$$

La figura 15.15 ilustra la gráfica de una función lineal. En este tipo de funciones la pendiente es constante sobre el dominio de la función. La pendiente constituye una *medida exacta* de la razón de cambio del valor de y respecto del que se cambió en el valor de x. Si

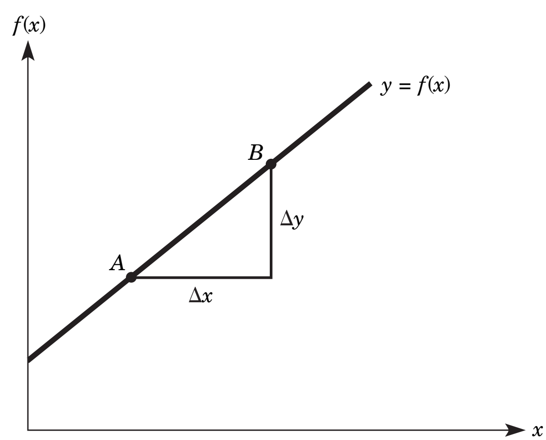


Figura 15.15 Función lineal con pendiente constante.

la función en la figura 15.15 representa una función lineal del costo y x denota el número de unidades producidas, la pendiente indica la razón a que se incrementa el costo total respecto de los cambios en el nivel de producción.

En las funciones no lineales, la razón de cambio en el valor de y en relación con un cambio de x no es constante. Sin embargo, una manera de describir parcialmente las funciones no lineales es por la ***razón de cambio promedio*** sobre algún intervalo.

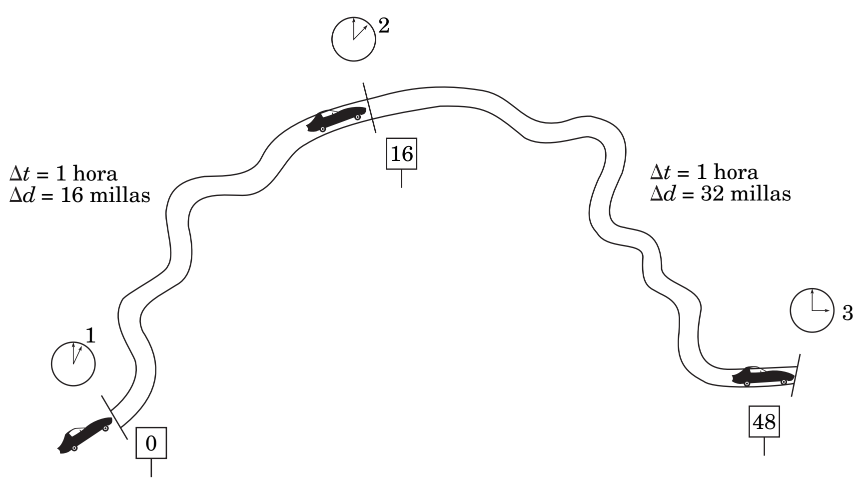
Ejemplo 25 Supóngase que una persona hace un viaje de placer en automóvil y que la distancia recorrida d puede describirse en función del tiempo t por medio de la función no lineal

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t$$

donde d se mide en millas, t en horas y $0 \le t \le 5$. Durante este viaje de 5 horas, la velocidad del automóvil puede variar continuamente (por ejemplo, a causa de los semáforos, las paradas para descansar y otros factores).

Al cabo de una hora, la distancia total recorrida será

$$\begin{aligned} f(1) &= 8(1)^2 + 8(1) \\ &= 16 \text{ millas} \end{aligned}$$



La razón de cambio promedio en la distancia recorrida respecto del cambio en el tiempo durante un intervalo (conocida mejor con el nombre de ***velocidad promedio***) se calcula así

$$\frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

En la primera hora de viaje, la velocidad promedio es

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{16 - 0}{1} = 16 \text{ mph}$$

La distancia recorrida al cabo de dos horas será

$$\begin{aligned} f(2) &= 8(2)^2 + 8(2) \\ &= 32 + 16 = 48 \text{ millas} \end{aligned}$$

La distancia recorrida *durante* la segunda hora es

$$\begin{aligned} \Delta d &= f(2) - f(1) \\ &= 48 - 16 = 32 \text{ millas} \end{aligned}$$

La velocidad promedio *en la segunda hora* será

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{32}{1} = 32 \text{ mph}$$

La velocidad promedio para la segunda hora es distinta comparada con la alcanzada durante la primera hora.

La velocidad promedio *durante las dos primeras horas* es la distancia total recorrida en ese periodo, dividida entre el tiempo del viaje, o

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{48 - 0}{2} = 24 \text{ mph}$$ ❑

Ejercicio de práctica

¿Cuál es la velocidad promedio para todo el viaje de cinco horas? *Respuesta:* 48 mph.

Considere dos puntos, A y B, en la figura 15.16. La línea recta que une estos dos puntos en f recibe el nombre de ***línea secante***. En el punto A la variable independiente posee

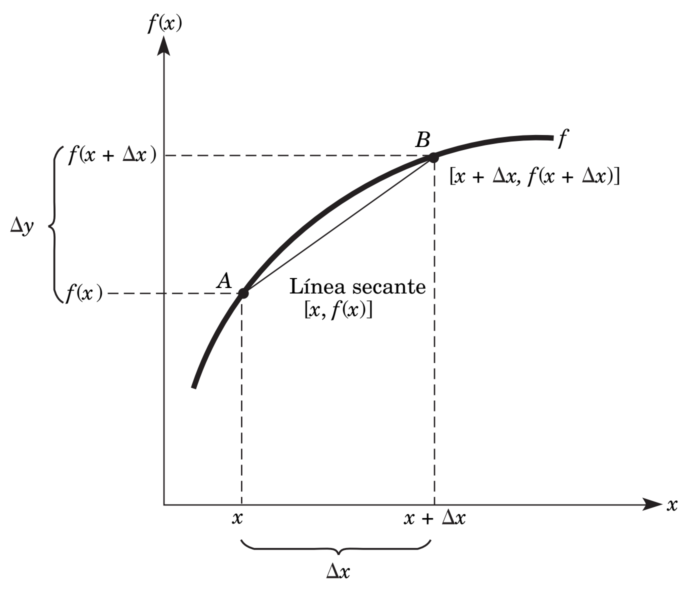


Figura 15.16 Línea secante AB.

un valor de x, y el valor correspondiente de la variable dependiente puede determinarse al evaluar $f(x)$. En el punto B, la variable independiente cambió su valor por $x + \Delta x$, y el valor correspondiente de la variable dependiente se calcula evaluando $f(x + \Delta x)$. Al pasar del punto A al punto B, el cambio del valor en x es $(x + \Delta x) - x$, o Δx. El cambio asociado en el valor de y es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. La razón de estos cambios es

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{15.5}$$

A la ecuación (15.5) se le llama en ocasiones ***cociente de la diferencia***.

Definición: El cociente de la diferencia

Dados cualesquiera dos puntos en una función f con coordenadas $[x, f(x)]$ y $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$, el cociente de la diferencia da una expresión general que representa

I *la razón de cambio promedio en el valor de y respecto del cambio en x mientras se mueve desde $[x, f(x)]$ hasta $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$;*

II *la pendiente de la línea secante que conecta los dos puntos.*

Ejemplo 26

a) Encuentre la expresión general del cociente de la diferencia de la función $y = f(x) = x^2$.
b) Obtenga la pendiente de la línea que une $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ usando la fórmula de los dos puntos.
c) Encuentre la pendiente del inciso *b*) mediante la expresión del cociente de la diferencia obtenido en el inciso *a*).

SOLUCIÓN

a) Dados dos puntos en la función $f(x) = x^2$ que tengan coordenadas $[x, f(x)]$ y $[(x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{[x^2 + x(\Delta x) + x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{[x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}\end{aligned}$$

Al factorizar Δx en cada término del numerador y al cancelar con Δx en el denominador, queda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}\\ &= 2x + \Delta x\end{aligned} \tag{15.6}$$

NOTA Cuando se calcula el cociente de la diferencia, la evaluación de $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$ para una función específica causa grandísimas dificultades a los estudiantes. Si en esta función se nos pide encontrar $f(3)$, se sustituirá el valor de 3 en la función siempre que aparezca la variable independiente, o sea $f(3) = 3^2 = 9$. Cuando se nos pidió calcular $f(x + \Delta x)$ en este ejemplo, se sustituyó $x + \Delta x$ en la función cuando aparecía la variable independiente y se evaluó $(x + \Delta x)^2$. De manera análoga, cuando se determinó $f(x)$, se sustituía el valor x siempre que aparecía la variable independiente y se evaluó x^2. *Cuando se pida al lector determinar el cociente de la diferencia $f(x)$, invariablemente será la función específica con la que esté trabajando.*

b) Aplicando la fórmula de la pendiente de los dos puntos, se obtendrá

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}\\ &= \frac{(3)^2 - (-2)^2}{5}\\ &= \frac{9 - 4}{5} = \frac{5}{5} = 1\end{aligned}$$

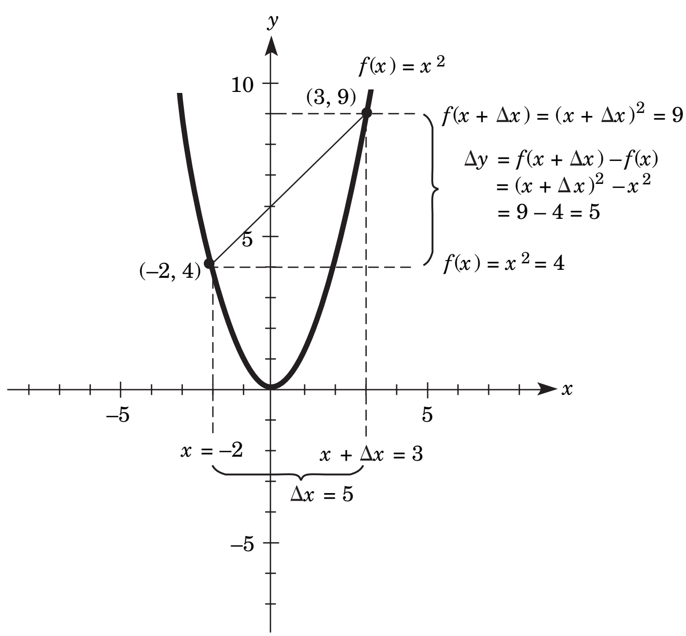


Figura 15.17

La pendiente de la secante que une $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ sobre f es 1.

c) Como se muestra en la figura 15.17, supóngase que $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ corresponden a los puntos $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ en la función. Supóngase asimismo que x corresponde a la coordenada -2 y $x + \Delta x$ corresponde a la coordenada 3. Por lo tanto,

$$(x, f(x)) \quad (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$$
$$(-2, 4) \quad (3, 9)$$

En consecuencia, $$x = -2$$

y $$x + \Delta x = 3$$

Por consiguiente, $$(-2) + \Delta x = 3$$

o bien $$\Delta x = 5$$

Este valor para Δx (el cambio en x) significa sencillamente que al desplazarse *desde* $(-2, 4)$ hasta $(3, 9)$, el valor de x se ha *incrementado* en cinco unidades.

Si se sustituyen los valores de $x = -2$ y $\Delta x = 5$ en la ecuación (15.6), el resultado es exactamente el mismo que se consiguió en el inciso *b*.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= 2x + \Delta x \\ &= 2(-2) + 5 = 1\end{aligned}$$ ❑

Ejercicio de práctica

Como al encontrar la pendiente de una línea que conecta dos puntos, el cociente de la diferencia [ecuación (15.5)] para dos puntos específicos en una función no es afectado por los puntos que se etiquetan como $[x, f(x)]$ y como $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$. En el último ejemplo, sea $x = 3$ y $(x + \Delta x) = -2$. Evalúe el cociente de la diferencia y compruebe si llega al mismo resultado que en el ejemplo.

Sección 15.3 Ejercicios de seguimiento

En cada una de las siguientes funciones, determine la razón de cambio promedio en el valor de y al pasar de $x = -1$ a $x = 2$.

1. $y = f(x) = 3x^2$
2. $y = f(x) = 5x^3$
3. $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$
4. $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$
5. $y = f(x) = x^2/(x + 4)$
6. $y = f(x) = x^3/2$
7. $y = f(x) = 2x^2 + 6x + 3$
8. $y = f(x) = 2x^2 - 8x + 10$
9. $y = f(x) = 4x^2 - 2x$
10. $y = f(x) = -x^2 + 2x + 4$
11. $y = f(x) = -5x^3$
12. $y = f(x) = 3x^3 + 4x - 5$
13. $y = f(x) = x^4$
14. $y = f(x) = x^4 - 10$
15. Se lanza una pelota al aire. Su altura puede describirse en función del tiempo conforme a la función

$$h(t) = -16t^2 + 128t$$

donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.

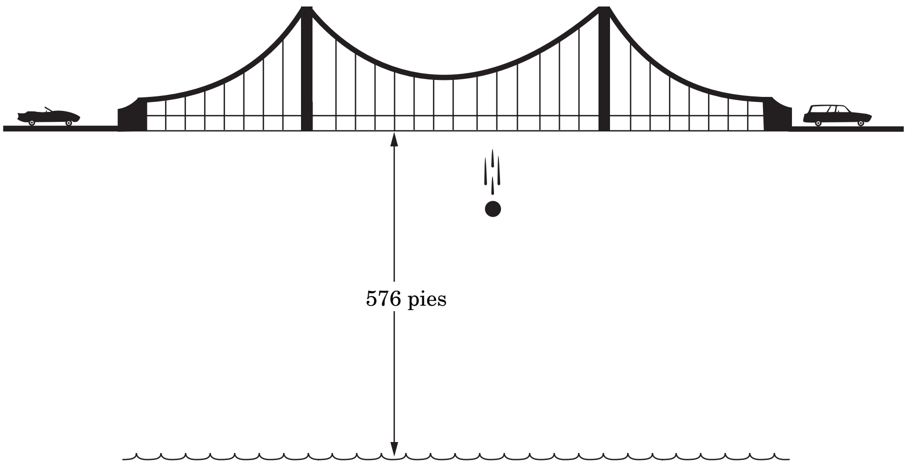
a) Determine la razón de cambio promedio en la altura entre $t = 0$ y $t = 2$. Entre $t = 0$ y $t = 4$. Entre $t = 0$ y $t = 8$.

b) ¿Cuánto tarda la pelota en caer al suelo ($h = 0$)?

16. Se deja caer un objeto desde un puente de 576 pies de alto. La altura del objeto se determina en función del tiempo (a partir del momento en que se deja caer) según la función

$$h(t) = 576 - 16t^2$$

donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.



a) Determine la razón de cambio promedio de altura entre $t = 0$ y $t = 1$. Entre $t = 0$ y $t = 2$. Entre $t = 0$ y $t = 4$.

b) ¿Cuánto tarda la pelota en caer al agua ($h = 0$)?

17. La tabla 15.7 indica las ventas anuales (en dólares) obtenidas por una compañía durante cierto periodo. ¿A qué razón promedio se incrementaron las ventas anuales entre 1988 y 1990? ¿Entre 1988 y 1989? ¿Entre 1989 y 1990? ¿Entre 1989 y 1991?

Tabla 15.7

Año	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**
Ventas anuales (millones)	\$100.8	\$105.4	\$109.8	\$116.5

18. **Asistencia al béisbol** La asistencia anual a los juegos de béisbol profesional se ha ido elevando en los últimos años. Las cifras correspondientes a los años de 1987 a 1991 se dan en la tabla 15.8. Calcule la razón de cambio promedio en la asistencia anual entre 1987 y 1991, 1987 y 1990, y 1989 y 1991.

Tabla 15.8

Año	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**	**1991**
Asistencia anual (millones)	63.1	64.8	66.0	67.8	69.0

19. Crecimiento de la población minoritaria Los hispanos son el grupo minoritario de más rápido crecimiento dentro de Estados Unidos. Si continúa la tendencia actual, se estima que la población de origen hispano superará a la de raza negra como el mayor grupo minoritario para el año 2005. La tabla 15.9 indica la estimación de la población de origen hispano en Estados Unidos (en millones) en los años recientes. Determine la razón de cambio promedio en la población hispana entre 1987 y 1989, 1988 y 1990, y 1987 y 1990.

Tabla 15.9

Año	1987	1988	1989	1990
Población	19.2	19.9	21.0	22.4

20. Televisión de pago por evento La televisión de pago por evento (PPV, *pay-per-view*) ha sido una creciente opción entre los televidentes. Con el PPV, los suscriptores de TV por cable contratan únicamente los eventos por cable que desean ver. Eventos especiales, como combates de boxeo por el campeonato del mundo o bien conciertos en vivo, son las principales ofertas de la modalidad de PPV. La figura 15.18 resume los ingresos totales para la industria durante los últimos cuatro años. Determine la razón de cambio promedio en los ingresos de PPV entre 1987 y 1989, y entre 1987 y 1990.

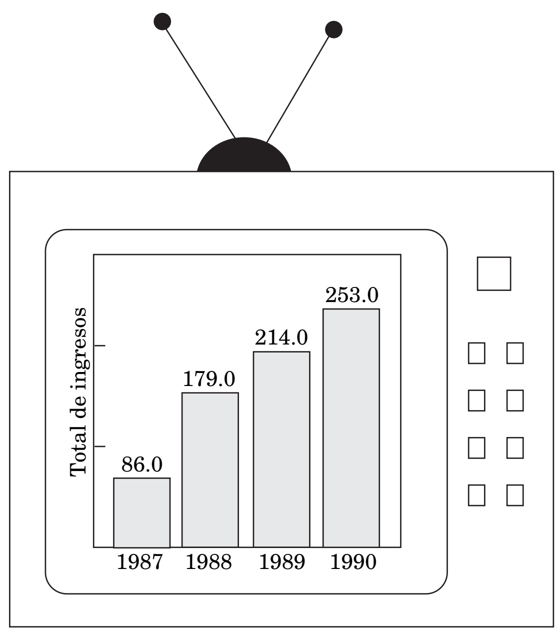


Figura 15.18 Ingresos por "pago por evento", en millones de $.

21. Una persona hace un viaje en automóvil. La distancia recorrida d (en millas) se describe en función del tiempo t (en horas):

$$d = f(t) = 5t^2 + 12t, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 4$$

a) ¿Cuál es la velocidad promedio en la primera hora? ¿Y en la segunda hora?
b) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el viaje de cuatro horas?

En los ejercicios 22 a 39: *a*) determine la expresión general del cociente de la diferencia y *b*) con ese cociente calcule la pendiente de la línea secante que une los puntos en $x = 1$ y en $x = 3$.

22. $y = f(x) = 4x^2 + 3$

23. $y = f(x) = x^2 + 3x$

24. $y = f(x) = 10x^2 + 20x$

25. $y = f(x) = 5$

26. $y = f(x) = -3x^2 + 8x + 10$

27. $y = f(x) = 5x^2 + 20x$

28. $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x$

29. $y = f(x) = \dfrac{x^2}{3} + 5x$

30. $y = f(x) = ax^2 - bx$

31. $y = f(x) = mx^2 - n$

***32.** $y = f(x) = x^3$

***33.** $y = f(x) = -2x^3$

***34.** $y = f(x) = 1/x$

***35.** $y = f(x) = 5/x$

***36.** $y = f(x) = 2x^3 - 10$

***37.** $y = f(x) = -5x^3$

***38.** $y = f(x) = -4/x$

***39.** $y = f(x) = -6/x$

15.4 La derivada

En esta sección se expondrá el concepto de la ***derivada***. Es un concepto fundamental para entender lo que se dice aquí, por lo cual conviene estudiar detenidamente este material.

Razón de cambio instantánea

Hay que trazar una distinción entre los conceptos de ***razón de cambio promedio*** y ***razón de cambio instantánea***. El ejemplo 25 se refiere a una situación donde la distancia recorrida d se describió en función del tiempo t mediante la función

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 5$$

Suponga que se quiere determinar a qué velocidad está desplazándose el automóvil en el *instante* en que $t = 1$. Podría calcularse esta velocidad instantánea examinando la velocidad promedio durante los intervalos de tiempo cercanos a $t = 1$.

Por ejemplo, la velocidad promedio en la segunda hora (entre $t = 1$ y $t = 2$) puede determinarse así

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}\\ &= \frac{[8(2^2) + 8(2)] - [8(1^2) + 8(1)]}{1} = \frac{48 - 16}{1} = 32 \text{ mph}\end{aligned}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.5$ puede determinarse como

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1}\\ &= \frac{[(1.5)^2 + 8(1.5)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.5} = \frac{30 - 16}{0.5} = 28 \text{ mph}\end{aligned}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.1$ se calcula del modo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1}\\ &= \frac{[8(1.1)^2 + 8(1.1)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.1} = \frac{18.48 - 16}{0.1} = 24.8 \text{ mph}\end{aligned}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.01$ se determina así

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1}\\ &= \frac{[8(1.01)^2 + 8(1.01)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.01} = \frac{16.2408 - 16}{0.01} = 24.08 \text{ mph}\end{aligned}$$

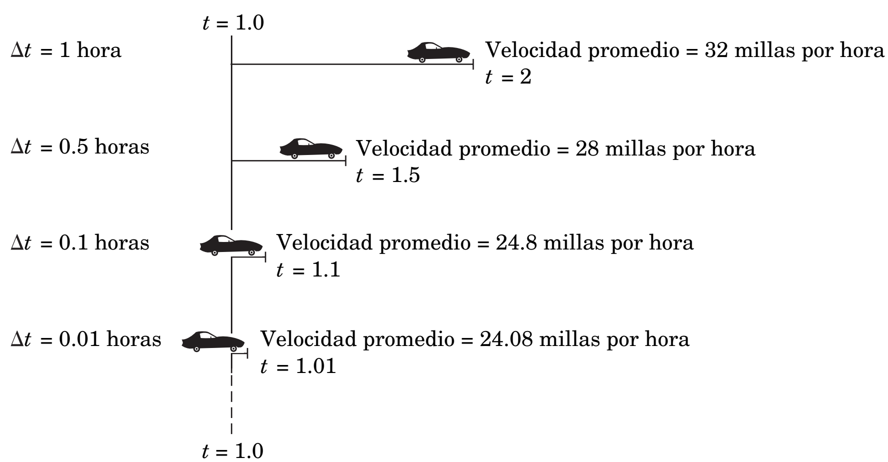


Figura 15.19

Como se muestra en la figura 15.19, estos cálculos han estado determinando la velocidad promedio en intervalos cada vez más cortos medidos *desde* $t = 1$. A medida que el intervalo se hace más corto (o al irse aproximando a 1 el segundo valor de t), la velocidad promedio $\Delta d/\Delta t$ va acercándose a un valor límite. Y la ***velocidad instantánea*** en $t = 1$ puede definirse como este valor límite. Para determinarlo se calculará

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} &= \lim_{t\to 1} \frac{(8t^2 + 8t) - [8(1)^2 + 8(1)]}{t - 1}\\ &= \lim_{t\to 1} \frac{(8t^2 + 8t) - 16}{t - 1}\\ &= \lim_{t\to 1} \frac{8(t^2 + t - 2)}{t - 1}\end{aligned}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{8(t + 2)(t - 1)}{t - 1}$$
$$= \lim_{t \to 1} 8(t + 2)$$
$$= 8 \lim_{t \to 1} (t + 2)$$
$$= 8(1 + 2) = 24$$

De este modo, la velocidad *instantánea* del automóvil cuando $t = 1$ es de 24 millas por hora. Nótese que la velocidad promedio se mide en un intervalo de tiempo y que la velocidad instantánea se define para un punto determinado en el tiempo. La velocidad instantánea es una especie de "imagen" de lo que está sucediendo en un instante determinado.

Representación geométrica de la razón de cambio instantánea

La razón de cambio instantánea de una función continua puede representarse geométricamente mediante la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto de interés.

Primero se determinará el significado de ***línea tangente***. Se examinará detenidamente la figura 15.20. *La línea tangente en A es la posición límite de la línea secante AB a medida que el punto B se va aproximando a A*. Adviértase que la posición de la línea secante

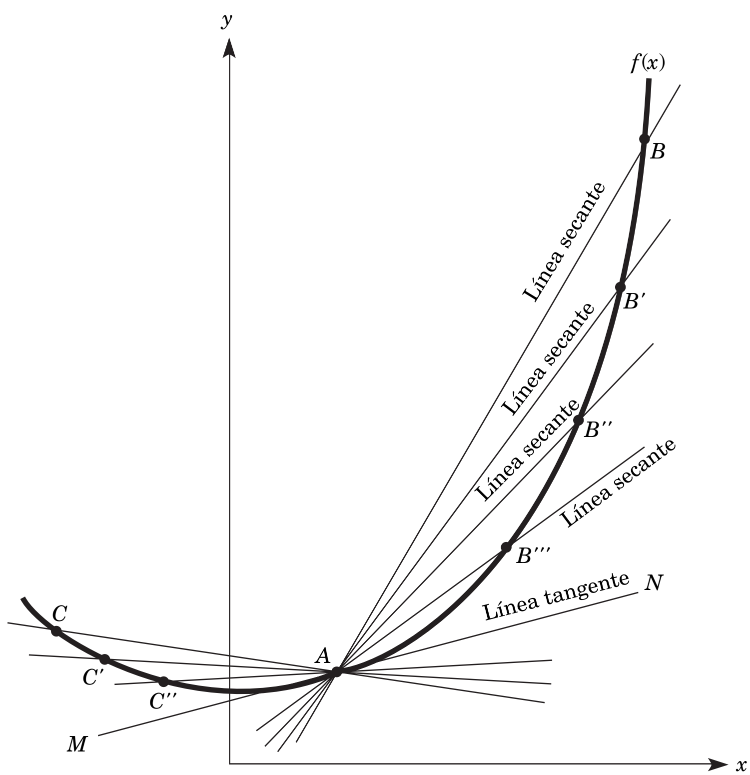


Figura 15.20

gira en el sentido de las manecillas del reloj al aproximarse B a A (AB, AB', AB'' y AB'''). La posición límite de AB es el segmento de la línea MN. Esta misma posición límite se produce sin importar si se aproxima a A con líneas secantes de la derecha o la izquierda de A. La secuencia de las líneas secantes AC, AC' y AC'' tiene la misma posición límite MN conforme C se traza más cerca de A. *Puesto que MN es la posición límite sin importar si la aproximación se hace desde la izquierda o la derecha, MN es la línea tangente en el punto A*.

No todas las funciones continuas presentan líneas tangentes únicas en cada punto de la función. Por ejemplo, la función $y = f(x) = \sqrt{|x|}$, que se ve en la figura 15.21, no posee una tangente en (0, 0). Las líneas secantes trazadas desde (0, 0) a los puntos de la izquierda o la derecha no convergen en la misma posición límite.

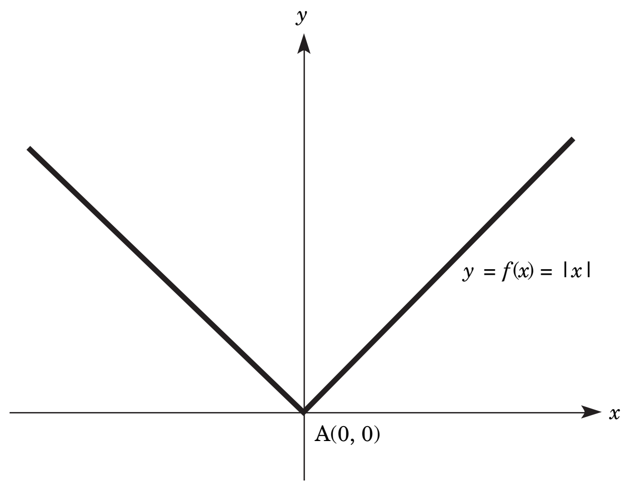


Figura 15.2 No hay línea tangente en el punto *A*.

Definición: Pendiente de la curva

La pendiente de una curva en $x = a$ es la pendiente de la línea tangente en $x = a$.

Más adelante se querrá determinar en especial la razón de cambio instantánea de las funciones. Dicha razón se representa con la pendiente de la línea tangente en el punto de interés, por lo cual hará falta un método para determinar esas pendientes de las líneas tangentes. En la figura 15.22 suponga que se desea calcular la pendiente de la línea tangente en A. Se cuenta con varias técnicas para ello. Si el lector fuera un excelente diseñador mecánico, podría construir una línea tangente en el punto A en papel milimétrico, leer en las coordenadas de las líneas en dos puntos cualesquiera y sustituir las coordenadas en la fórmula de los dos puntos.

Otro procedimiento consistiría en escoger otro punto B en la curva. Si se unen A y B con una línea secante, la pendiente del segmento de la línea AB se puede calcular y utilizar como una "aproximación" a la pendiente de MN. Es obvio que la pendiente de AB no constituye una buena aproximación. Sin embargo, refiriérase todavía a la figura 15.22.

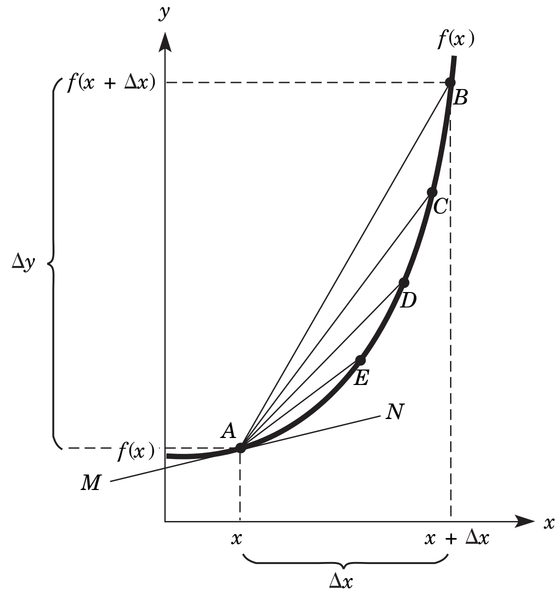


Figura 15.22

En el punto B, el valor de la variable independiente es $x + \Delta x$; la distancia entre A y B a lo largo del eje x es Δx. Haciendo uso del cociente de la diferencia, la pendiente de AB es

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{15.5}$$

Ahora, observe lo que sucede con la aproximación si se escoge un segundo punto más cerca del punto A. Si se selecciona como segundo punto al punto C, la pendiente de la línea secante AC sigue siendo una aproximación deficiente, pero mejor que la de AB. Y si se observan las pendientes de AD y AE, se llegará a la conclusión de que la *aproximación mejora a medida que el segundo punto se escoge cada vez más cerca de A*. De hecho, al irse aproximando el valor de Δx a 0, la pendiente del diminuto segmento de línea que una A con el segundo punto se convierte en aproximación excelente. La pendiente exacta de la tangente puede determinarse al calcular el límite del cociente de la diferencia a medida que $\Delta x \to 0$.

Definición: La derivada

Dada una función de la forma $y = f(x)$, la ***derivada*** de la función es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{15.7}$$

a condición de que tal límite exista.

Conviene señalar los siguientes puntos en relación con esta definición.

Comentarios acerca de la derivada

I *La ecuación (15.7) es la expresión general para la derivada de la función f.*

II *La derivada representa la* ***razón de cambio instantánea*** *en la variable dependiente, dado un cambio en la variable independiente. La notación dy/dx se utiliza para representar la razón de cambio* instantánea *en y con respecto de un cambio en x. La notación es distinta de lo que representa* $\Delta y/\Delta x$*, que es la razón de cambio promedio.*

III *La derivada es una* ***expresión general para la pendiente*** *de la gráfica de f para cualquier punto en el dominio.*

IV *Si el límite en la ecuación (15.7) no existe, la derivada tampoco existe.*

Aproximación del límite para encontrar la derivada

Encontrar la derivada (aproximación del límite)

❑ **Paso 1** Determine el cociente de la diferencia para f haciendo uso de la ecuación (15.5).

❑ **Paso 2** Encuentre el límite del cociente de la diferencia a medida que $\Delta x \to 0$ empleando la ecuación (15.7).

Los siguientes ejemplos ilustran la ***aproximación del límite*** en la determinación de la derivada.

Ejemplo 27 Encuentre la derivada de $f(x) = -5x + 9$.

SOLUCIÓN

La función $f(x) = -5x + 9$ es lineal con una pendiente de -5. Como la pendiente siempre es -5, deberá encontrarse que la derivada de f es -5.

❑ **Paso 1.** El cociente de la diferencia es

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{[-5(x+\Delta x)+9]-(-5x+9)}{\Delta x}\\ &= \frac{-5x-5\,\Delta x+9+5x-9}{\Delta x}\\ &= \frac{-5\,\Delta x}{\Delta x}\end{aligned}$$

o

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -5$$

❑ **Paso 2.** La derivada es el límite del cociente de la diferencia, o

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (-5)$$
$$= -5$$

Así pues, la derivada es exactamente según se había previsto.

Ejemplo 28 Encuentre la derivada de $f(x) = x^2$.

SOLUCIÓN

❑ **Paso 1.** En el ejemplo 26 se observó que el cociente de la diferencia para $f(x) = x^2$ era

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

❑ **Paso 2.** La derivada es el límite del cociente de la diferencia, o

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$ ❑

Uso e interpretación de la derivada

Para determinar la razón de cambio instantánea (o, de forma equivalente, la pendiente) en cualquier punto de la gráfica de una función f, se sustituye el valor de la variable independiente en la expresión correspondiente a dy/dx. La derivada, evaluada en $x = c$, puede denotarse por $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$ que se lee "la derivada de y respecto a x evaluada en $x = c$".

Ejemplo 29 Para la función $f(x) = x^2$:

a) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = -3$.
b) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = 0$.
c) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = +3$.

SOLUCIÓN

En el ejercicio 28 se determinó que $dy/dx = 2x$. Las respuestas a los incisos *a*) a *c*) se consiguen por sustitución en esta expresión.

a) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-3} = 2(-3) = -6$

b) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2(0) = 0$

(c) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 2(3) = +6$ ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Del capítulo 6 se sabe que la función $y = x^2$ es cuadrática. Trace la función y confirme que los valores que se hallan en el ejemplo 29 parezcan razonables al representar la pendiente en $x = -3$, 0 y 3. La expresión para la derivada $dy/dx = 2x$ sugiere que a medida que x se hace más negativa, la pendiente se hace más negativa; y a medida que x se hace más positiva, la pendiente se vuelve más positiva. ¿Parece esto ser correcto a la luz de nuestro esquema?

Ejemplo 30

En la función $f(x) = -2x^2 + 3x - 10$:

a) Determine la derivada.

b) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = 5$.

c) Determine en qué parte de la función la pendiente es 0.

SOLUCIÓN

a) **Paso 1** El cociente de la diferencia de f es

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{[-2(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 10] - (-2x^2 + 3x - 10)}{\Delta x}\\ &= \frac{[-2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) + 3x + 3\,\Delta x - 10] + 2x^2 - 3x + 10}{\Delta x}\\ &= \frac{-2x^2 - 4x\,\Delta x - 2\,\Delta x^2 + 3x + 3\,\Delta x - 10 + 2x^2 - 3x + 10}{\Delta x}\end{aligned}$$

Al simplificar el numerador se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4x\,\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 3\,\Delta x}{\Delta x}$$

Al factorizar Δx en el numerador y simplificarla nos queda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(-4x - 2\,\Delta x + 3)}{\cancel{\Delta x}} = -4x - 2\,\Delta x + 3$$

Paso 2 La derivada de la función es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (-4x - 2\,\Delta x + 3)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 3$$

b) $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = -4(5) + 3$$
$$= -17$$

c) La pendiente será 0 siempre que $dy/dx = 0$, o para esta función cuando $-4x + 3 = 0$. Al despejar x se obtiene

$$-4x = -3$$

o bien: $$x = \tfrac{3}{4}$$

El único punto donde la pendiente es 0 ocurre cuando $x = \frac{3}{4}$. ❑

Ejercicio de práctica

Verifique que $x = \frac{3}{4}$ es la coordenada x del vértice de la parábola que representa la función $f(x) = -2x^2 + 3x - 10$, empleando para ello la fórmula apropiada de la sección 6.2.

Si una función no es continua en un punto, no puede tener una derivada en ese punto. Sin embargo, algunas funciones son continuas y, pese a ello, hay algunos puntos dentro del dominio donde no existe la derivada.

Ejemplo 31 Examinemos $f(x) = |2x|$ que se muestran en la figura 15.23. Supóngase que se desea calcular la derivada de f cuando $x = 0$. Esto se puede determinar al evaluar la ecuación (15.7) en $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2(0 + \Delta x)| - |2(0)|}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2\,\Delta x|}{\Delta x}$$

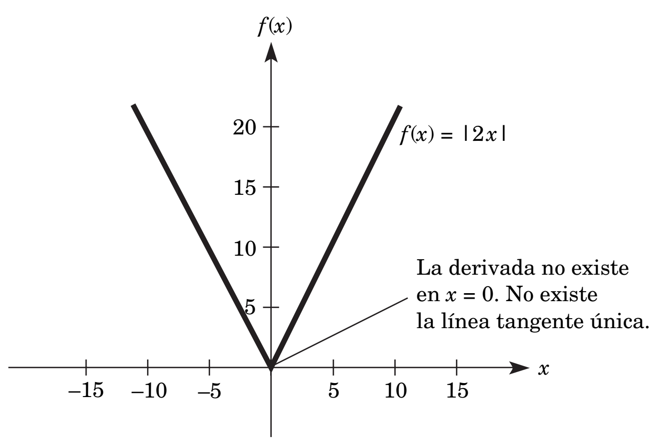


Figura 15.23

Tabla 15.10

Aproximación desde la izquierda			
Δx	-1	-0.5	-0.01
$\dfrac{\|2\ \Delta x\|}{\Delta x} = \dfrac{-2\ \Delta x}{\Delta x}$	-2	-2	-2
Aproximación desde la derecha			
Δx	1	0.5	0.01
$\dfrac{\|2\ \Delta x\|}{\Delta x} = \dfrac{2\ \Delta x}{\Delta x}$	2	2	2

La evaluación de los límites de la izquierda y la derecha da (la tabla 15.10 indica valores de muestra),

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|2\ \Delta x|}{\Delta x} = -2 \qquad y \qquad \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|2\ \Delta x|}{\Delta x} = 2$$

Puesto que esos dos límites no son iguales,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2\ \Delta x|}{\Delta x}$$

no existe. Por tanto, para la función $f(x) = |2x|$, que es continua a lo largo de su dominio, la derivada no existe *en el punto* $x = 0$. Nótese que no puede trazarse una línea tangente única en $x = 0$. ❑

Sección 15.4 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 24: *a*) determine la derivada de f por el método del límite y *b*) calcule la pendiente cuando $x = 1$ y $x = -2$.

1. $f(x) = 4x + 6$

2. $f(x) = -20$

3. $f(x) = 8x^2$

4. $f(x) = 5x^2$

5. $f(x) = 3x^2 - 5x$

6. $f(x) = 10x^2 - 8x$

7. $f(x) = x^2 - 3x + 5$

8. $f(x) = 15x^2 + 2x + 8$

9. $f(x) = -6x^2 + 3x - 1$

10. $f(x) = -3x^2 - 10x$

11. $f(x) = 20x^2 - 10$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 6x$

13. $f(x) = ax + b$

14. $f(x) = -ax^2 + bx$

***15.** $f(x) = -2/x$

***16.** $f(x) = 4/x$

***17.** $f(x) = a/x$

***18.** $f(x) = 5/x^2$

***19.** $f(x) = -3/x$

***20.** $f(x) = 3x^3$

***21.** $f(x) = x^3/2$

***22.** $f(x) = 4/x^2$

***23.** $f(x) = x^3 + 3x^2$

***24.** $f(x) = x^4$

15.5 Diferenciación

El proceso de obtener una derivada recibe el nombre de ***diferenciación***. Por fortuna, el proceso no necesariamente tiene que ser tan laborioso como podría parecer cuando se aplicó el método del límite. Se dispone de un conjunto de reglas de la diferenciación para obtener las derivadas de muchas funciones comunes. Aunque hay muchas funciones para las cuales no existe la derivada, *aquí nos ocuparemos de las funciones que son diferenciables*.

Reglas de la diferenciación

Las reglas de diferenciación que se explican en la presente sección se desarrollaron usando el método del límite. Pueden ser muy complicadas las matemáticas que se aplican en la prueba de dichas reglas. Para nuestros propósitos bastará presentar las reglas sin demostración alguna. En el apéndice al final del capítulo se incluyen las demostraciones de algunas reglas de la diferenciación para el lector que desee consultarlas.

Las reglas de la diferenciación se aplican a funciones que poseen características estructurales específicas. Una regla establecerá que si una función muestra determinadas características, su derivada tendrá una forma resultante. A medida que el lector estudie las reglas, no olvide que cada función puede ser graficada y que la derivada es una expresión general de la pendiente de la función. Otra notación de dy/dx es hacer que $\boldsymbol{f'(x)}$ (léase **"$\boldsymbol{f}$ prima de $\boldsymbol{x}$"**) represente la derivada de la función f en x. En otras palabras, si se tiene $f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esta notación se empleará al presentar las reglas.

Regla 1: Función constante

Si $f(x) = c$, donde c es una constante cualquiera

$$f'(x) = 0$$

Ejemplo 32

Examine la función constante $f(x) = 5$. Se aplica la regla 1, $f'(x) = 0$. Si el lector considera el aspecto gráfico de la función, el resultado le parecerá razonable. La gráfica de la función $f(x) = 5$ es una línea horizontal que cruza el eje y en (0, 5). La pendiente en todos los puntos a lo largo de la función es 0. ❑

Regla 2: Regla de la potencia

Si $f(x) = x^n$, donde n es un número real,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplo 33

Considérese la función $f(x) = x$. Esta función es la misma que $f(x) = x^1$. Al aplicar la regla 2 para encontrar la derivada, se sabe que $n = 1$ y que

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ &= 1 \cdot x^{1-1} \\ &= x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esto significa que para la función $f(x) = x$, la pendiente será 1 en todos los puntos. Conviene reconocer que $f(x) = x$ es una función lineal con pendiente de 1.

Ejemplo 34 Considere la función $f(x) = x^5$. Al aplicar la regla 2 para encontrar la derivada, se tiene que $n = 5$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^{5-1} \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 35 Pongamos el caso de la función $f(x) = 1/x^3$.

Recordatorio de álgebra

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Al reescribir f como $f(x) = x^{-3}$, la derivada puede hallarse aplicando la regla 2. Puesto que $n = -3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^{-3-1} \\ &= -3x^{-4} \\ &= \frac{-3}{x^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 36 Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Recordatorio de álgebra

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Al reescribir f como $f(x) = x^{2/3}$, de nueva cuenta se puede aplicar la regla 2. Ya que $n = \frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{2}{3}x^{2/3-1} \\ &= \frac{2x^{-1/3}}{3} \\ &= \frac{2}{3x^{1/3}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Determine $f'(x)$ si: *a)* $f(x) = x^6$; *b)* $f(x) = 1/x^4$. *Respuesta: a)* $f'(x) = 6x^5$; *b)* $f'(x) = -4/x^5$.

Regla 3: Constante que multiplica a una función

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, donde c es una constante y g es una función diferenciable,

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Ejemplo 37 Examínese la función $f(x) = 10x^2$. La aplicación de la regla 3 para encontrar la derivada, $c = 10$, $g(x) = x^2$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= c \cdot g'(x) \\ &= 10(2x) \\ &= 20x \end{aligned}$$

Ejemplo 38 Considérese la función $f(x) = -3/x$. Esta función puede reescribirse del modo siguiente:

$$f(x) = -3\left(\frac{1}{x}\right) = -3x^{-1}$$

La aplicación de las reglas 2 y 3 da

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-3)(-1)(x^{-1-1}) \\ &= 3x^{-2} \\ &= \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

❑

Regla 4: Suma o diferencia de funciones

Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, donde u y v son diferenciables,

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

La regla 4 significa que la derivada de una función formada por la suma (diferencia) de dos o más funciones componentes es la suma (diferencia) de las derivadas de las funciones componentes.

Ejemplo 39 Analicemos la función $f(x) = x^2 - 5x$. De acuerdo con la regla 4, f puede expresarse como $f(x) = u(x) - v(x)$, donde

$$u(x) = x^2$$

y

$$v(x) = 5x$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) - v'(x) \\ &= 2x - 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 40 Considérese la función $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - x + 50$. La derivada se encuentra al extender la regla 4 y al diferenciar cada término de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(4x^3) - 8(3x^2) + 3(2x) - 1 + 0 \\ &= 20x^3 - 24x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 3x - 10$. *Respuesta:* $f'(x) = 24x^2 - 8x + 3$.

Regla 5: Regla del producto

Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, donde u y v son diferenciables, entonces

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

En forma verbal, la derivada de un producto es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función *más* la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

Ejemplo 41 Examínese la función $f(x) = (x^2 - 5)(x - x^3)$. Al aplicar la regla 5 se tiene $u(x) = x^2 - 5$ y $v(x) = x - x^3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= (2x)(x - x^3) + (1 - 3x^2)(x^2 - 5) \\ &= 2x^2 - 2x^4 + x^2 - 5 - 3x^4 + 15x^2 \\ &= -5x^4 + 18x^2 - 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 42 En el ejemplo anterior, la función pudo haber sido reescrita en la forma equivalente

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 5)(x - x^3) \\ &= x^3 - x^5 - 5x + 5x^3 \\ &= -x^5 + 6x^3 - 5x \end{aligned}$$

La obtención de la derivada de esta forma de la función no exige utilizar la regla 5. La derivada es

$$f'(x) = -5x^4 + 18x^2 - 5$$

que es el mismo resultado conseguido antes. ❑

NOTA Como con los dos ejemplos anteriores, muchas funciones pueden ser manipuladas algebraicamente y pueden ser convertidas en una forma equivalente. Esto puede ser de utilidad por dos motivos. En ***primer lugar***, reescribir una función en una forma equivalente permite emplear las reglas de la derivada que son más eficientes o fáciles de recordar. En ***segundo lugar***, la obtención de la derivada de la función original y de la forma equivalente de la función proporciona una verificación de la respuesta.

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = (x^3 - 2x^5)(x^4 - 3x^2 + 10)$. *Respuesta:* $f'(x) = -18x^8 + 49x^6 - 115x^4 + 30x^2$.

Regla 6: Regla del cociente

Si $f(x) = u(x)/v(x)$, donde u y v son diferenciables, y $v(x) \neq 0$, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

Verbalmente, la derivada de un cociente equivale al denominador multiplicado por la derivada del numerador *menos* el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo 43 En el ejemplo 35 se utilizó la regla de la potencia para determinar que la derivada de $f(x) = 1/x^3$ es $f'(x) = -3/x^4$. Dado que f tiene la forma de un cociente, como método alternativo puede aplicarse la regla 6. Si $u(x) = 1$ y $v(x) = x^3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{x^3(0) - (1)(3x^2)}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-3}{x^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 44 Considérese la función $f(x) = (3x^2 - 5)/(1 - x^3)$. La aplicación de la regla 6 con $u(x) = 3x^2 - 5$ y $v(x) = (1 - x^3)$, nos da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - x^3)(6x) - (3x^2 - 5)(-3x^2)}{(1 - x^3)^2} \\ &= \frac{6x - 6x^4 + 9x^4 - 15x^2}{(1 - x^3)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3x^4 - 15x^2 + 6x}{(1 - x^3)^2}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{10 - x}{x^2 + 1}$. *Respuesta:* $f'(x) = (x^2 - 20x - 1)/(x^2 + 1)^2$.

Sección 15.5 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 38, encuentre la expresión para $f'(x)$.

1. $f(x) = 140$
2. $f(x) = -55$
3. $f(x) = 0.55$
4. $f(x) = 4x^0$
5. $f(x) = x^3 - 4x$
6. $f(x) = -3x/4 + 9$
7. $f(x) = 2x^5$
8. $f(x) = -x/3$
9. $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$
10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
11. $f(x) = \sqrt{x^5}$
12. $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$
13. $f(x) = x^{10}$
14. $f(x) = x^{5/3}$
15. $f(x) = \dfrac{x^6}{3} - 2x$
16. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + 10$
17. $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - 100$
18. $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$
19. $f(x) = 5/x^2$
20. $f(x) = 3/5x^3$
21. $f(x) = -10/x^4$
22. $f(x) = \sqrt{2}/x^3$
23. $f(x) = x - 1/\sqrt{x}$
24. $f(x) = 1/\sqrt[6]{x^5}$
25. $f(x) = 2/\sqrt[3]{x}$
26. $f(x) = 1/6\sqrt[3]{x}$
27. $f(x) = (x^3 - 2x)(x^5 + 6x^2)$
28. $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - 10\right)(x^3 - 2x^2 + 1)$
29. $f(x) = (x^3 - x + 3)(x^6 - 10x^4)$
30. $f(x) = (2 - x - 3x^4)(10 + x - 4x^3)$
31. $f(x) = (6x^2 - 2x + 1)(x^3/4 + 5)$
32. $f(x) = [(x + 3)/2][x^2 - 4x + 9]$
33. $f(x) = x/(1 - x^2)$
34. $f(x) = 4x/(6x^2 - 5)$
35. $f(x) = (10 - x)/(x^2 + 2)$
36. $f(x) = 3x^5/(x^2 - 2x + 1)$
37. $f(x) = 1/(4x^5 - 3x^2 + 1)$
38. $f(x) = (-x^3 + 1)/(x^5 - 20)$

En los ejercicios 39 a 48: *a*) calcule $f'(2)$ y *b*) determine los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$.

39. $f(x) = 10x - 5$
40. $f(x) = 8x^2 - 12x + 1$
41. $f(x) = x^3/3 - 6x + 8$
42. $f(x) = 16x^4/4 - x$
43. $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
44. $f(x) = -1/x$
45. $f(x) = x^2/(1 - x^2)$
46. $f(x) = x^2 - 16x + 5$
47. $f(x) = -x^3/3 + 9x$
48. $f(x) = -x/(x - 5)$

15.6 Reglas adicionales de la diferenciación

En esta sección se presentan algunas reglas adicionales de la diferenciación que se añadirán a las reglas de la sección 15.5.

Regla 7: Potencia de una función

Si $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es una función diferenciable y n es un número real, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)}$$

Esta regla se asemeja mucho a la de la potencia (regla 2). En efecto, la regla de la potencia constituye el caso especial de esta regla donde $u(x)$ es x. Cuando $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ y al aplicar la regla 7, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x)^{n-1}(1) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 45 Examínese la función $f(x) = \sqrt{7x^4 - 5x - 9}$. La función f se puede reescribir como $f(x) = (7x^4 - 5x - 9)^{1/2}$. En esta forma, se aplica la regla donde $u(x) = 7x^4 - 5x - 9$. La aplicación de la regla 7 nos da,

$$\begin{aligned} f'(x) &= n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x) \\ &= \tfrac{1}{2}(7x^4 - 5x - 9)^{(1/2)-1}(28x^3 - 5) \\ &= (14x^3 - \tfrac{5}{2})(7x^4 - 5x - 9)^{-1/2} \end{aligned}$$

que puede reescribirse así

$$f'(x) = \frac{14x^3 - \frac{5}{2}}{(7x^4 - 5x - 9)^{1/2}}$$

o bien

$$f'(x) = \frac{14x^3 - \frac{5}{2}}{\sqrt{7x^4 - 5x - 9}}$$

Ejemplo 46 Considérese la función

$$f(x) = \left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^5$$

Esta función presenta la forma señalada en la regla 7, donde u es la función racional $3x/(1 - x^2)$. Al aplicar la regla 7 [adviértase que la regla 6 debe emplearse para hallar $u'(x)$] se obtiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{(1 - x^2)(3) - (3x)(-2x)}{(1 - x^2)^2} \\ &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{3 - 3x^2 + 6x^2}{(1 - x^2)^2} \\ &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{3 + 3x^2}{(1 - x^2)^2} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = (3x^2 - 5x + 8)^{10}$. *Respuesta:* $f'(x) = (60x - 50)(3x^2 - 5x + 8)^9$.

Regla 8: Funciones exponenciales de base *e*

Si $f(x) = e^{u(x)}$, donde u es una función diferenciable, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$$

Ejemplo 47 Considérese $f(x) = e^x$. Aplicando la regla 8, el exponente $u(x) = x$, y así

$$\begin{aligned} f\ (x) &= u'(x)e^{u(x)} \\ &= 1e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

Este resultado es único en cuanto a que *la función* e^x *y su derivada son idénticas*. Es decir, $f(x) = f'(x) = e^x$. En forma gráfica, la interpretación es que, para cualquier valor de x, la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ es exactamente igual al valor de la función.

Ejemplo 48 Considérese $f(x) = e^{-x2+2x}$. Aplicando la regla 8,

$$f'(x) = (-2x + 2)e^{-x^2+2x}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = 10e^{5x^2-4x}$. *Respuesta:* $f'(x) = (100x - 40)\ e^{5x^2-4x}$.

Regla 9: Funciones de logaritmos naturales

Si $f(x) = \ln u(x)$, donde u es una función diferenciable, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Ejemplo 49 Considérese la función

$$f(x) = \ln x$$

Si se hace que $u(x) = x$ y se aplica la regla 9,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ejemplo 50 Considérese $f(x) = \ln(5x^2 - 2x + 1)$. Aplicando la regla 9,

$$u(x) = 5x^2 - 2x + 1$$

y
$$f'(x) = \frac{10x - 2}{5x^2 - 2x + 1}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln(4x^2 - 16x)$. *Respuesta:* $f'(x) = (8x - 16)/(4x^2 - 16x)$.

Regla de la cadena

La regla 7 (potencia de una función) se explicó brevemente y sin prestarle la atención que merece. La regla 7 es un caso especial de la más general *regla de la cadena*.

Regla 10: Regla de la cadena

Si $y = f(u)$ es una función diferenciable y $u = g(x)$ también es una función diferenciable, entonces

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Recuerde que en el capítulo 4 se estudiaron las funciones compuestas: aquellas cuyo valor depende de otras funciones. La regla de la cadena se aplica en concreto a las funciones compuestas. Póngase el caso de dos funciones

$$y = f(u) = 20 - 3u$$

y
$$u = g(x) = 5x - 4$$

Nótese que el valor de y depende en definitiva de x. Esto se comprueba observando que si x aumenta en 1 unidad, u se incrementa en 5 unidades. Y un aumento de 5 unidades en u da origen a un *decremento* de (3)(5) = 15 unidades en y. Si se desea averiguar cómo el valor de y responde ante los cambios de x, se puede aplicar la regla de la cadena. Puesto que

$$\frac{dy}{du} = -3$$

y
$$\frac{du}{dx} = 5$$

entonces
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-3)(5)\\ &= -15\end{aligned}$$

Ejemplo 51 Dadas $y = f(u) = u^2 - 2u + 1$ y $u = g(x) = x^2 - 1$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (2u - 2)(2x)\end{aligned}$$

Se puede reescribir dy/dx estrictamente en términos de x con sólo sustituir $u = x^2 - 1$. Esto da

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= [2(x^2 - 1) - 2](2x) \\ &= (2x^2 - 4)(2x) \\ &= 4x^3 - 8x\end{aligned}$$

Con la regla 7 se aproximaría este problema reformulando primero $f(u)$ en términos de x. Es decir, puesto que $u = x^2 - 1$

$$\begin{aligned}y &= u^2 - 2u + 1 \\ &= (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) + 1\end{aligned}$$

La expresión de dy/dx se obtiene directamente como

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2(x^2 - 1)(2x) - 4x \\ &= 4x^3 - 4x - 4x \\ &= 4x^3 - 8x\end{aligned}$$

que es el mismo resultado.

Ejemplo 52 Dada $y = f(u) = u^3 - 5u$, donde $u = g(x) = x^4 + 3x$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (3u^2 - 5)(4x^3 + 3)\end{aligned}$$

Al reescribir esto en función de x se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= [3(x^4 + 3x)^2 - 5](4x^3 + 3) \\ &= [3(x^8 + 6x^5 + 9x^2) - 5](4x^3 + 3) \\ &= (3x^8 + 18x^5 + 27x^2 - 5)(4x^3 + 3) \\ &= 12x^{11} + 72x^8 + 108x^5 - 20x^3 + 9x^8 + 54x^5 \\ &\quad + 81x^2 - 15 \\ &= 12x^{11} + 81x^8 + 162x^5 - 20x^3 + 81x^2 - 15\end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Dado $y = f(u) = u^3 + 3u$ y $u = g(x) = x + 3$, encuentre dy/dx. *Respuesta:* $dy/dx = 3(x + 3)^2 + 3 = 3x^2 + 18x + 30$.

Sección 15.6 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 38, determine $f'(x)$.

1. $f(x) = (1 - 4x^3)^5$
2. $f(x) = (7x^2 - 3x + 1)^3$
3. $f(x) = (x^3 - 2x + 5)^4$
4. $f(x) = (5x^3 + 1)^4$
5. $f(x) = \sqrt{1 - 5x^3}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 5}$
7. $f(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$
8. $f(x) = \sqrt{1/(x^2 + 9)}$
9. $f(x) = e^x$
10. $f(x) = e^{x^3}$
11. $f(x) = 10e^{x^2}$
12. $f(x) = -5e^{x/2}$
13. $f(x) = (5e^x)^3$
14. $f(x) = 3x^2e^x$
15. $f(x) = 4xe^{x^2}$
16. $f(x) = (e^x - 5)^4$
17. $f(x) = e^{x^2-2x+5}$
18. $f(x) = 10e^{x^3-2x}$
19. $f(x) = e^x/x$
20. $f(x) = 2x^2/e^x$
21. $f(x) = (e^x)^3$
22. $f(x) = \sqrt{e^{2x}}$
23. $f(x) = \ln(5x)$
24. $f(x) = \ln(x/2)$
25. $f(x) = \ln(x^2 - 3)$
26. $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 + 5)$
27. $f(x) = x^2 \ln x$
28. $f(x) = (x + 3) \ln x^2$
29. $f(x) = \dfrac{10x}{\ln x}$
30. $f(x) = (\ln x)^3$
31. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\ln 3x}$
32. $f(x) = (5x - \ln x)^5$
33. $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^{x^2}}$
34. $f(x) = \dfrac{e^{x^2+1}}{\ln(x + 1)}$
35. $f(x) = \sqrt{(x - 1)^5(6x - 5)}$
36. $f(x) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2}{5x - 1}\right)^2}$
37. $f(x) = (6x - 2)\sqrt{x^2 - 5x + 3}$
38. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{(1 - x^3)^5x^3}{(9 - 2x^2)}}$

En los ejercicios siguientes, encuentre dy/dx.

39. $y = f(u) = 5u + 3$ y $u = g(x) = -3x + 10$
40. $y = f(u) = u^2 - 5$ y $u = g(x) = 10x - 3$
41. $y = f(u) = u^2 - 2u + 1$ y $u = g(x) = x^2$
42. $y = f(u) = u^3$ y $u = g(x) = x^2 + 3x + 1$
43. $y = f(u) = 10 - 5u^3$ y $u = g(x) = -x + x^3$
44. $y = f(u) = u^4 - u^2 + 1$ y $u = g(x) = x^2 - 4$
45. $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2/2$
46. $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 1}$ y $u = g(x) = x^4$
47. $y = f(u) = (u - 3)^5$ y $u = g(x) = x^2 - 2x$
48. $y = f(u) = \sqrt{u^3}$ y $u = g(x) = \sqrt{x}$
49. $y = f(u) = e^u$ y $u = g(x) = 2x^2 - 5x$
50. $y = f(u) = e^{u^2}$ y $u = g(x) = x^2 - 5$
51. $y = f(u) = \ln(5u - 3)$ y $u = g(x) = 4x^3 - 3x^2$
52. $y = f(u) = 10 \ln(15 - u^3)$ y $u = g(x) = x^2 - 2x + 5$

Para los ejercicios 53 a 64: *a*) encuentre $f'(2)$ y *b*) determine los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$.

53. $f(x) = (5x^2 - 10)^6$
54. $f(x) = (2x - 8)^5$
55. $f(x) = \sqrt{x^2 + 21}$
56. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
57. $f(x) = e^{-x}$
58. $f(x) = e^x$
59. $f(x) = xe^{-x}$
60. $f(x) = xe^x$
61. $f(x) = \ln x - x$
62. $f(x) = \ln 30x - 3x$
63. $f(x) = \ln 2x - 2x$
64. $f(x) = \ln x - x^2/2$

15.7 Interpretación de la razón de cambio instantánea

Anteriormente se estableció que la derivada puede utilizarse para determinar la razón de cambio instantánea.

Ejemplo 53 En el ejemplo 25, la función

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t$$

describió la distancia (en millas) que recorre un automóvil en función del tiempo (en horas). La velocidad instantánea del automóvil en cualquier instante se calcula al evaluar la derivada en ese valor de t. Para determinar la velocidad instantánea si $t = 3$, la derivada

$$f'(t) = 16t + 8$$

ha de evaluarse cuando $t = 3$, o

$$\begin{aligned} f'(3) &= 16(3) + 8 \\ &= 56 \text{ mph} \end{aligned}$$

Ejemplo 54 Se deja caer un objeto desde un peñasco situado a 1 296 pies de altura. La altura del objeto se describe en función del tiempo. La función es

$$h = f(t) = -16t^2 + 1\,296$$

donde h representa la altura en pies y t el tiempo medido en segundos, que es contado desde el momento en que se deja caer el objeto.

a) ¿A qué distancia caerá el objeto en dos segundos?
b) ¿Cuál es la velocidad instantánea del objeto cuando $t = 2$?
c) ¿Cuál es su velocidad en el momento de caer al suelo?

SOLUCIÓN

a) El cambio de la altura es

$$\begin{aligned} \Delta h &= f(2) - f(0) \\ &= [-16(2)^2 + 1\,296] - [-16(0)^2 + 1\,296] \\ &= (-64 + 1\,296) - 1\,296 = -64 \end{aligned}$$

Así pues, el objeto *cae* 64 pies durante los primeros dos segundos.

b) Puesto que $f'(t) = -32t$, el objeto tendrá una velocidad de

$$\begin{aligned} f'(2) &= -32(2) \\ &= -64 \text{ pies/segundo} \end{aligned}$$

cuando $t = 2$. El signo de menos denota la dirección de la velocidad (hacia abajo).

c) A fin de determinar la velocidad del objeto cuando cae al suelo, es preciso saber *cuándo* llegará al suelo. Y lo hará cuando $h = 0$, o cuando

$$-16t^2 + 1\,296 = 0$$

Si resolvemos para t,

$$t^2 = \frac{1\,296}{16} = 81$$

y $t = \pm 9$. Como una raíz negativa carece de sentido, puede llegarse a la conclusión de que el objeto tocará el suelo al cabo de nueve segundos. En ese momento la velocidad será de

$$\begin{aligned} f'(9) &= 32(9) \\ &= 288 \text{ pies/s} \end{aligned}$$

Ejemplo 55 **(Seguimiento de una epidemia: escenario de motivación)** Una epidemia de gripe está propagándose por un estado del medio oeste de Estados Unidos. Con base en epidemias semejantes que se han presentado con anterioridad, los epidemiólogos han formulado una función matemática con la que estiman el número de personas que se contagiarán con la epidemia. En concreto, la función es

$$n = f(t) = -0.3t^3 + 10t^2 + 300t + 250$$

donde *n representa el número de personas afectadas, t es igual al tiempo, medido en días, desde la detección inicial hecha por los oficiales del departamento de salubridad*, y el dominio relevante (restringido) es de $0 \leq t \leq 30$.

Si se hace uso de la función de estimación:

a) ¿Qué interpretación puede darse a $f(0)$?

b) ¿Cuántas personas se espera que contraigan la enfermedad al cabo de 10 días? ¿Y al cabo de 20 días?

c) ¿Cuál es la razón promedio a la que se espera que esta epidemia se propague entre $t = 10$ y $t = 20$?

d) ¿Cuál es la razón instantánea a la que se espera que la enfermedad se propague cuando $t = 11$? ¿Y cuando $t = 12$?

e) ¿Qué interpretación se sugiere por los resultados en el inciso *d*?

SOLUCIÓN

a) $f(0)$ se interpretaría como el número estimado de personas que hayan contraído la enfermedad en el momento de la detección inicial de la misma por los oficiales del departamento de salud. De acuerdo con esta función, aproximadamente 250 personas se habrían visto afectadas.

b)

$$\begin{aligned} f(10) &= -0.3(10)^3 + 10(10)^2 + 300(10) + 250 \\ &= -300 + 1\,000 + 3\,000 + 250 \\ &= 3\,950 \text{ personas} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(20) &= -0.3(20)^3 + 10(20)^2 + 300(20) + 250 \\ &= -2\,400 + 4\,000 + 6\,000 + 250 \\ &= 7\,850 \text{ personas} \end{aligned}$$

c)
$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(20) - f(10)}{20 - 10} = \frac{7\,850 - 3\,950}{10} = \frac{3\,900}{10} = 390 \text{ personas/día}$$

d) La razón instantánea a la que la epidemia se propaga se estima mediante $f'(t)$.

$$f'(t) = -0.9t^2 + 20t + 300$$

Cuando $t = 11$,

$$\begin{aligned} f'(11) &= -0.9(11)^2 + 20(11) + 300 \\ &= -108.9 + 220 + 300 \\ &= 411.1 \text{ personas/día} \end{aligned}$$

Cuando $t = 12$,

$$\begin{aligned} f'(12) &= -0.9(12)^2 + 20(12) + 300 \\ &= -129.6 + 240 + 300 \\ &= 410.4 \text{ personas/día} \end{aligned}$$

e) El resultado en el inciso *d*) sugiere que la razón a la que se contagian las personas por esta enfermedad ha disminuido entre los días 11 y el 12. ❑

Ejemplo 56

(Proceso de crecimiento exponencial) Los procesos de crecimiento exponencial se presentaron en el capítulo 7. La función generalizada para el crecimiento exponencial se introdujo en la ecuación (7.9) como

$$V = f(t) = V_0 e^{kt}$$

Se indicó que estos procesos están caracterizados por una razón de crecimiento de porcentaje constante. Para verificar esto, se encuentra la derivada

$$f'(t) = V_0(k)e^{kt}$$

que puede escribirse como

$$f'(t) = kV_0 e^{kt}$$

La derivada representa la razón de cambio instantánea en el valor V respecto de un cambio en t. La *razón de cambio porcentual* se calcularía mediante la razón

$$\boxed{\frac{\text{Razón de cambio instantánea}}{\text{Valor de la función}} = \frac{f'(t)}{f(t)}}$$

Para esta función,

$$\begin{aligned} \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{kV_0 e^{kt}}{V_0 e^{kt}} \\ &= k \end{aligned}$$

Esto confirma que para una función de crecimiento exponencial de la forma de la ecuación (7.9), k representa la razón porcentual de crecimiento. Dado que k es una constante, la razón porcentual de crecimiento es la misma para todos los valores de t. ❑

Sección 15.7 Ejercicios de seguimiento

1. La función $h = f(t) = 2.5t^3$, donde $0 \leq t \leq 30$, describe la altura h (en cientos de pies) de un misil t segundos después de haber sido lanzado.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el intervalo $0 \leq t \leq 10$?

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 10$? ¿Y cuando $t = 20$?

2. Un objeto es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 256 pies por segundo. La función que describe la altura h de la pelota es

$$h = f(t) = 256t - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t es el tiempo medido en segundos desde que se arrojó la pelota.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando $t = 1$ s?

b) ¿Cuándo retornará la pelota al suelo?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando alcanza el suelo?

3. Una pelota se deja caer desde el techo de un edificio de 256 pies de altura. La altura de la pelota se describe con la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 256$$

donde h denota la altura en pies y t el tiempo medido en segundos desde el momento en que se deja caer la pelota.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el intervalo $1 \leq t \leq 2$?

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 3$?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el momento de llegar al suelo?

4. Control de epidemias Una epidemia está propagándose por un estado del oeste de Estados Unidos. Los oficiales de salud estiman que el número de personas que se contagiarán es una función del tiempo transcurrido desde que se detectó la epidemia. En concreto, la función es

$$n = f(t) = 300t^2 - 20t^2$$

donde n representa el número de personas y $0 \leq t \leq 60$, medido en días.

a) ¿Cuántas personas se espera que contraigan la enfermedad al cabo de 10 días? ¿Y al cabo de 30 días?

b) ¿Cuál es la razón promedio que se espera a que la epidemia se propague entre $t = 10$ y $t = 30$?

c) ¿Cuál es la razón instantánea que se espera a que la enfermedad se propague cuando $t = 20$?

5. Crecimiento de la población La población de un país está estimada por la función

$$P = 125e^{0.035t}$$

donde P es igual a la población (en millones) y t es igual al tiempo medido en años desde 1990.

a) ¿Cuál es la población esperada para el año 2000?
b) Determine la expresión para la razón de cambio instantánea en la población.
c) ¿Cuál es la razón de cambio instantánea que se espera para la población en el año 2000?

6. Apreciación de la inversión Una pieza única de arte ha sido valuada hace unos años. La función

$$V = 1.5e^{0.06t}$$

estima el valor V de la obra de arte (medido en millones de dólares) como una función del tiempo t, medido en años desde 1986.
a) ¿Cuál es el valor estimado para el año 1996? ¿Y para el año 2000?
b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en el valor de la obra de arte.
c) ¿A qué razón se espera que se incremente el valor de la obra de arte en el año 2000?

7. Especies en peligro de extinción La población de una rara especie de la vida silvestre está disminuyendo. La función

$$P = 75\,000e^{-0.025t}$$

estima la población P de la especie como una función del tiempo, medido en años desde 1980.
a) ¿Cuál es la población esperada para el año 1996?
b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en la población.
c) ¿A qué razón se espera que disminuya la población en el año 1996?

8. Depreciación de los activos El valor de un activo en particular se encuentra estimado por la función

$$V = 240\,000e^{-0.04t}$$

donde V es el valor del activo y t es la edad del activo, medido en años.
a) ¿Cuál es el valor esperado del activo para cuando tenga cuatro años?
b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en el valor del activo.
c) ¿Cuál es la razón de cambio que se espera para cuando el activo tenga 10 años?

15.8 Derivadas de orden superior

Dada una función f, existen otras derivadas susceptibles de definición. En la presente sección se analizan estas ***derivadas de orden superior*** y su interpretación.

La segunda derivada

La derivada f' de la función f a menudo recibe el nombre de ***primera derivada*** de la función. El adjetivo *primera* sirve para distinguir esta derivada de las otras relacionadas con una función. El ***orden*** de la misma es 1.

La ***segunda derivada*** f'' de una función es la derivada de la primera. En x, se denota por d^2y/dx^2 o bien $f''(x)$. La segunda derivada se determina aplicando las mismas reglas de la diferenciación que se usarán para calcular la primera derivada.

Tabla 15.11

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
x^5	$5x^4$	$20x^3$
$x^2 - 3x + 10$	$2x - 3$	2
$mx + b$	m	0
$x^3 - 2x^2 + 5x$	$3x^2 - 4x + 5$	$6x - 4$
$x^{3/2}$	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$\frac{3}{4}x^{-1/2}$
e^x	e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$	$-1/x^2$

En la tabla 15.11 se incluye el cálculo de la primera y segunda derivadas de diversas funciones.

Del mismo modo que la primera derivada es una medida de la razón de cambio instantánea en el valor de y respecto del que se opera en x, también la *segunda derivada* constituye una medida de la razón de cambio instantánea en el valor de la primera derivada respecto de la que se produce en x. Descrito esto en forma diferente, puede afirmarse que la segunda derivada es una *medida de la razón de cambio instantánea en la pendiente respecto del que se da en x.*

Considérese detenidamente la función $f(x) = -x^2$. La primera y segunda derivadas de esa función son

$$f'(x) = -2x \qquad f''(x) = -2$$

La figura 15.24 muestra las gráficas de f, f' y f''.

La función f es una parábola cóncava hacia abajo con el vértice en (0, 0). La pendiente de la tangente es positiva a la izquierda del vértice, pero se torna *menos positiva* conforme x se aproxima a 0. A la derecha del vértice, la pendiente de la tangente es negativa y se torna *más negativa* (disminuye) conforme x aumenta. La gráfica de f' indica el valor de la pendiente en cualquier punto de f. Nótese que los valores de $f'(x)$ son positivos, pero que se vuelven menos positivos al irse acercando x a 0 desde la izquierda. Y $f'(x)$ se hace más y más negativa a medida que el valor de x se vuelve más positivo. Así pues, la gráfica de f' es compatible con nuestras observaciones de la gráfica de f.

La segunda derivada es una medida de la razón de cambio instantánea en la primera derivada o en la pendiente de la gráfica de una función. Dado que $f''(x) = -2$, esto significa que la razón de cambio en la primera derivada es constante en toda la función. Más exactamente, $f''(x) = -2$ indica que en cualquier parte de la función la pendiente *está dis-*

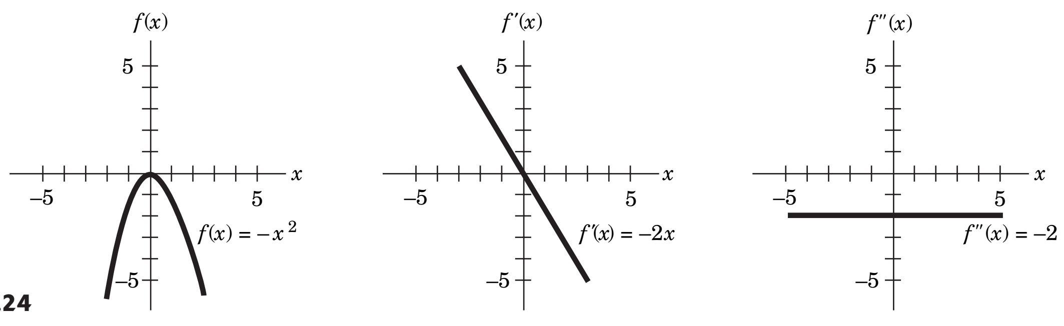


Figura 15.24

minuyendo a una razón instantánea de dos unidades por cada unidad que aumente x. Nótese que la gráfica de f' es una función lineal con una pendiente de -2.

En algunos ejemplos anteriores del capítulo se analizaron funciones que presentan la forma $d = f(t)$, donde d representa la distancia recorrida después del tiempo t. Se llegó entonces a la conclusión de que la velocidad instantánea en cualquier tiempo t estaba representada por la primera derivada $f'(t)$. La segunda derivada de este tipo de función $f''(t)$ ofrece una medida de la razón de cambio instantánea *en la velocidad* respecto de un cambio en el tiempo. Esta segunda derivada, medida en unidades de distancia por unidad de tiempo al cuadrado (por ejemplo, pies/s^2 o km/h^2), representa la ***aceleración*** instantánea de un objeto. Si

$$d = f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$$

la expresión que representa la ***velocidad instantánea*** será

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 3$$

y la expresión que representa la ***aceleración instantánea*** será

$$f''(t) = 6t - 4$$

Tercera derivada y derivadas de orden superior

Pueden determinarse otras derivadas para las funciones. Todas ellas son menos fáciles de entender desde un punto de vista intuitivo. No obstante, serán útiles más adelante y poseen un valor determinado en niveles más altos del análisis matemático.

Definición: Derivada de *n*-ésimo orden

La **derivada de *n*-ésimo orden** de f, denotada por $f^{(n)}$, se encuentra al diferenciar la derivada de orden $n - 1$. Es decir, en x,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)]$$

Ejemplo 57 Dada

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$$

las derivadas de f son

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 2x - 1\\
f''(x) &= 30x^4 - 40x^3 + 12x^2 - 18x + 2\\
f'''(x) &= 120x^3 - 120x^2 + 24x - 18\\
f^{(4)}(x) &= 360x^2 - 240x + 24\\
f^{(5)}(x) &= 720x - 240\\
f^{(6)}(x) &= 720\\
f^{(7)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Todas las demás derivadas de orden superior serán también 0. ❑

NOTA Para funciones polinomiales de *grado n*, la primera derivada es una función polinomial de grado $n - 1$. Cada derivada sucesiva es una función polinomial de un grado menor que la derivada anterior (hasta que el grado de una derivada sea igual a 0).

Sección 15.8 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 30: *a*) encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$; *b*) evalúe $f'(1)$ y $f''(1)$, y *c*) exprese con palabras el significado de $f'(1)$ y de $f''(1)$.

1. $f(x) = 15$
2. $f(x) = 24 - 10x$
3. $f(x) = 4x^2 - x + 5$
4. $f(x) = x^2 - 15x + 10$
5. $f(x) = 5x^3$
6. $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5x + 1$
7. $f(x) = x^4/4 - x^3/3 + 10x$
8. $f(x) = x^5/5 - x^3/3 + 100$
9. $f(x) = 1/x$
10. $f(x) = (x^2 - 2)^5$
11. $f(x) = 3x^5 - 2x^3$
12. $f(x) = 5x^4 - 10x^2$
13. $f(x) = 2/x^2$
14. $f(x) = -4/x^3$
15. $f(x) = (x - 5)^4$
16. $f(x) = (5 - 2x)^3$
17. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
18. $f(x) = \sqrt{10 - 2x}$
19. $f(x) = e^{2x}$
20. $f(x) = e^{10-2x}$
21. $f(x) = e^{x^2}$
22. $f(x) = e^{x^2/2}$
23. $f(x) = \ln 2x$
24. $f(x) = \ln 4x$
25. $f(x) = \ln(x^2 - 5)$
26. $f(x) = \ln(x^3 + 4)$
27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$
28. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$
29. $f(x) = e^x \ln x$
30. $f(x) = e^{2x} \ln x$

31. La altura de un objeto que se deja caer desde una altura de 1 000 pies se describe mediante la función

$$h = 1\,000 - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t en segundos.
a) ¿Cuál es la velocidad cuando $t = 4$?
b) ¿Cuál es la aceleración si $t = 4$?

32. La altura de un objeto que se deja caer desde una altura de 1 200 pies se describe mediante la función

$$h = 1\,200 - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t en segundos.
a) ¿Cuál es la velocidad cuando $t = 3$? ¿Y cuando $t = 5$?
b) ¿Cuál es la aceleración si $t = 3$? ¿Y si $t = 5$?

33. Se lanza hacia arriba una pelota desde el techo de un edificio de 600 pies de alto y alcanzará una altura de h pies al cabo de t segundos, según se describe mediante la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 50t + 600$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 3 s?
b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 3 s? (Un signo negativo indica dirección hacia abajo.)
c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota cuando $t = 0$? ¿Cuando $t = 5$?

34. Se lanza hacia arriba una pelota desde el techo de un edificio de 750 pies de alto y alcanzará una altura de h pies al cabo de t segundos, según se describe mediante la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 50t + 750$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 5 s?
b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 5 s? (Un signo negativo indica dirección hacia abajo.)
c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota cuando $t = 0$? ¿Cuando $t = 5$?

En los ejercicios 35 a 50, determine todas las derivadas de orden superior.

35. $f(x) = 16x^3 - 4x^2$
36. $f(x) = 2\,500$
37. $f(x) = mx + b$
38. $f(x) = -x/4 + 10$
39. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 30x^2$
40. $f(x) = (x - 10)^3$
41. $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
42. $f(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$
43. $f(x) = 10x^4 - 2x^3 + 3$
44. $f(x) = -x^5 + 3x^2$
45. $f(x) = (ax + b)^3$
46. $f(x) = (cx - d)^4$
47. $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3$
48. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3}$
49. $f(x) = e^x$
50. $f(x) = e^{-x}$

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

asíntota horizontal 712
asíntota vertical 715
cociente de la diferencia 723
continuidad 700
derivada 728
derivada de *n*-ésimo orden 755
derivadas de orden superior 753
diferenciación 738
límite de una función 700
línea secante 722
línea tangente 730
pendiente de la curva 731
razón de cambio instantánea 728
razón de cambio promedio 721
regla de la cadena 746
segunda derivada 753

❑ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **Cociente de la diferencia** **(15.5)**

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **La derivada** **(15.7)**

Reglas de la diferenciación

1. Si $f(x) = c, f'(x) = 0$ **(Función constante)**

2. Si $f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$ **(Regla de la potencia)**
3. Si $f(x) = c \cdot g(x),\ f'(x) = c \cdot g'(x)$ **(Constante por una función)**
4. Si $f(x) = u(x) \pm v(x), f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ **(Suma o diferencia)**
5. Si $f(x) = u(x)v(x), f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ **(Regla del producto)**
6. Si $f(x) = u(x)/v(x), f'(x) = \dfrac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ **(Regla del cociente)**
7. Si $f(x) = [u(x)]^n, f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$ **(Potencia de una función)**
8. Si $f(x) = e^{u(x)}, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ **(Funciones exponenciales de base e)**
9. Si $f(x) = \ln u(x), f'(x) = u'(x)/u(x)$ **(Funciones de logaritmo natural)**
10. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ **(Regla de la cadena)**

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 15.1

1. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.25 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to -4^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -4} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x \to -2} f(x)$

g) $\lim_{x \to 2} f(x)$ *h*) $\lim_{x \to 1} f(x)$

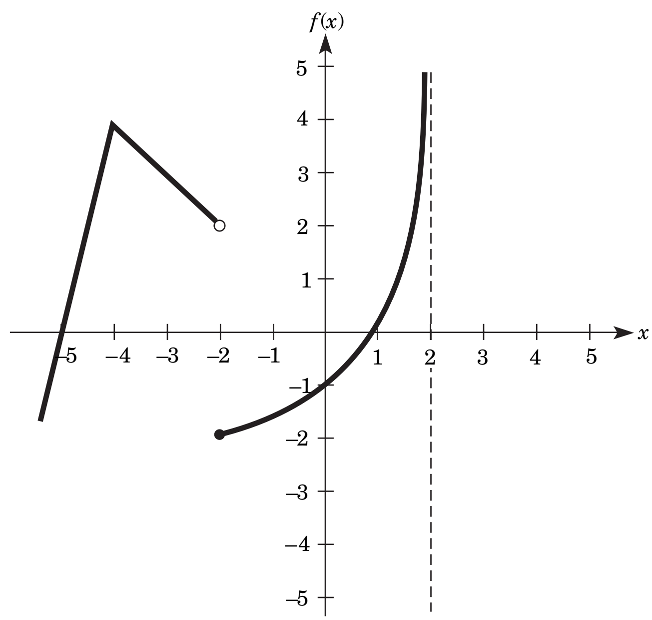


Figura 15.25

2. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.26 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to -1} f(x)$

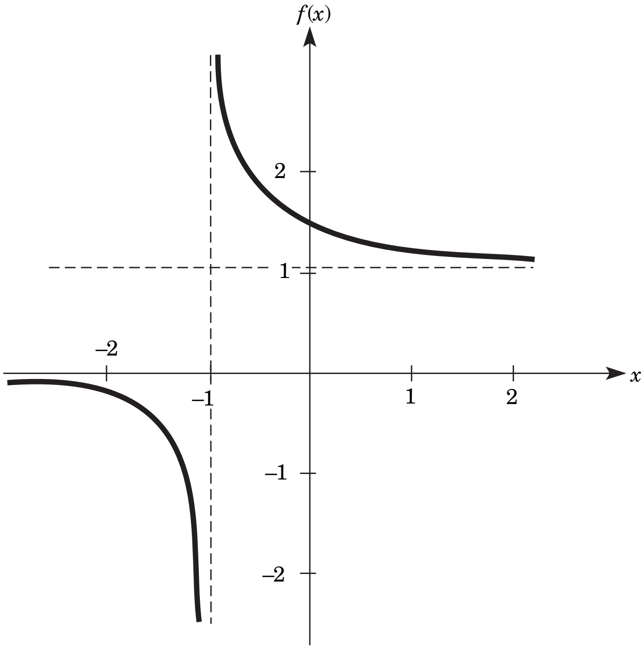


Figura 15.26

SECCIÓN 15.2

En los siguientes ejercicios, encuentre el límite indicado, si existe.

3. $\lim\limits_{x \to 3} \left[x^2 \left(4x - 2 + \dfrac{1}{x} \right) \right]$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 2x + 6}{x^4 - 6x}$

5. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5}$

6. $\lim\limits_{x \to -1} (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

7. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 3}{x + 3}$

8. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + x - 15}{x + 3}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x - 5}$

10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2 + 1}{x + 1}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - x + 7}$

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x}$

13. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 5}{-x + 3}$

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1/2x}$

En los siguientes ejercicios, determine si existen discontinuidades y, si es así, dónde se presentan.

15. $f(x) = x^7/(x^2 - 1)$

16. $f(x) = (x^2 - 9)/(16 - x^4)$

17. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

18. $f(x) = (x^2 - 9)/(64 - x^3)$

19. $f(x) = \begin{cases} 2/x^2 & \text{si } x \neq 6 \\ 10 & \text{si } x = 6 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x > 5 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$

21. $f(x) = 25x^2/(24 - 8x)$

22. $f(x) = (3 - x)/(x^2 - 3x + 2)$

23. $f(x) = 1/(x^2 + 4)$

24. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)/(x^2 + 6)$

SECCIÓN 15.3

Para cada una de las siguientes funciones, determine la razón de cambio promedio en el valor de y al desplazarse desde $x = 1$ hasta $x = 4$.

25. $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$

26. $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

27. $y = f(x) = (x - 1)/(1 - x^2)$

28. $y = f(x) = -x^3$

29. $y = f(x) = 4x^2 - 2x + 5$

30. $y = f(x) = 30x^2 - 10x$

31. $y = f(x) = 4x^3 - 2x^2$

32. $y = f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8$

33. $y = f(x) = -x^4$

34. $y = f(x) = 1/x^2$

35. La población de una ciudad se ha incrementado anualmente de la manera en que se indica en la tabla siguiente.

Año	Población, en millones
1986	2.55
1987	2.70
1988	2.80
1989	2.88
1990	2.90
1991	3.01

¿A qué razón promedio la población cambió entre 1986 y 1991? ¿Y entre 1987 y 1990?

Para los siguientes ejercicios: *a*) determine la expresión general para el cociente de la diferencia, y *b*) utilice el cociente de la diferencia para calcular la pendiente de la secante que conecta los puntos en $x = 1$ y $x = 3$.

36. $f(x) = -5x^2 + 2x$

37. $f(x) = -3/x$

38. $f(x) = 10$

39. $f(x) = 2x + 7$

40. $f(x) = 3x^2 + x + 50$

41. $f(x) = x^2/3$

42. $f(x) = 20x^2 + 6x + 25$

43. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$

44. $f(x) = 3x^3$

45. $f(x) = -7x^3 + 5$

***46.** $f(x) = x^3 - 1$

***47.** $f(x) = 10/x$

***48.** $f(x) = ax + b$

***49.** $f(x) = ax^2 + bx + c$

SECCIÓN 15.4

Para las siguientes funciones: *a*) encuentre la derivada haciendo uso del método del límite, y *b*) determine cualquier valor de x para el cual la pendiente sea igual a 0.

50. $f(x) = -3x^2 + 6x$

51. $f(x) = -3/x$

52. $f(x) = cx^2$

53. $f(x) = -4x^2 - 2x$

***54.** $f(x) = x^4$

***55.** $f(x) = x^4 - 4x$

56. $f(x) = (x^3/3) - 9x - 10$

57. $f(x) = (x^3/3) - 16x + 45$

58. $f(x) = -10x^2 + 40x$

59. $f(x) = ax^2 + bx$

SECCIÓN 15.5

Para los siguientes ejercicios, encuentre $f'(x)$.

60. $f(x) = \frac{11}{15}$

61. $f(x) = 25x^2 + 15x$

62. $f(x) = 3\left(x + \dfrac{4}{x}\right)$

63. $f(x) = 15x^2/(1 - x^2)$

64. $f(x) = 24x^4 - 15x^3 + 100$

65. $f(x) = 5x^4/3 + 2x^3$

66. $f(x) = \sqrt{x^7}$

67. $f(x) = x^2/(4 - x^3)$

68. $f(x) = \dfrac{5}{x^4 - 8}$

69. $f(x) = \dfrac{x - 3x^2}{x^3 + 3x}$

70. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x}{x^3 + 5x^2 - x}$

71. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

72. $f(x) = x^2/\sqrt{x}$

73. $f(x) = (x - 7)(x^3 - 3x^2 + 2x)$

74. $f(x) = (10 - x^5)(x^6 - 2x^3 + x)$

75. $f(x) = (5 - x + 3x^2)(x^8 + 5x^3 - 10$

SECCIÓN 15.6

Para los siguientes ejercicios, encuentre $f'(x)$.

76. $f(x) = (x^3 + 4)^4$

77. $f(x) = (5x^2 - 10x)^5$

78. $f(x) = (4x^3 - 3x^2 - 2x)^6$

79. $f(x) = (8 - x^3)^{3/2}$

80. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 10}$

81. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6}$

82. $f(x) = 1/\sqrt{10 - x^3}$

83. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2 - 5x}$

84. $f(x) = e^{x^3 - 2x}/2$

85. $f(x) = 10e^{x^2 - 2x}$

86. $f(x) = 5x^2e^{x^2}$

87. $f(x) = 2xe^{-x}$

88. $f(x) = 2e^{3x}/x^2$

89. $f(x) = x^2/4e^x$

90. $f(x) = (e^{3x+1} - 5)^6$

91. $f(x) = (1 - e^{x^3})^5$

92. $f(x) = (a - be^{-x})^c$

93. $f(x) = x^5/e^{2x}$

94. $f(x) = \ln(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

95. $f(x) = \ln bx^4$

96. $f(x) = \ln(4 - 2x)$

97. $f(x) = \ln 9x$

98. $f(x) = x^3 \ln x$

99. $f(x) = x^2 \ln(x - 5)$

100. $f(x) = [\ln(x^2 + 1)]^4$

101. $f(x) = (\ln x)^3$

***102.** $f(x) = [(x - 5)\sqrt{x + 4}]/(1 - x)$

***103.** $f(x) = [(x^2 + 3)/(4 - x)]^3$

***104.** $f(x) = [x\sqrt{x^2+7}]^{1/2}$

***105.** $f(x) = [(x^2)^3]^4/(x^3)^2$

106. $f(x) = (x^3 - 3x^2)/\ln(x-5)$

107. $f(x) = (x/\ln x)^5$

108. $f(x) = x^4 \ln(2x^3+4)$

109. $f(x) = \ln(5x^2 - 2x)$

Para los siguientes ejercicios, encuentre dy/dx.

110. $y = f(u) = u^3 - 4$ y $u = g(x) = x^3 + 3$

111. $y = f(u) = (2u+3)^2$ y $u = g(x) = x^2 - 3x$

112. $y = f(u) = u^{1/3}$ y $u = g(x) = x^2 - 5$

113. $y = f(u) = \dfrac{6u-1}{2-u^2}$ y $u = g(x) = x^2 + 2$

114. $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 5u}$ y $u = g(x) = \dfrac{4}{x}$

SECCIÓN 15.7

115. Se lanza hacia arriba una pelota desde el techo de un edificio de 900 pies de alto. La pelota alcanzará una altura de h pies al cabo de t segundos, según se describe con la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 80t + 900$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 4 s?

b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 4 s?

c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota cuando $t = 0$? ¿Cuando $t = 4$?

116. Se lanza un objeto desde la tierra con una velocidad inicial de 512 pies por segundo. La función que describe la altura de la pelota es

$$h = f(t) = 512t - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t es el tiempo medido en segundos desde que la pelota se lanza.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en $t = 2$ s?

b) ¿Cuándo retornará la pelota a la tierra?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el instante en que toca la tierra?

117. Crecimiento de la población La población de una ciudad es estimada por la función

$$P = f(t) = 1.2e^{0.045t}$$

donde P es igual a la población (en millones) y t es igual al tiempo medido en años desde 1988.

a) ¿Cuál es la población esperada para 1995?

b) Determine la expresión para la razón de cambio instantánea en la población.

c) ¿A qué razón se espera que la población cambie en 1995?

118. Devaluación de los bienes raíces Después de un rápido incremento en los valores de las residencias durante mediados de la década de 1980, los valores de los bienes raíces en el noreste comenzaron a decaer en 1990. La función

$$V = f(t) = 140\,000e^{-0.002t}$$

es una función que estima el valor promedio V (en \$) de una residencia unifamiliar en un municipio en particular, donde t es igual al tiempo medido en meses *desde* el primero de enero de 1990.

a) ¿Cuál es el valor promedio estimado para el primero de julio de 1990? ¿Y para el primero de enero de 1992?

b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en el valor promedio de una residencia unifamiliar en este municipio.

c) ¿A qué razón cambia el valor el primero de enero de 1991?

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Determine:

a) $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{500}{(2x - 1)/x}$

2. Determine si existen discontinuidades en f y, de ser así, dónde ocurren si

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{4x^2 - 2x + 5}$$

3. Determine dy/dx usando el método del límite si

$$f(x) = -3x^2 - 2x$$

4. Encuentre $f'(x)$ si

a) $f(x) = 6/\sqrt[5]{x^4}$

b) $f(x) = 7x^6 - 8x^5 + 3x^3 + 90$

c) $f(x) = (18 + x)/(x^3 + 8)^3$

d) $f(x) = x^2 e^{4x}$

e) $f(x) = \ln(5x^3 - x^2)$

f) $f(x) = (e^x \ln x)^4$

5. Si se tiene $f(x) = 15x^2 - 90x - 35$, determine las localizaciones de cualquiera de los puntos en la gráfica de $f(x)$, donde la pendiente es $= 0$.

6. Obtenga todas las derivadas de orden superior de f si

$$f(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 6x^2 + 10x$$

7. Encuentre dy/dx si

$$y = f(u) = u^4 + 3u \qquad \text{y} \qquad u = g(x) = x^2 + 10$$

APÉNDICE: Demostración de algunas reglas de la diferenciación

La primera demostración es “parcial” en cuanto demuestra la regla 2 donde n es un entero positivo. La demostración de esta regla para calcular los otros valores de n rebasa el ámbito de este libro.