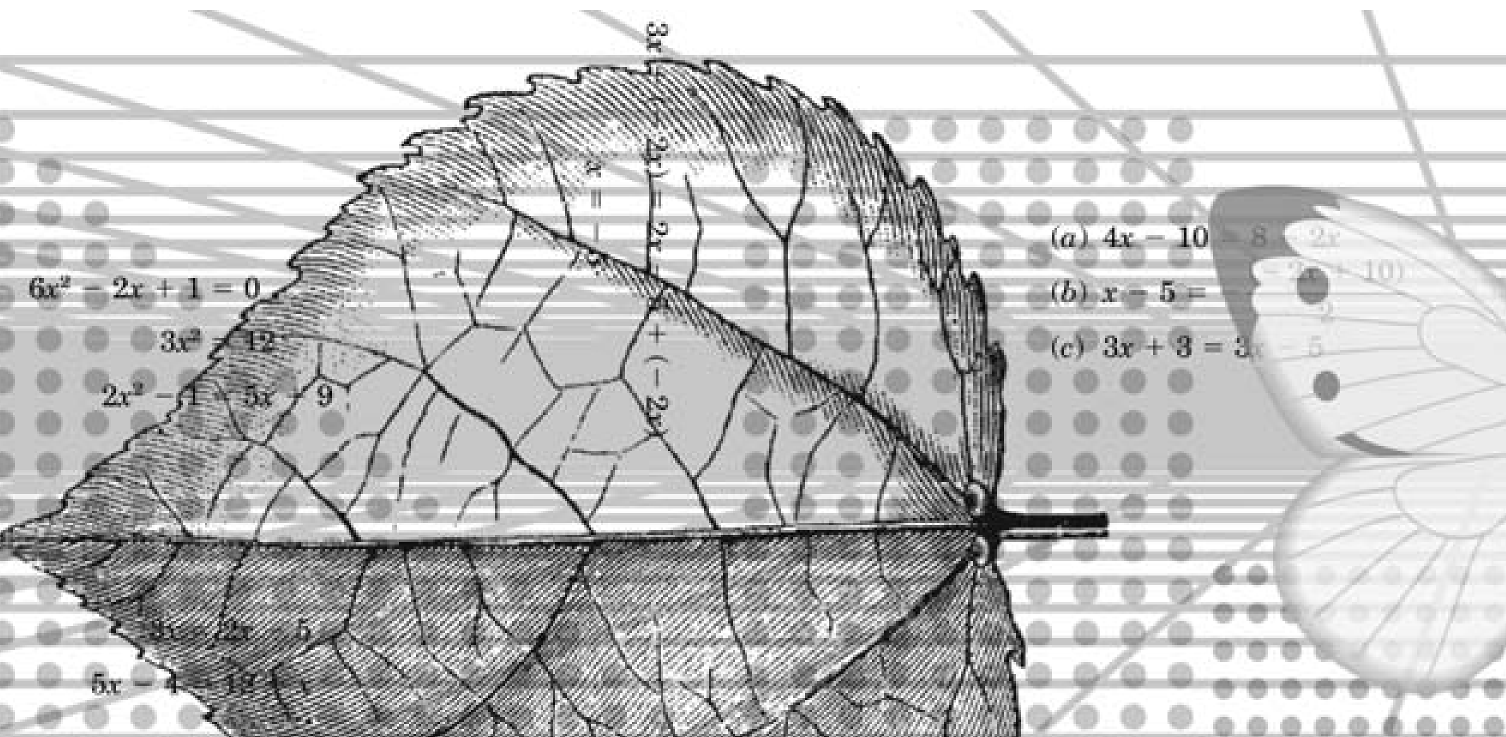
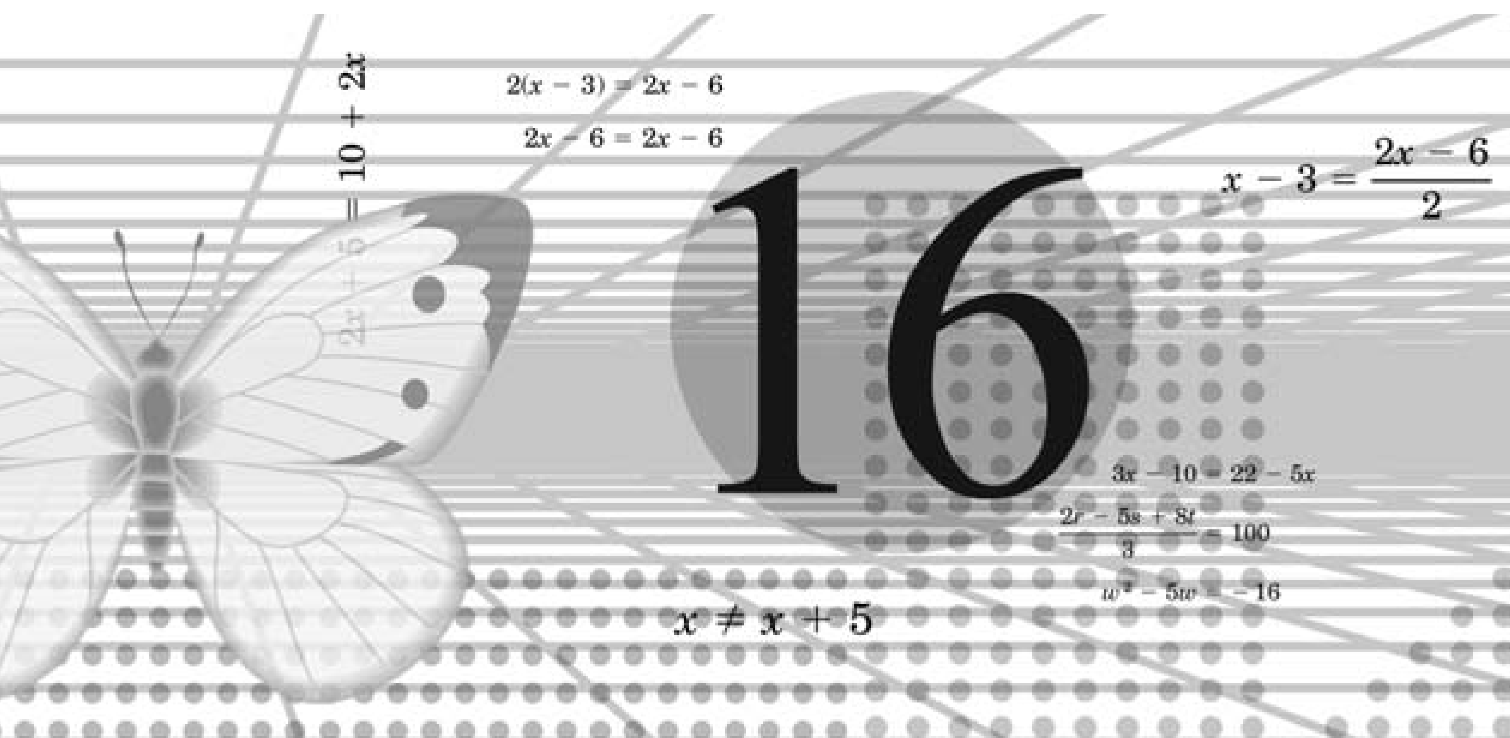
CAPÍTULO 16

Optimización: metodología



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mejorar el conocimiento del significado de la primera y segunda derivadas.
- Reforzar la compresión de la naturaleza de la concavidad.
- Ofrecer una metodología para determinar las condiciones de optimización de las funciones matemáticas.
- Dar ejemplos de los métodos para el trazado de la forma general de las funciones matemáticas.
- Dar ejemplos de las diversas aplicaciones de los procedimientos de optimización.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN

El cálculo diferencial proporciona una gran idea respecto del comportamiento de las funciones matemáticas. Es particularmente útil al estimar la representación gráfica de una función en dos dimensiones. Esto contrasta con los métodos de "fuerza bruta" del trazado de funciones que se analizaron en el capítulo 4. Se desea ilustrar esta particularidad del cálculo diferencial al trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 8x^2$$

(ejemplo 17).

En el presente capítulo se ampliarán las herramientas descritas en el capítulo 15. Se mejorará la comprensión de la primera y la segunda derivadas. Se verá cómo utilizarlas para describir el comportamiento de las funciones matemáticas. Uno de los principales objetivos del capítulo consiste en desarrollar un método con el cual determinar dónde una función alcanza sus valores máximos o mínimos. Se demostrará cómo estos procedimientos de **optimización** basados en el cálculo facilitan el trazado de gráficas de las funciones.

16.1 Derivadas: interpretaciones adicionales

En esta sección se seguirá ampliando el conocimiento de las derivadas.

La primera derivada

Según se mencionó en el capítulo anterior, la primera derivada representa la razón de cambio instantánea en $f(x)$ respecto de un cambio en x.

Definición: Función creciente

Se dice que la función f es una ***función creciente*** en un intervalo I si para cualquier x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.*

Las funciones crecientes también pueden identificarse por las condiciones de la pendiente. ***Si la primera derivada de f es positiva en todo un intervalo, entonces la pendiente será positiva y f será una función creciente en el intervalo.*** Es decir, en cualquier punto del intervalo, un ligero incremento en el valor de x se acompañará de un aumento en el valor de $f(x)$. Las curvas en las figuras 16.1a y 16.1b son las gráficas de funciones crecientes de x debido a que la pendiente de la tangente es positiva en cualquier punto.

* Técnicamente hablando, éstas son definiciones para funciones *estrictamente* crecientes (decrecientes).

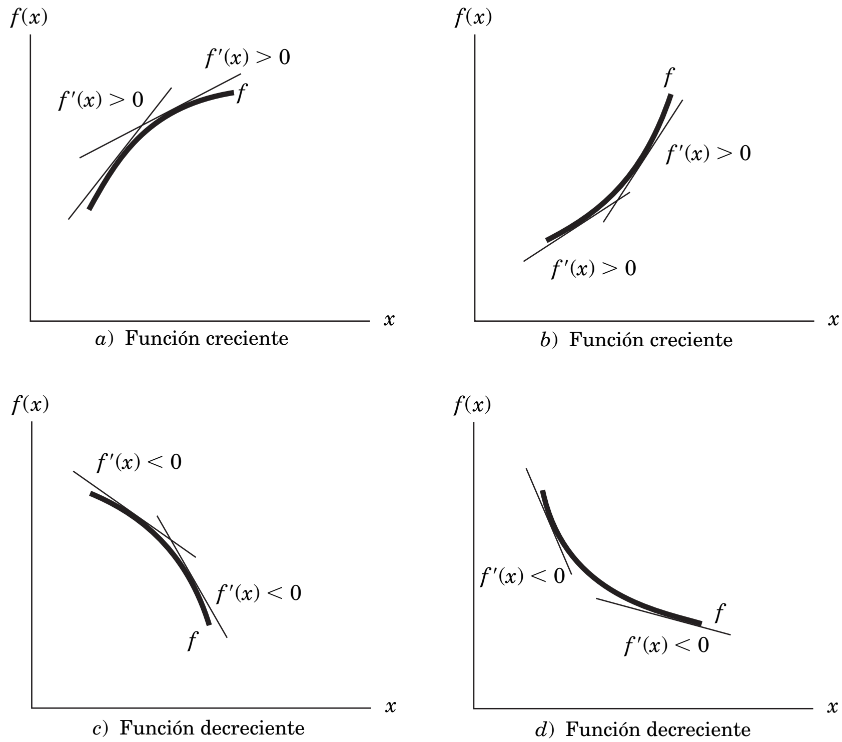


Figura 16.1 Relación entre $f'(x)$ y las funciones crecientes/decrecientes.

Definición: Función decreciente

Se dice que la función f es una ***función decreciente*** en un intervalo I si para cualquier x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.*

Como en el caso de las funciones crecientes, las decrecientes son identificables por las condiciones de la pendiente de la tangente. ***Si la primera derivada de f es negativa a lo largo de todo un intervalo, entonces la pendiente será negativa y f será una función decreciente en el intervalo.*** Es decir, en cualquier punto del intervalo, un aumento ligero en el valor de x se acompañará de una disminución en el valor de $f(x)$. Las curvas en las figuras 16.1*c* y *d* son las gráficas de las funciones decrecientes de x.

NOTA Si una función está aumentando (disminuyendo) en un intervalo, la función está aumentando (disminuyendo) en todos los puntos dentro del intervalo.

* Técnicamente hablando, éstas son definiciones para funciones *estrictamente* crecientes (decrecientes).

Ejemplo 1 Dado $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$, determine los intervalos en que f puede describirse como: *a*) una función creciente; *b*) una función decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

SOLUCIÓN

Para determinar si f es creciente o decreciente, primero habrá que calcular f':

$$f'(x) = 10x - 20$$

f será una función creciente cuando $f'(x) > 0$, o cuando

$$10x - 20 > 0$$

o $$10x > 20$$

o bien $$x > 2$$

f será una función decreciente cuando $f'(x) < 0$, o cuando

$$10x - 20 < 0$$

o $$10x < 20$$

o bien $$x < 2$$

f no será creciente ni decreciente cuando $f'(x) = 0$, o cuando

$$10x - 20 = 0$$

o $$10x = 20$$

o bien $$x = 2$$

En resumen, f es una función decreciente cuando $x < 2$, no es ni creciente ni decreciente cuando $x = 2$ y es una función creciente cuando $x > 2$. Trace la gráfica de f para comprobar si estas conclusiones parecen razonables. ❑

La segunda derivada $f''(x)$ es una medida de la razón de cambio instantánea en $f'(x)$ respecto de un cambio en x. Dicho de otra manera, indica la tasa a la cual la pendiente de la función está cambiando en relación con el cambio en x, sin importar si la pendiente de la función esté aumentando o disminuyendo en un instante determinado.

Si $f''(x)$ es negativa en un intervalo I de f, la primera derivada estará disminuyendo en I. En una gráfica, la pendiente está disminuyendo de valor en el intervalo. Si $f''(x)$ es positiva en un intervalo I de f, la primera derivada estará aumentando en I. Desde el punto de vista gráfico, la pendiente estará creciendo en ese intervalo.

Examínese detenidamente la figura 16.2. Construya mentalmente líneas tangentes o ponga un borde recto en la curva para representar la línea tangente en varios puntos. A lo largo de la curva de A a B la pendiente es ligeramente negativa cerca de A y se torna más negativa al acercarnos a B. En efecto, la pendiente de una línea tangente pasa de un valor de 0 en A a su valor más negativo en el punto B. Así pues, la pendiente estará disminuyendo

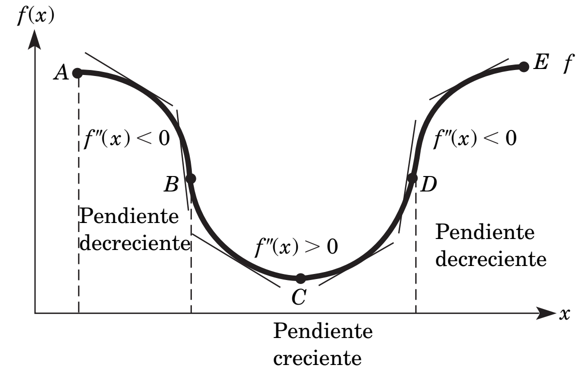


Figura 16.2 Relación entre $f''(x)$ y la pendiente creciente/decreciente [$f'(x)$].

de valor en el intervalo comprendido entre A y B, y cabe esperar que $f''(x)$ sea negativa en este intervalo [es decir, $f''(x) < 0$].

Una vez alcanzado su valor más negativo en el punto B, la pendiente sigue siendo negativa en el intervalo entre B y C, pero va haciéndose cada vez menos negativa, hasta que finalmente es 0 en C. Si la pendiente toma valores que están tornándose menos negativos (por ejemplo, $-5, -4, -3, -2, -1, 0$), estará *aumentando* de valor. Por lo tanto, cabe suponer que $f''(x)$ sea positiva en este intervalo [es decir, que $f''(x) > 0$].

Entre C y D la pendiente se vuelve cada vez más positiva, tomando su máximo valor positivo en D. La pendiente está aumentando de valor en este intervalo, por lo cual cabría esperar que $f''(x)$ sea positiva.

Entre D y E la pendiente sigue siendo positiva, pero cada vez se vuelve menos positiva, hasta que finalmente es 0 en E. Si la pendiente está adoptando valores que son positivos pero cada vez más pequeños (por ejemplo, 5, 4, 3, 2, 1, 0), cabe esperar que $f''(x)$ sea negativa en el intervalo.

En la figura 16.3 se sintetizan las condiciones de la primera y la segunda derivadas para las cuatro regiones de la función. Tales relaciones pueden ser difíciles de entender. Estudie detenidamente esas figuras y vuelva a realizar el razonamiento lógico si es necesario.

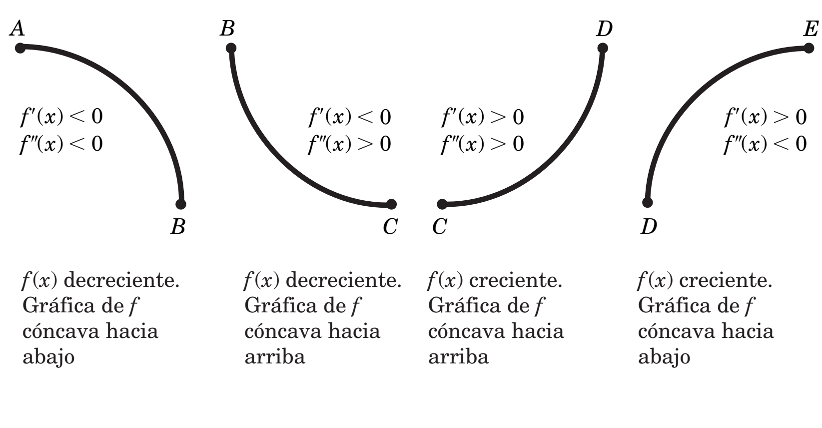


Figura 16.3 Características conjuntas para $f'(x)$ y $f''(x)$.

Concavidad y puntos de inflexión

En el capítulo 6 se hizo una breve introducción del concepto de concavidad. A continuación se da una definición más formal de concavidad.

Definición: Concavidad

La gráfica de una función f es ***cóncava hacia arriba (hacia abajo)*** en un intervalo si f' aumenta (disminuye) en todo ese intervalo.

La definición sugiere que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un intervalo si la pendiente *aumenta* a lo largo de todo ese intervalo. Para cualquier punto dentro del intervalo, *la curva que representa a f se hallará arriba de la línea tangente trazada en el punto*. De manera análoga, la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo si la pendiente *decrece* a lo largo de todo ese intervalo. Para cualquier punto dentro del intervalo, *la curva que representa a f se encontrará debajo de la línea tangente trazada en el punto*.

En la figura 16.4, la gráfica de f es *cóncava hacia abajo* entre A y B, y es *cóncava hacia arriba* entre B y C. Nótese que entre A y B la curva se encuentra debajo de sus líneas tangentes y que entre B y C la curva está arriba de ellas. El punto B es donde la concavidad deja de ser cóncava hacia abajo y empieza a ser cóncava hacia arriba. El punto donde la concavidad cambia se denomina ***punto de inflexión***. Por consiguiente, el punto B es un punto de inflexión.

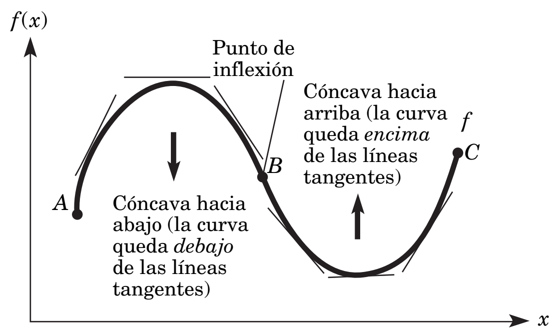


Figura 16.4 Representación de las condiciones de concavidad.

Entre la segunda derivada y la concavidad de la gráfica de una función se dan relaciones que serán de gran valor más adelante en este capítulo. He aquí las relaciones:

Relaciones entre la segunda derivada y la concavidad

I *Si $f''(x) < 0$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, la gráfica de f será cóncava hacia abajo en ese intervalo. Para cualquier punto $x = c$ dentro del intervalo, se dice que f es cóncava hacia abajo en $[c, f(c)]$.*

> **II** *Si $f''(x) > 0$ en cualquier intervalo $a \le x \le b$, la gráfica de f será cóncava hacia arriba en ese intervalo. Para cualquier punto $x = c$ dentro del intervalo, se dice que f es cóncava hacia arriba en $[c, f(c)]$.*
>
> **III** *Si $f''(x) = 0$ en cualquier punto $x = c$ en el dominio de f, no puede sacarse conclusión alguna sobre la concavidad en $[c, f(c)]$.*

¡Hay que tener mucho cuidado para no invertir el fundamento lógico de las relaciones que acabamos de señalar! En virtud de la relación III *no pueden* hacerse afirmaciones sobre el signo de la segunda derivada si se conoce la concavidad de la gráfica de una función. Por ejemplo, *no se puede afirmar que si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo cuando $x = a$, $f''(a) < 0$.*

Ejemplo 2

Para determinar la concavidad de la gráfica de la función cuadrática generalizada $f(x) = ax^2 + bx + c$, se hallarán la primera y la segunda derivadas.

$$f'(x) = 2ax + b \quad \text{y} \quad f''(x) = 2a$$

Si $a > 0$, entonces $f''(x) = 2a > 0$. De acuerdo con la relación II, la gráfica de f es cóncava hacia arriba siempre que $a > 0$. Si $a < 0$, entonces $f''(x) = 2a < 0$. Según la relación I, la gráfica de f es cóncava hacia abajo siempre que $a < 0$. Esto concuerda perfectamente con lo dicho en el capítulo 6, donde se llegó a la conclusión de que si $a > 0$, la gráfica de f es una parábola cóncava hacia arriba. Y si $a < 0$, f se grafica como una parábola que es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 3

En $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, determínese la concavidad de la gráfica de f en $x = -2$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

y

$$f''(x) = 6x - 4$$

La evaluación de $f''(x)$ cuando $x = -2$ da

$$f''(-2) = 6(-2) - 4 = -16$$

Puesto que $f''(-2) < 0$, la gráfica de f será cóncava hacia abajo cuando $x = -2$. Para determinar la concavidad si $x = 3$, se obtiene

$$f''(3) = 6(3) - 4 = 14$$

Dado que $f''(3) > 0$, la gráfica de f será cóncava hacia arriba cuando $x = 3$.

Ejemplo 4

Determine la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4$ en $x = 0$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f''(0) = 12(0)^2 = 0$$

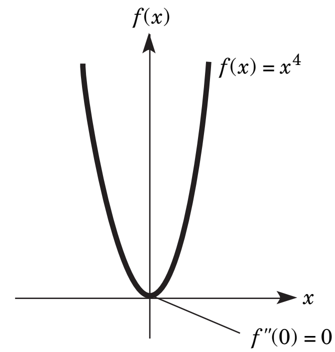


Figura 16.5 Ninguna conclusión sobre la concavidad.

De acuerdo con la relación III, no es posible hacer afirmación alguna sobre la concavidad cuando $x = 0$. Sin embargo, al sustituir un número suficiente de valores de x en f y al graficar esos pares ordenados, se advierte que f presenta la forma que aparece en la figura 16.5. Y a partir de esta figura es obvio que la gráfica es cóncava hacia arriba si $x = 0$. ❑

Prueba para localizar puntos de inflexión

I *Calcule todos los puntos donde $f''(a) = 0$.*
II *Si $f''(x)$ cambia de signo cuando pasa por $x = a$, hay un punto de inflexión en $x = a$.*

Una condición necesaria (algo que debe ser verdadero) para que exista un punto de inflexión en $x = a$ es que $f''(a) = 0$. Es decir, al calcular todos los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$, se encontrarán las *posiciones candidatas* de los puntos de inflexión.* La *condición $f''(a) = 0$* no garantiza que exista un punto de inflexión cuando $x = a$. (Véase el ejemplo 4.) El paso II confirma si una posición candidata es un punto de inflexión.

La esencia de la prueba anterior consiste en seleccionar puntos situados ligeramente a la izquierda y a la derecha de $x = a$ y en determinar si la concavidad es distinta en ambos lados. Si $f''(x)$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha o viceversa, hay un *cambio* en la concavidad cuando pasa a través de $x = a$. Así, existe un punto de inflexión cuando $x = a$.

Ejemplo 5

En el ejemplo 4, $f''(0) = 0$ implica que $x = 0$ es una posición candidata para un punto de inflexión (**paso I**).

❑ **Paso II.** Para verificar que *no* existe un punto de inflexión si $x = 0$ para $f(x) = x^4$, se evalúa $f''(x)$ a la izquierda en $x = -0.1$ y a la derecha cuando $x = +0.1$.

* Otros candidatos para puntos de inflexión ocurren donde $f''(x)$ es discontinua. Pero en este libro no encontraremos esos candidatos.

$$f''(-0.1) = 12(-0.1)^2 = 0.12 > 0$$

y

$$f''(+0.1) = 12(+0.1)^2 = 0.12 > 0$$

Puesto que la segunda derivada tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, entonces no hay punto de inflexión en $x = 0$.

Ejemplo 6 Para determinar la localización o localizaciones de todos los puntos de inflexión en la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2 + 10$$

encontramos que

$$f'(x) = \frac{4x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 2x = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$$

y

$$f''(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{2} + 2 = x^2 - 3x + 2$$

❑ **Paso I.** $f''(x)$ se iguala a 0 a fin de calcular las posiciones candidatas:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

o bien

$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

Por lo tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = 1$ y $x = 2$.

❑ **Paso II.** Para $x = 1$, $f''(x)$ se evalúa a la izquierda y a la derecha de $x = 1$ cuando $x = 0.9$ y $x = 1.1$.

$$f''(0.9) = (0.9)^2 - 3(0.9) + 2 = 0.81 - 2.7 + 2 = 0.11 > 0$$

$$f''(1.1) = (1.1)^2 - 3(1.1) + 2 = 1.21 - 3.3 + 2 = -0.09 < 0$$

Puesto que el signo de $f''(x)$ cambia, existe un punto de inflexión en $x = 1$. Cuando los valores de $x = 1.9$ y $x = 2.1$ se escogen para evaluar $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = 2$.

$$f''(1.9) = -0.09 < 0$$

$$f''(2.1) = 0.11 > 0$$

Puesto que $f''(x)$ cambia de signo, se llega a la conclusión de que un punto de inflexión existe cuando $x = 2$. ❑

Ejercicio de práctica

Determine las posiciones de cualquier punto de inflexión en la gráfica de $f(x) = x^3/3 + x^2 - 8x$. *Respuesta*: Punto de inflexión en $x = -1$.

Ejemplo 7 **(Seguimiento de una epidemia: reinspección)** El escenario de motivación del capítulo 15 analizó la propagación de una epidemia de gripe. La función

$$n = f(t) = -0.3t^3 + 10t^2 + 300t + 250$$

se empleó para estimar el número de personas afectadas por la gripe, n, como una función del número de días desde la detección inicial de la epidemia por oficiales del departamento de salud, t. Determine cualquier punto de inflexión e interprete su significado en esta aplicación.

SOLUCIÓN

❑ **Paso I.**

$$f'(t) = -0.9t^2 + 20t + 300$$

$$f''(t) = -1.8t + 20$$

Si se establece $f''(t) = 0$ se obtiene un candidato para un punto de inflexión en $t = 11.11$.

❑ **Paso II.** Debido a que $f''(11) = 0.2$ y $f''(12) = -1.6$, el signo de $f''(t)$ cambia cuando pasa a través de la posición del candidato. Por ello existe para la función.

❑ **Interpretación.** El punto de inflexión puede interpretarse como la representación del punto en el tiempo cuando decrece la tasa a la que se contagian las personas con gripe. Antes de $t = 11.11$, se contagian personas adicionales *con una tasa creciente*. Después de $t = 11.11$, se contagian personas adicionales, pero *con una tasa decreciente*. ❑

Concavidad desde una perspectiva diferente

Se utilizarán las expresiones *cóncava hacia arriba* y *cóncava hacia abajo* para describir el atributo de curvatura al que se da el nombre de concavidad. Pueden emplearse otros términos para describir esta cualidad. Por ejemplo, algunos escritores distinguen entre ***funciones estrictamente cóncavas*** y ***funciones estrictamente convexas***.

Definición: Función estrictamente cóncava (convexa)

Una función estrictamente cóncava (convexa) posee la siguiente propiedad gráfica: si dos puntos cualesquiera A y B se encuentran en la curva que representa la función, si los dos puntos están unidos por una recta, todo el segmento AB se hallará debajo (arriba) de la curva excepto en los puntos A y B.

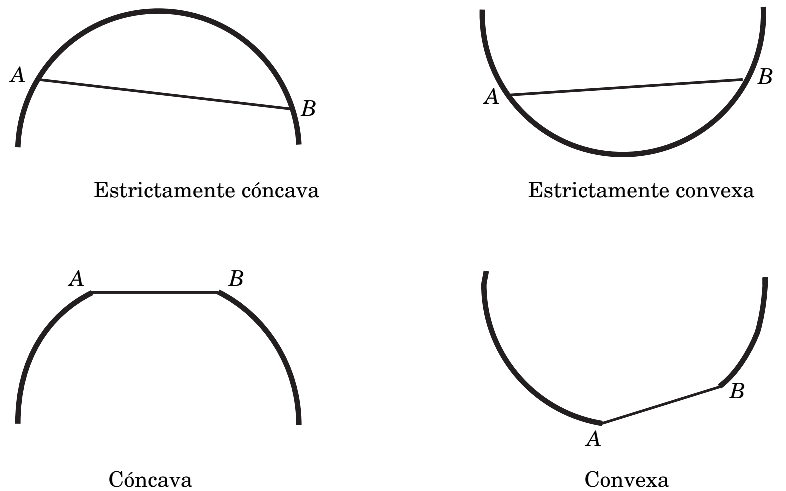


Figura 16.6 Funciones cóncavas y convexas.

Esta definición puede ampliarse un poco para definir una ***función cóncava*** y una ***función convexa*** [en contraste con las funciones *estrictamente* cóncavas (convexas)]. Si se deja que el segmento de AB se encuentre debajo (arriba) de la curva, *o en la curva*, a la función se le llama cóncava (convexa). La figura 16.6 ilustra estas definiciones.

Sección 16.1 Ejercicios de seguimiento

En cada una de las siguientes funciones: *a*) determine si f está aumentando o disminuyendo cuando $x = 1$. Determine los valores de x para los cuales f es: *b*) una función creciente, *c*) una función decreciente y *d*) ni creciente ni decreciente.

1. $f(x) = 20 - 4x$
2. $f(x) = 15x + 16$
3. $f(x) = x^2 - 3x + 20$
4. $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$
5. $f(x) = x^3/3 + x^2/2$
6. $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 6x$
7. $f(x) = x^4 + 2x^2$
8. $f(x) = 3x^5$
9. $f(x) = (x + 3)^{3/2}$
10. $f(x) = 3x^2/(x^2 - 1)$
11. $f(x) = -x^2 + 4x + 15$
12. $f(x) = -2x^2 + 20x + 3$
13. $f(x) = 5x^2 + 40x + 50$
14. $f(x) = 3x^2/2 - 9x + 5$
15. $f(x) = (x - 4)^{3/2}$
16. $f(x) = (x - 5)^4$
17. $f(x) = (2x - 10)^5$
18. $f(x) = (8x + 24)^8$
19. $f(x) = \dfrac{(4x + 20)^9}{4}$
20. $f(x) = (2x + 18)^7$

En cada una de las siguientes funciones, use $f''(x)$ para determinar las condiciones de concavidad cuando $x = -2$ y $x = +1$.

21. $f(x) = -3x^2 + 2x - 3$
22. $f(x) = x^3 + 12x + 1$
23. $f(x) = x^2 - 4x + 9$
24. $f(x) = -x^2 + 5x$
25. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
26. $f(x) = (x + 1)^3$

27. $f(x) = x^2 + 3x^3$
28. $f(x) = x^2/(1 + x)$
29. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 10x$
30. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2$
31. $f(x) = x^3/3 - x^2/2 + 10x$
32. $f(x) = 5x^3/3 + 3x^2/2 - 5x + 25$
33. $f(x) = (x^2 - 1)^3$
34. $f(x) = (20 - 3x)^5$
35. $f(x) = (3x^2 + 2)^4$
36. $f(x) = (2x - 8)^4$
37. $f(x) = \sqrt{4x - 10}$
38. $f(x) = x^3/(1 - x)$
39. $f(x) = e^x$
40. $f(x) = e^{-x}$
41. $f(x) = \ln x$
42. $f(x) = -\ln x$

Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, determine los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente, *c*) cóncava hacia arriba y *d*) cóncava hacia abajo, si:

***43.** $f(x) = ax + b$
***44.** $f(x) = b - ax$
***45.** $f(x) = ax^2 + bx + c$
***46.** $f(x) = -ax^2 - bx - c$
***47.** $f(x) = ax^3$
***48.** $f(x) = ax^4$

En cada una de las siguientes funciones identifique las localizaciones de los puntos de inflexión que haya.

49. $f(x) = x^3 - 9x^2$
50. $f(x) = -x^3 + 24x^2$
51. $f(x) = x^4/12 - x^3/3 - 7.5x^2$
52. $f(x) = (3 - x)^4$
53. $f(x) = (x - 5)^3$
54. $f(x) = x^5/20 - x^3/6$
55. $f(x) = -10x^4 + 100$
56. $f(x) = (x - 1)/x$
57. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 18$
58. $f(x) = -x^3 - 30x^2$
59. $f(x) = x^4/12 + x^3/6 - 3x^2$
60. $f(x) = x^4/12 + 7x^3/6 + 5x^2$
61. $f(x) = x^4/4 - 9x^2/2 + 100$
62. $f(x) = x^6/30 - 4x^2/2$
63. $f(x) = (3x - 12)^{5/2}$
64. $f(x) = (2x - 8)^{7/2}$
65. $f(x) = (x - 5)^5$
66. $f(x) = (x + 2)^4$
67. $f(x) = e^x$
68. $f(x) = e^{-x}$
69. $f(x) = \ln x$
70. $f(x) = -\ln x$

71. En la función de la figura 16.7, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

72. En la función que aparece en la figura 16.7, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) cóncava hacia arriba, *b*) cóncava hacia abajo, *c*) de concavidad cambiante, *d*) cóncava y *e*) convexa.

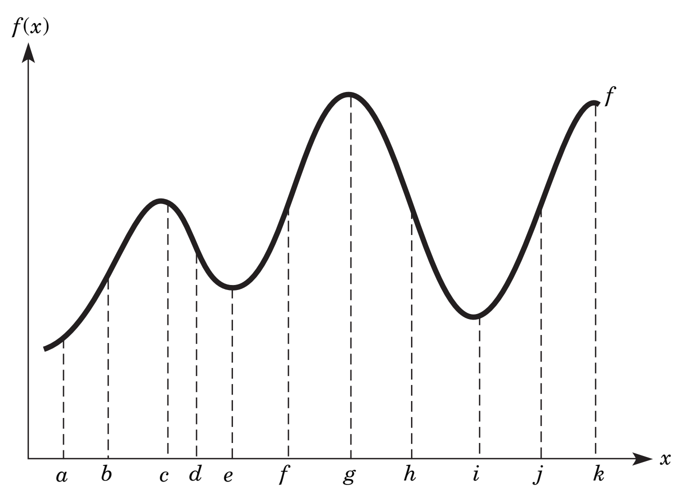


Figura 16.7

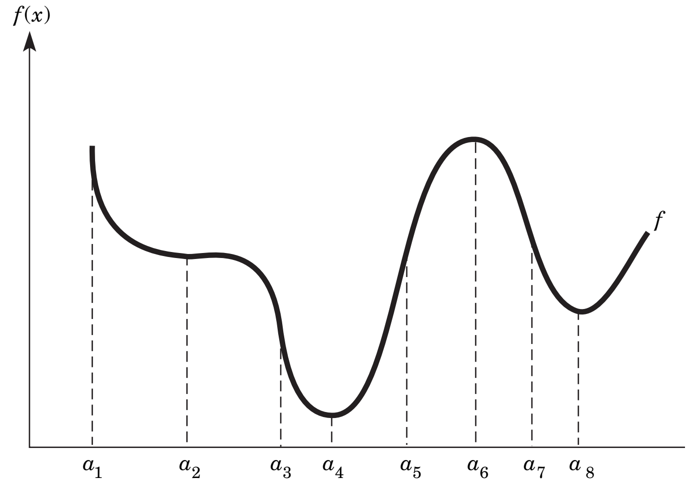


Figura 16.8

73. Dada la función mostrada en la figura 16.7, indique los valores de x para los cuales f está: *a*) incrementándose a una tasa creciente, *b*) incrementándose a una tasa decreciente, *c*) disminuyendo a una tasa decreciente, y *d*) disminuyendo a una tasa creciente.

74. En la función de la figura 16.8, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

75. En la función que aparece en la figura 16.8, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) cóncava hacia arriba, *b*) cóncava hacia abajo, *c*) de concavidad cambiante, *d*) cóncava y *e*) convexa.

76. Dada la función mostrada en la figura 16.8, indique los valores de x para los cuales f está: *a*) incrementándose a una tasa creciente, *b*) incrementándose a una tasa decreciente, *c*) disminuyendo a una tasa decreciente y *d*) disminuyendo a una tasa creciente.

16.2 Identificación de los máximos y mínimos

En la presente sección se estudiarán las funciones con el propósito de localizar los valores máximo y mínimo.

Extremos relativos

Definición: Máximo relativo

Si f se define en un intervalo (b, c) que contenga $x = a$, se dice que f alcanza un ***máximo relativo (local)*** en $x = a$, si $f(a) \geq f(x)$ para todas las x dentro del intervalo (b, c).

Definición: Mínimo relativo

Si f se define en un intervalo (b, c) que contenga $x = a$, se dice que f alcanza un ***mínimo relativo (local)*** en $x = a$, si $f(a) \leq f(x)$ para todas las x dentro del intervalo (b, c).

Ambas definiciones se centran en el valor de $f(x)$ dentro de un intervalo. Un máximo relativo se refiere a un punto donde el valor de $f(x)$ es mayor que los valores para los puntos

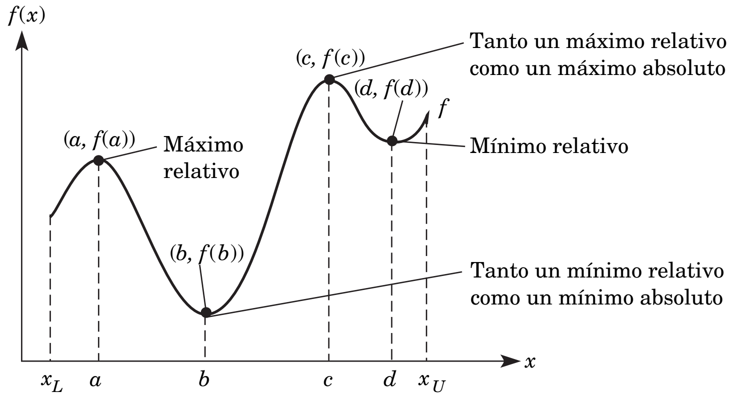


Figura 16.9 Extremos relativos.

cercanos. Un mínimo relativo designa un punto donde el valor de $f(x)$ es menor que los valores para los puntos cercanos. Si se emplean estas definiciones y se examina detenidamente la figura 16.9, se verá que f posee ***máximos relativos*** en $x = a$ y $x = c$. De manera análoga, f posee ***mínimos relativos*** en $x = b$ y $x = d$. En forma conjunta, se da el nombre de ***extremos relativos*** a unos y otros valores.

Definición: Máximo absoluto

Se dice que una función f alcanza un ***máximo absoluto*** en $x = a$ si $f(a) > f(x)$ para cualquier x en el dominio de f.

Definición: Mínimo absoluto

Se dice que una función f alcanza un ***mínimo absoluto*** en $x = a$ si $f(a) < f(x)$ para cualquier x en el dominio de f.

Si se consulta de nuevo la figura 16.9, $f(x)$ llega a un máximo absoluto en $x = c$. Y alcanza el mínimo absoluto cuando $x = b$. Conviene señalar que un *punto en la gráfica de una función puede ser a la vez un máximo (mínimo) relativo y un máximo (mínimo) absoluto*.

Puntos críticos

Interesan de manera especial los máximos y mínimos relativos. Será muy importante saber identificarlos y distinguirlos.

Condiciones necesarias para los máximos (mínimos) relativos

Dada la función f, las condiciones necesarias para la existencia de un máximo o mínimo relativo en $x = a$ (con a contenido en el dominio de f) son:

I *$f'(a) = 0$, o*
II *$f'(a)$ no está definida.*

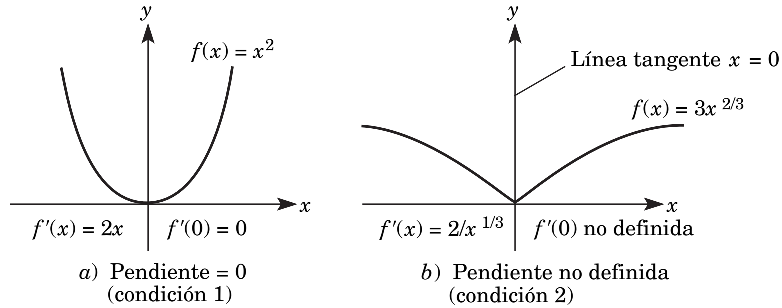


Figura 16.10 Puntos críticos.

Los puntos que satisfacen cualquiera de las dos condiciones de la definición anterior son *candidatos* para los máximos (mínimos) relativos. A esos puntos suele llamárseles ***puntos críticos***. Los puntos que cumplen con la condición 1 son los de la gráfica de f, donde la pendiente es 0. Los puntos que cumplen con la condición 2 se ejemplifican por discontinuidades en f o por puntos donde no puede evaluarse $f'(x)$. Se da el nombre de ***valores críticos*** a los valores de x que están dentro del dominio de f y que satisfacen la condición 1 o 2. Estos valores se denotan con (x^*) a fin de distinguirlos de otros valores de x. Si se tiene un valor crítico de f, el punto crítico correspondiente es $[x^*, f(x^*)]$.

La figura 16.10 muestra las gráficas de dos funciones que tienen puntos críticos en (0, 0). En la función $f(x) = x^2$, que aparece en la figura 16.10*a*, $f'(x) = 2x$ y un valor crítico ocurre cuando $x = 0$ (condición 1), donde la función tiene un mínimo relativo.

Para la función $f(x) = 3x^{2/3}$, $f'(x) = 2/x^{1/3}$. Nótese que la condición 1 nunca puede satisfacerse por no haber puntos donde la pendiente de la tangente sea 0. Sin embargo, existe un valor crítico de $x = 0$ conforme a la condición 2. La derivada no está definida (la línea tangente es la vertical $x = 0$ para la cual la pendiente está indefinida). Pero $f(0)$ está definida y el punto crítico (0, 0) es un mínimo relativo, como se advierte en la figura 16.10*b*.

Ejemplo 8 Con objeto de determinar la localización o localizaciones de los puntos críticos en la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 100$$

se calcula la derivada f'.

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} - 6$$

$$= x^2 - x - 6$$

$f'(x) = 0$ cuando

$$x^2 - x - 6 = 0$$

o bien:

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Cuando los dos factores se hacen iguales a 0, dos valores críticos serán $x = 3$ y $x = -2$. Cuando se sustituyen esos valores en f, los puntos críticos resultantes son $(-2, 107\frac{1}{3})$ y $(3, 86\frac{1}{2})$.

La única afirmación que puede hacerse respecto del comportamiento de f en esos puntos es que la pendiente es 0. Y además en ninguna otra parte de la gráfica de f la pendiente es igual a 0. Se requieren más pruebas para determinar si hay un máximo o un mínimo relativo cuando $x = 3$ y $x = -2$. ❑

Ejercicio de práctica

Determine las localizaciones de cualquier punto crítico en la gráfica de $f(x) = x^3/3 + x^2 - 8x$. *Respuesta*: Puntos críticos en $(-4, 26\frac{2}{3})$ y $(2, -9\frac{1}{3})$.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Qué comentarios pueden hacerse acerca de la existencia de puntos críticos en las funciones constantes [por ejemplo; $f(x) = 10$]?

La figura 16.11 ilustra diferentes posibilidades de puntos críticos donde $f'(x) = 0$. Las figuras 16.11*a* y *b* muestran puntos de los máximos y mínimos relativos, en tanto que las figuras 16.11*c* y *d* incluyen dos tipos de puntos de inflexión. En la figura 16.11*c*, la gráfica de la función presenta una pendiente de 0 en el punto *a*, y además está dejando de ser cóncava hacia abajo y empieza a ser cóncava hacia arriba. En la figura 16.11*d*, la gráfica tiene una pendiente de 0 y está realizando la transición de la concavidad hacia arriba a la concavidad hacia abajo.

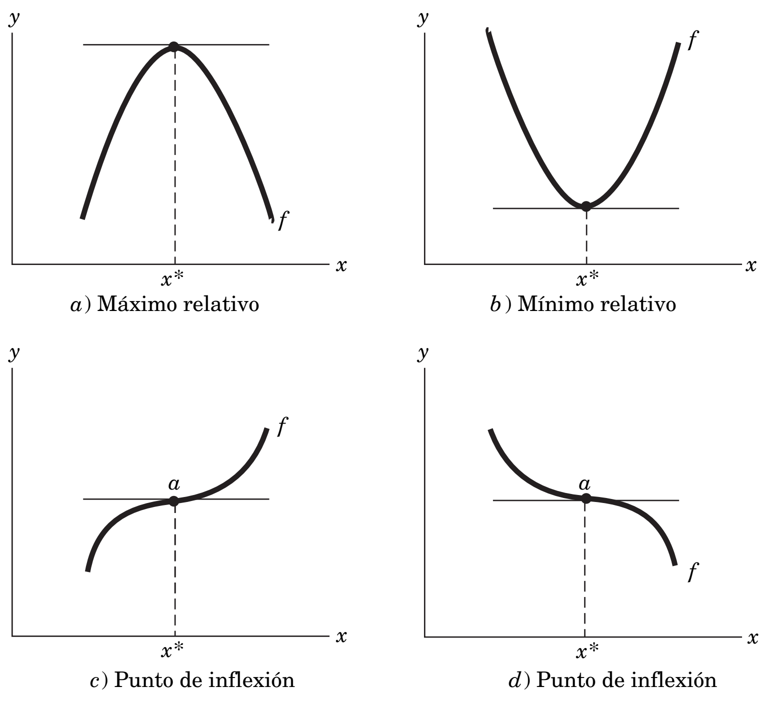


Figura 16.11 Puntos críticos donde $f'(x) = 0$.

Cualquier punto crítico donde $f'(x) = 0$ será un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de inflexión.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR Para funciones polinomiales f de grado n, el número más grande posible de puntos críticos donde $f'(x) = 0$ es $n - 1$. De este modo, una función f de grado 5 puede tener *como máximo* cuatro puntos con pendiente igual a cero. ¿Por qué ocurre esto?

Prueba de la primera derivada

Cuando se desee localizar puntos de los máximos o mínimos relativos, el primer paso consiste en encontrar todos los puntos críticos en la gráfica de la función. Un punto crítico puede ser un máximo o mínimo relativo o bien un punto de inflexión, por lo cual hay que idear una prueba que los distinga. Se cuenta con varias pruebas. Una de ellas, fácil de entender intuitivamente, es la ***prueba de la primera derivada***.

Después de que se encuentran las posiciones de los puntos críticos, esta prueba de la primera derivada exige un examen de las condiciones de pendiente a la izquierda y derecha del punto crítico. En la figura 16.12 se ilustran las cuatro posibilidades del punto crítico junto con sus condiciones de pendiente a ambos lados de x^*.

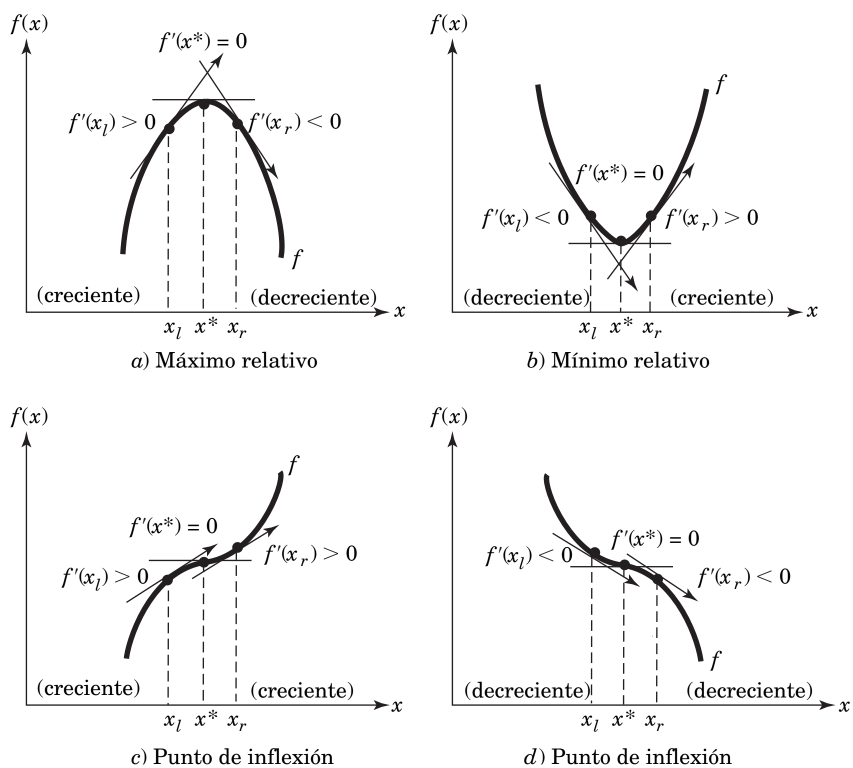


Figura 16.12 Prueba de la primera derivada.

Para un máximo relativo, la pendiente será positiva a la izquierda (x_l) y negativa a la derecha (x_r). Para un mínimo relativo la pendiente es negativa a la izquierda y positiva a la derecha. Para los puntos de inflexión, la pendiente tiene el mismo signo a la izquierda o la derecha del punto crítico.

A continuación se da otra manera de describir la prueba.

1. *Para un máximo relativo, el valor de la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha.*
2. *En el caso de un mínimo relativo, el valor de la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.*
3. *Para los puntos de inflexión, el valor de la función es creciente tanto a la izquierda como a la derecha o decreciente a ambos lados.*

En seguida se ofrece un resumen de la prueba de la primera derivada.

Prueba de la primera derivada

I *Localice todos los valores críticos de x^*.*

II *Para cualquier valor crítico x^*, determine el valor de $f'(x)$ a la izquierda (x_l) y a la derecha (x_r) de x^*.*

a) Si $f'(x_l) > 0$ y $f'(x_r) < 0$, habrá un máximo relativo de f en $[x^*, f(x^*)]$.

b) Si $f'(x_l) < 0$ y $f'(x_r) > 0$, existirá un mínimo relativo de f en $[x^*, f(x^*)]$.

c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en x_l y x_r, existe un punto de inflexión en $[x^*, f(x^*)]$.

Ejemplo 9 Determine la localización o localizaciones de cualquier punto crítico en la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 12x - 10$, así como su naturaleza.

SOLUCIÓN

La primera derivada es

$$f'(x) = 4x - 12$$

Cuando se hace la primera derivada igual a 0,

$$4x - 12 = 0$$

o

$$4x = 12$$

y hay un valor crítico cuando

$$x = 3$$

Puesto que $f(3) = 2(3^2) - 12(3) - 10 = -28$, un punto crítico se encuentra en $(3, -28)$.

Para probar el punto crítico, se selecciona $x_l = 2.9$ y $x_r = 3.1$.

$$f'(2.9) = 4(2.9) - 12$$
$$= 11.6 - 12 = -0.4$$

$$f'(3.1) = 4(3.1) - 12$$
$$= 12.4 - 12 = +0.4$$

Debido a que la primera derivada es negativa (-0.4) a la izquierda de $x = 3$ y positiva ($+0.4$) a la derecha, el punto $(3, -28)$ será un mínimo relativo en f (nótese que f es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia arriba). ❑

NOTA

ADVERTENCIA

Cuando se seleccionan x_l y x_r hay que estar bastante cerca del valor crítico x^*. Si nos alejamos demasiado a la izquierda o a la derecha, puede llegarse a un resultado erróneo, como en la figura 16.13, donde un mínimo relativo podría considerarse como un máximo relativo. Hay un poco de libertad en la selección de x_l y x_r. Sin embargo, cuando exista más de un punto crítico x_l y x_r habrán de escogerse de modo que caigan entre el valor crítico que se examina y cualquier valor crítico adyacente.

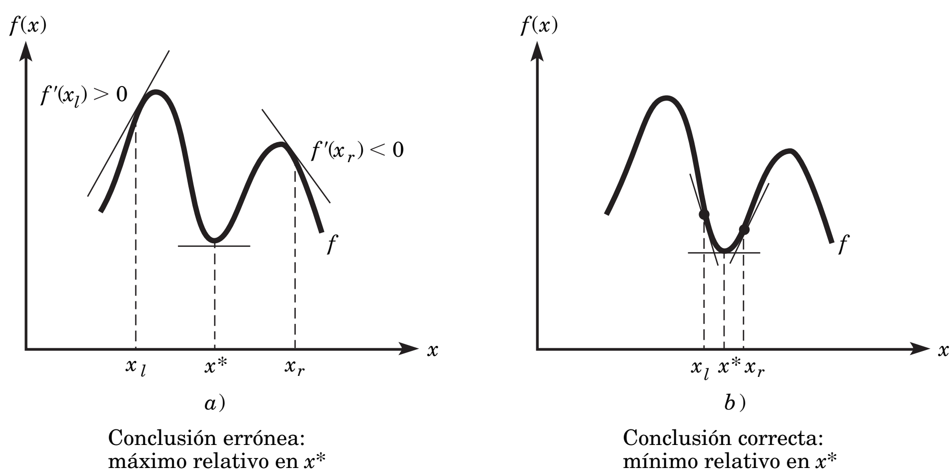


Figura 16.13 Selección de x_l y x_r para la prueba de la primera derivada.

Ejemplo 10 En el ejemplo 8 se determinó que la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 100$$

tiene puntos críticos en $(3, 86\frac{1}{2})$ y $(-2, 107\frac{1}{3})$. Para determinar la naturaleza de estos puntos críticos se examina la primera derivada

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

Al probar el punto crítico cuando $x = 3$, se selecciona $x_l = 2$ y $x_r = 4$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= (2)^2 - 2 - 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= (4)^2 - 4 - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Puesto que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente) a la izquierda de $x = 3$ y positiva (f es creciente) a la derecha, se presentará un mínimo relativo para f cuando $x = 3$.

Al probar el punto crítico en $x = -2$, se escogerá $x_l = -3$ y $x_r = -1$.

$$\begin{aligned} f'(-3) &= (-3)^2 - (-3) - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= (-1)^2 - (-1) - 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Puesto que $f'(x)$ es positiva (f está aumentando) a la izquierda de $x = -2$ y es negativa (f está disminuyendo) a la derecha, se presenta un máximo relativo para $f(x)$ cuando $x = -2$.

Ejemplo 11

La prueba de la primera derivada también es válida para los puntos críticos en que $f'(x)$ no está definida. Examínese la función $f(x) = 3x^{2/3}$, cuya gráfica aparece en la figura 16.10*b*. Para esta función, $f'(x) = 2/x^{1/3}$. Puesto que $f'(x)$ no está definida cuando $x = 0$, existirá un valor crítico conforme a la condición 2. Como $f(0) = 3(0)^{2/3} = 0$, hay un punto crítico en (0, 0). Al utilizar la prueba de la primera derivada, se selecciona $x_l = -1$ y $x_r = 1$.

$$f'(-1) = \frac{2}{\sqrt[3]{-1}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

Dado que $f'(x)$ es negativa a la izquierda de $x = 0$ y positiva a la derecha, el mínimo relativo ocurre en el punto crítico (0, 0). ❑

Ejercicio de práctica

En el ejercicio de práctica de la página 784 se identificaron los puntos críticos de $(-4, 26\frac{2}{3})$ y $(2, -9\frac{1}{3})$ para la función $f(x) = x^3/3 + x^2 - 8x$. Determine la naturaleza de estos puntos críticos haciendo uso de la prueba de la primera derivada. *Respuesta*: máximo relativo en $(-4, 26\frac{2}{3})$ y mínimo relativo en $(2, -9\frac{1}{3})$.

Prueba de la segunda derivada

La prueba más expedita de los puntos críticos donde $f'(x) = 0$ es la ***prueba de la segunda derivada***. En un sentido intuitivo, esta prueba trata de determinar la concavidad de la función en un punto crítico $[x^*, f(x^*)]$.

En la sección 16.1 se llegó a la conclusión de que si $f''(x) < 0$ es un punto de la gráfica de f, la curva será *cóncava hacia abajo* en ese punto. Por lo tanto, la prueba de la segunda derivada sugiere la obtención del valor de $f''(x^*)$. Pero tiene mayor interés el *signo* de $f''(x^*)$. Si $f''(x^*) > 0$, se sabe que no sólo la pendiente es 0 en x^*, sino que la función f es cóncava hacia arriba en x^*. Si ahora se consultan las cuatro posibilidades del punto crítico en la figura 16.11, sólo una es cóncava hacia arriba en x^*, y ése es el mínimo relativo de la figura 16.11*b*.

Si $f''(x^*) < 0$, la función será cóncava hacia abajo en x^*. Y al examinar de nuevo la figura 16.11 se observa que sólo el punto crítico acompañado de condiciones de concavidad hacia abajo es el máximo relativo en la figura 16.11*a*.

Según se señaló en la sección 16.1, si $f''(x^*) = 0$, no es posible sacar conclusión alguna acerca de la concavidad en $[x^*, f(x^*)]$. Se requiere otra prueba como la de la primera derivada para precisar la naturaleza de estos puntos críticos determinados. He aquí un resumen de la prueba de la segunda derivada.

Prueba de la segunda derivada

I *Encuentre todos los valores críticos x^*, tales que $f'(x^*) = 0$.*

II *Para cualquier valor crítico x^*, determine el valor de $f''(x^*)$.*

*a) Si $f''(x^*) > 0$, la función será cóncava hacia arriba en x^* y habrá un **mínimo relativo** para f en $[x^*, f(x^*)]$.*

*b) Si $f''(x^*) < 0$, la función será cóncava hacia abajo en x^* y habrá un **máximo relativo** para f en $[x^*, f(x^*)]$.*

c) Si $f''(x^*) = 0$, no puede obtenerse una conclusión respecto de la concavidad en x^* ni respecto de la naturaleza del punto crítico. Se necesita otra prueba como la de la primera derivada.

Ejemplo 12 Examine detenidamente la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 20$$

SOLUCIÓN

Deberá reconocerse esta función como una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. También deberá haber un punto crítico que es un máximo relativo. Para confirmar esto, se calcula la primera derivada.

$$f'(x) = -3x + 6$$

Si se hace $f'(x)$ igual a 0,

$$-3x + 6 = 0$$
$$-3x = -6$$

y se tiene un valor crítico cuando

$$x = 2$$

El valor de $f(x)$ cuando $x = 2$ será

$$\begin{aligned} f(2) &= -\tfrac{3}{2}(2^2) + 6(2) - 20 \\ &= -6 + 12 - 20 = -14 \end{aligned}$$

El único punto crítico ocurre en $(2, -14)$.

Haciendo uso de la prueba de la segunda derivada, se obtiene

$$f''(x) = -3$$

y

$$f''(2) = -3 < 0$$

Puesto que la segunda derivada es negativa en $x = 2$, puede extraerse la conclusión de que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en este punto, y el punto crítico será un máximo relativo. En la figura 16.14 se ofrece una gráfica de la función.

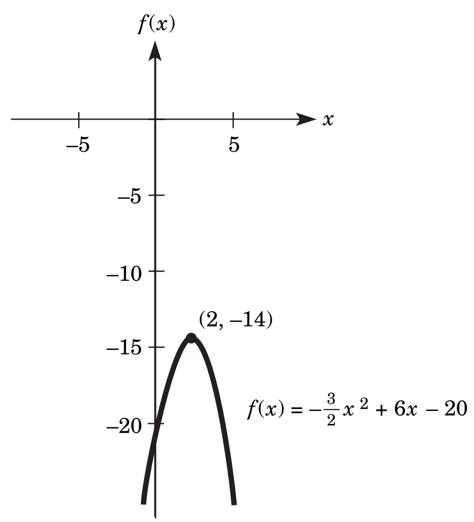


Figura 16.14 Máximo relativo en $(2, -14)$.

Ejemplo 13 Examine la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}$$

SOLUCIÓN

Si se identifica f',

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3}{4} - \frac{18x}{2} \\ &= x^3 - 9x \end{aligned}$$

$f'(x)$ se hace igual a 0 cuando

$$x^3 - 9x = 0$$
$$x(x^2 - 9) = 0$$

o cuando $$x(x + 3)(x - 3) = 0$$

Si los tres factores se hacen igual a 0, se obtienen los valores críticos cuando

$$x = 0 \qquad x = -3 \qquad x = 3$$

Luego de sustituir estos valores críticos en f, se afirma que los puntos críticos aparecen en la gráfica de f en (0, 0), (−3, −81/4) y (3, −81/4).

La segunda derivada será

$$f''(x) = 3x^2 - 9$$

Para probar el punto crítico (0, 0),

$$\begin{aligned} f''(0) &= 3(0^2) - 9 \\ &= -9 < 0 \end{aligned}$$

Puesto que $f''(0)$ es negativa, la función será cóncava hacia abajo en $x = 0$ y se presentará un *máximo relativo* en (0, 0). Para probar el punto crítico (−3, −81/4).

$$\begin{aligned} f''(-3) &= 3(-3)^2 - 9 \\ &= 27 - 9 = 18 > 0 \end{aligned}$$

La gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x = -3$ y un *mínimo relativo* se presenta en (−3, −81/4).

Para probar el punto crítico (3, −81/4),

$$\begin{aligned} f''(3) &= 3(3^2) - 9 \\ &= 27 - 9 = 18 > 0 \end{aligned}$$

La gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x = 3$ y un *mínimo relativo* ocurre en (3, −81/4).

Para resumir, los mínimos relativos ocurren en f en los puntos (−3, −81/4) y (3, −81/4); y un máximo relativo se presenta en (0, 0). La figura 16.15 es un bosquejo de la gráfica de f. ❑

Ejercicio de práctica

En el ejercicio de práctica de la página 788, se solicitó determinar la naturaleza de dos puntos críticos haciendo uso de la prueba de la primera derivada. Utilice la prueba de la segunda derivada para confirmar estos resultados.

Ejemplo 14 Examine la siguiente función en busca de cualquier punto crítico y determine su naturaleza.

$$f(x) = -10\,000e^{-0.03x} - 120x + 10\,000$$

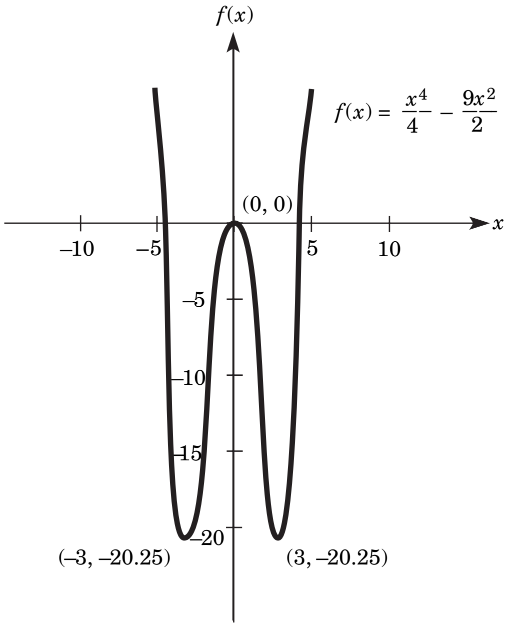


Figura 16.15

SOLUCIÓN

Si se enccuentra f' y se iguala a 0,

$$f'(x) = -10\,000(-0.03)e^{-0.03x} - 120$$
$$= 300e^{-0.03x} - 120$$
$$300e^{-0.03x} - 120 = 0$$

cuando $$300e^{-0.03x} = 120$$

o cuando $$e^{-0.03x} = \tfrac{120}{300} = 0.4$$

Resolviendo para x, se toma el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación.

$$-0.03x = \ln 0.4$$

Por lo tanto, $$-0.03x = -0.9163$$

cuando $$x = -0.9163/-0.03$$

Ocurre un valor crítico cuando $$x = 30.54$$

El único punto crítico se presenta cuando $$x = 30.54$$

Continuando con la prueba de la segunda derivada, se obtiene

$$f''(x) = 300(-0.03)e^{-0.03x}$$
$$= -9e^{-0.03x}$$
$$f''(30.54) = -9e^{-0.03(30.54)}$$
$$= -9e^{-0.9162}$$
$$= -9(0.4)$$
$$= -3.6 < 0$$

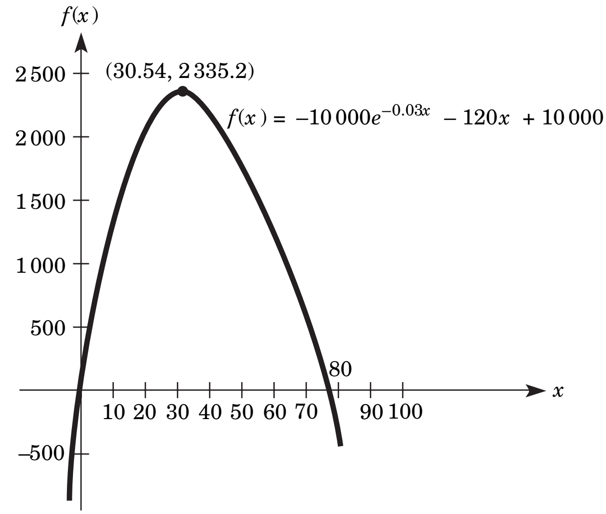


Figura 16.16

Por consiguiente, se presenta un *máximo relativo* cuando $x = 30.54$. El valor correspondiente para $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(30.54) &= -10\,000e^{-0.03(30.54)} - 120(30.54) + 10\,000 \\ &= -10\,000(0.4) - 3\,664.8 + 10\,000 = 2\,335.2 \end{aligned}$$

El máximo relativo se presenta en (30.54, 2 335.2). La figura 16.16 muestra una gráfica de la función. ❑

Cuando falla la prueba de la segunda derivada

Si $f''(x^*) = 0$, la segunda derivada no permite sacar conclusión alguna sobre el comportamiento de f en x^*. Examinemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15 Estudie la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = -x^5$$

SOLUCIÓN

$$f'(x) = -5x^4$$

Al hacer f' igual a 0,

$$-5x^4 = 0$$

cuando $$x = 0$$

Así pues, existe un valor crítico de f cuando $x = 0$ y habrá un punto crítico en (0, 0). Y continuando con la prueba de la segunda derivada, se obtiene

$$f''(x) = -20x^3$$

En $x = 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= -20(0)^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Empleando la prueba de la segunda derivada, no se obtiene conclusión alguna respecto de la naturaleza del punto crítico. Puede utilizarse la prueba de la primera derivada para determinar la naturaleza del punto crítico. Si $x_l = -1$ y $x_r = 1$, entonces

$$\begin{aligned} f'(-1) &= -5(-1)^4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= -5(1)^4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Puesto que $f'(-1)$ y $f''(1)$ son negativas, en $x = 0$ se presenta un punto de inflexión. En la figura 16.17 se da un bosquejo de la gráfica de la función.

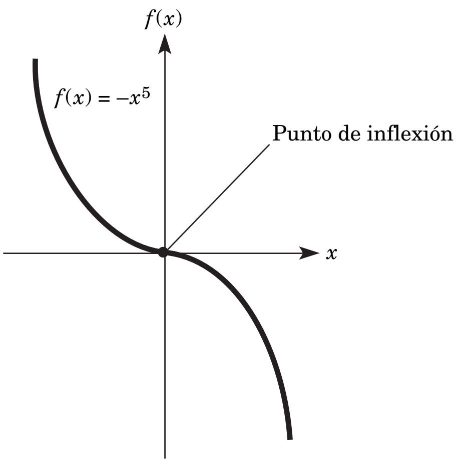


Figura 16.17 ❑

Prueba de la derivada de orden superior (opcional)

Se dispone de varios métodos para llegar a una conclusión acerca de la naturaleza de un punto crítico cuando falla la prueba de la segunda derivada. Uno eficiente, aunque no fácil de comprender intuitivamente, es la ***prueba de la derivada de orden superior***. Con ella siempre se conseguirán resultados concluyentes.

Prueba de la derivada de orden superior

I *Dado un punto crítico $[x^*, f(x^*)]$ en f, encuentre la derivada de orden más bajo cuyo valor sea distinto de cero en el valor crítico x^*. Denote esta derivada como $f^{(n)}(x)$, donde n es el orden de la derivada.*

> **II** *Si el orden n de esta derivada es par, f(x*) es un* ***máximo relativo*** *si* $f^{(n)}(x^*) < 0$, *y un* ***mínimo relativo*** *si* $f^{(n)}(x^*) > 0$.
> **III** *Si el orden n de esta derivada es* ***impar****, el punto crítico es un* ***punto de inflexión****.*

Ejemplo 16 Identifique los puntos críticos y determine su naturaleza si

$$f(x) = (x - 2)^4$$

SOLUCIÓN

Primero calcule f'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x - 2)^3\,(1) \\ &= 4(x - 2)^3 \end{aligned}$$

Si se hace f' igual a 0

$$4(x - 2)^3 = 0$$

cuando $x = 2$

En este valor crítico

$$\begin{aligned} f(2) &= (2 - 2)^4 \\ &= (0)^4 = 0 \end{aligned}$$

Así pues, ocurre un punto crítico en (2, 0).

Para determinar la naturaleza del punto crítico, la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4(3)(x - 2)^2 \\ &= 12(x - 2)^2 \end{aligned}$$

Al hacer la evaluación de f'' en el valor crítico se obtiene,

$$\begin{aligned} f''(2) &= 12(2 - 2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

No hay una conclusión que se base en la prueba de la segunda derivada. Si se sigue empleando la prueba de la derivada de orden superior, la tercera derivada será

$$f'''(x) = 24(x - 2)$$

y $f'''(2) = 24(2 - 2) = 0$

Puesto que $f'''(2) = 0$, no existe una conclusión que se base en la tercera derivada.

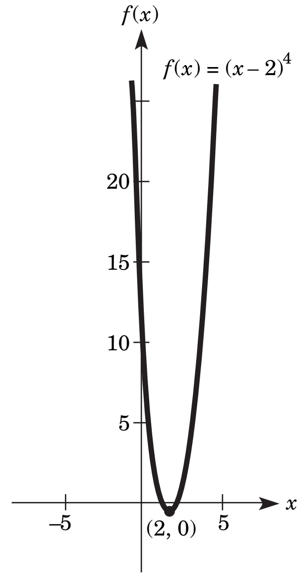


Figura 16.18

La cuarta derivada es

$$f^{(4)}(x) = 24$$

y
$$f^{(4)}(2) = 24$$

Ésta es la derivada de más bajo orden y no es igual a 0 cuando $x = 2$. Puesto que el orden de la derivada ($n = 4$) es par, existe un máximo o mínimo relativo en (2, 0). Para determinar cuál es el caso, se observa el signo de $f^{(4)}(2)$. Como $f^{(4)}(2) > 0$, puede concluirse que hay un mínimo relativo en (2, 0). La figura 16.18 contiene una gráfica de la función. ❑

NOTA La prueba de la segunda derivada es en realidad un caso especial de la prueba de la derivada de orden superior: el caso en que la derivada de orden más bajo distinta de cero es la segunda derivada ($n = 2$).

Ejercicio de práctica

Aplique la prueba de la derivada de orden superior para determinar la naturaleza del punto crítico en el ejemplo 15.

Sección 16.2 Ejercicios de seguimiento

En cada una de las siguientes funciones determine la posición de todos los puntos críticos, así como su naturaleza.

1. $f(x) = 3x^2 - 48x + 100$

2. $f(x) = x^3/3 - 5x^2 + 16x + 100$

3. $f(x) = -10x^3 + 5$

4. $f(x) = x^2 - 8x + 4$

5. $f(x) = x^3/3 - 2.5x^2 + 4x$

6. $f(x) = 5x^3 - 20$

7. $f(x) = 3x^4/4 - 75x^2/2$

8. $f(x) = -x^4/4 + 9x^2/2$

9. $f(x) = -5x^5 - 10$

10. $f(x) = x^5 - 2$

11. $f(x) = -x^2/2 + 6x + 3$

12. $f(x) = -6x^2 - 36x + 10$

13. $f(x) = 4x^2/15 + 4$

14. $f(x) = -x^3/10$

15. $f(x) = 2x^3/3 - x^2/2 - 10x$

16. $f(x) = x^3/3 + 8x^2 + 60x$

17. $f(x) = 4x^5/5 - 324x$

18. $f(x) = -2x^5/5 + 32x$

19. $f(x) = x^3/6 + 2x^2$

20. $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 20x$

21. $f(x) = -2x^2 + x^4/4$

22. $f(x) = -x^4/4 + 8x^2 + 5$

23. $f(x) = 2x^5/5 - x^4/4 - 5x^3$

24. $f(x) = x^5/5 + 3x^4/4 - 4x^3/3$

25. $f(x) = x^5/5 - x$

26. $f(x) = -2x^3 + 10.5x^2 + 12x$

27. $f(x) = x^6/6 - x^2/2 + 2$

28. $f(x) = 4x^3/3 - 6x^2$

29. $f(x) = (x + 10)^4$

30. $f(x) = (2x + 9)^3$

31. $f(x) = -(4x + 2)^3$

32. $f(x) = (2x - 8)^3$

33. $f(x) = -(2x^2 - 8)^4$

34. $f(x) = (x^2 - 16)^3$

35. $f(x) = e^x$

36. $f(x) = e^{-x}$

37. $f(x) = 500e^{-0.10x} + 50x$

38. $f(x) = -45e^{-0.2x} - 18x + 10$

39. $f(x) = e^{2x-5}$

40. $f(x) = -100e^{-0.25x} - 50x$

41. $f(x) = xe^{-x}$

42. $f(x) = -80e^{-0.10x} - 40x$

43. $f(x) = 40e^{-0.05x} + 6x - 10$

44. $f(x) = 20e^{-0.05x} + 4x - 3$

45. $f(x) = 10 + \ln x$

46. $f(x) = \ln x - 0.5x$

47. $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$

48. $f(x) = \ln x - x^2/4$

49. $f(x) = 4x \ln x$

50. $f(x) = x^2 \ln x$

51. $f(x) = \ln 5x - 10x$

52. $f(x) = \ln 24x - x^3$

53. $f(x) = x^2 + x - \ln x$

54. $f(x) = 0.5x^2 + 7x - 30 \ln x$

***55.** $f(x) = x/(x^2 + 1)$

***56.** $f(x) = x(x + 2)^3$

***57.** $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a > 0, b < 0, c > 0$

***58.** $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a < 0, b < 0, c < 0$

***59.** **Prueba de la ecuación original** En la última sección se mencionó que se dispone de otras técnicas para determinar la naturaleza de los puntos críticos. Una de ellas consiste en comparar el valor de $f(x^*)$ con los de $f(x)$ precisamente a la izquierda y la derecha de x^*. Examine detenidamente la figura 16.11 y establezca un conjunto de reglas que permitan distinguir entre las posibilidades de los cuatro puntos críticos.

***60.** Compare las eficiencias relativas asociadas a la realización de la prueba de la ecuación original y la prueba de la primera derivada de los puntos críticos.

***61.** Compare las eficiencias relativas relacionadas con la realización de las pruebas de la primera derivada, la segunda derivada y la derivada de orden superior de los puntos críticos.

***62.** **Cuando falla la prueba de la segunda derivada: una alternativa** Dado un valor crítico determinado cuando $f'(x) = 0$ y la falla de la prueba de la segunda derivada para obtener una conclusión, establezca un conjunto de reglas que lleven a una conclusión basada en la comprobación de las condiciones de concavidad a la izquierda y derecha del valor crítico.

16.3 Trazado de curvas

El trazado de funciones se facilita con la información adquirida en este capítulo. Podemos hacernos una idea de la forma general de la gráfica de una función sin determinar ni trazar numerosos pares ordenados. En la presente sección se explican algunas de las claves fundamentales de la forma de la gráfica de una función y se dan ejemplos de procedimientos para trazar curvas.

Puntos de datos clave

Al determinar la forma general de la gráfica de una función, son fundamentales los siguientes atributos:

- ❑ Máximos y mínimos relativos
- ❑ Puntos de inflexión
- ❑ Intersecciones con los ejes x y y
- ❑ Dirección final

Esto se ejemplifica mediante la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5$$

1. Máximos y mínimos relativos Para localizar los extremos relativos en f se calcula la primera derivada

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

Haciendo f' igual a 0 se obtiene

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

o bien

$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

Los valores críticos se presentan en $x = 2$ y $x = 6$. Si esos valores se sustituyen en f,

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2^3}{3} - 4(2^2) + 12(2) + 5 \\ &= \tfrac{8}{3} - 16 + 24 + 5 = 15\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(6) &= \frac{6^3}{3} - 4(6^2) + 12(6) + 5 \\ &= 72 - 144 + 72 + 5 = 5 \end{aligned}$$

De este modo, existen puntos críticos en $(2, 15\tfrac{2}{3})$ y $(6, 5)$. Una gráfica permite conocer que en estos puntos existen condiciones de pendiente cero, según se advierte en la figura 16.19*a*.

La segunda derivada de f es

$$f''(x) = 2x - 8$$

Para probar la naturaleza del punto crítico $(2, 15\tfrac{2}{3})$,

$$f''(2) = 2(2) - 8 = -4 < 0$$

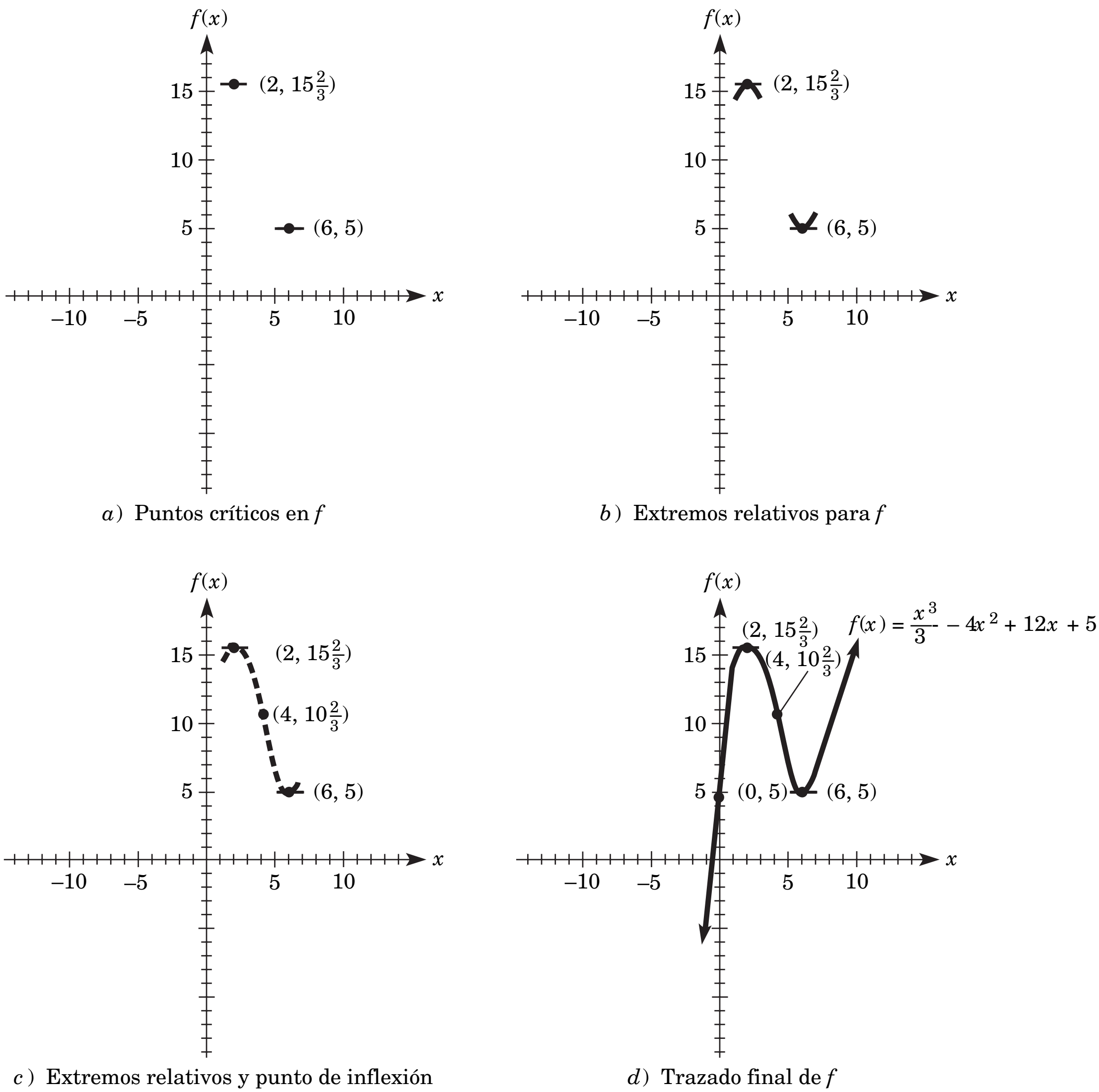


Figura 16.19 Desarrollo del trazado de $f(x) = x^3/3 - 4x^2 + 12x + 5$.

Por consiguiente, un máximo relativo ocurre en $(2, 15\frac{2}{3})$. Para probar la naturaleza del punto crítico (6, 5),

$$\begin{aligned} f''(6) &= 2(6) - 8 \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en (6, 5) se presenta un mínimo relativo. La información adquirida hasta ahora permite obtener el trazado de f en el grado mostrado en la figura 16.19*b*.

2. Puntos de inflexión Se encuentran candidatos a puntos de inflexión cuando f'' se hace igual a 0, o bien cuando

$$2x - 8 = 0$$

o

$$x = 4$$

Si se sustituye $x = 4$ en f, se puede afirmar que el único candidato a un punto de inflexión ocurre en $(4, 10\frac{1}{3})$. Y *sin* verificar el signo de f'' a la izquierda y la derecha de $x = 4$, puede llegarse a la conclusión de que el punto $(4, 10\frac{1}{3})$ es el único punto de inflexión en la gráfica de f. Ello obedece a que *debe haber* un punto de inflexión entre el máximo relativo en $(2, 15\frac{2}{3})$ y el mínimo relativo en $(6, 5)$. *Para una función continua, la concavidad de la función debe cambiar entre los puntos críticos adyacentes*. El único candidato está entre los dos puntos críticos; por lo tanto, debe ser un punto de inflexión. La información adquirida hasta aquí permite mejorar el trazado de f, como se aprecia en la figura 16.19*c*.

3. Intersecciones con los ejes La intersección con el eje y es un punto fácil de localizar. En este caso

$$f(0) = 5$$

La intersección con el eje y se presenta en $(0, 5)$.

Según la función de que se trate, las intersecciones con el eje x pueden o no ser fáciles de encontrar. En esta función resultarán bastante difíciles de identificar. En nuestro trazado de f no infÏluirá mucho el hecho de conocer la localización exacta de una intersección con el eje x que existe para f.

4. Dirección final Para f, el término de mayor potencia es $x^3/3$. Para determinar el comportamiento de f a medida que x se torne más positiva, es preciso observar el comportamiento de $x^3/3$ cuando x va haciéndose más positiva. A medida que

$$x \to +\infty \qquad \frac{x^3}{3} \to +\infty$$

Por lo tanto, a medida que

$$x \to +\infty \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5 \to +\infty$$

De manera análoga, a medida que

$$x \to -\infty \qquad \frac{x^3}{3} \to -\infty$$

y

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5 \to -\infty$$

La figura 16.19*d* incorpora las intersecciones con los ejes y las direcciones finales al trazado de la curva.

Ejemplo 17 **(Escenario de motivación)** Trace la gráfica de la función

$$f(4) = \frac{x^4}{4} - \frac{8(4^3)}{3} + 8(4$$

SOLUCIÓN

1. Máximos y mínimos relativos Para localizar los extremos relativos de f se obtiene la primera derivada:

$$f'(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$$

Al hacer f' igual a 0 se obtiene

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

$$x(x^2 - 8x + 16) = 0$$

o bien

$$x(x - 4)(x - 4) = 0$$

Si los factores se hacen igual a 0, los valores críticos se obtienen en $x = 0$ y $x = 4$. Los valores correspondientes de $f(x)$ son

$$f(0) = 0$$

y

$$f(4) = \frac{x^4}{4} - \frac{8(4^3)}{3} + 8(4^2)$$

$$= 64 - 170\tfrac{2}{3} + 128 = 21\tfrac{1}{3}$$

Por lo tanto, los puntos críticos ocurren en (0, 0) y $(4, 21\frac{1}{3})$.

Probando $x = 0$, se obtiene

$$f''(x) = 3x^2 - 16x + 16$$

y

$$f''(0) = 16 > 0$$

Un mínimo relativo ocurre en (0, 0).

Al probar $x = 4$,

$$f''(4) = 3(4)^2 - 16(4) + 17$$

$$= 48 - 64 + 16 = 0$$

No puede extraerse conclusión alguna sobre $x = 4$ que se base en la segunda derivada. Continuando con la prueba de la derivada de orden superior,

$$f'''(x) = 6x - 16$$

y

$$f'''(4) = 6(4) - 16$$

$$= 8 > 0$$

Puesto que el orden de la derivada es impar, un punto de inflexión ocurre en $(4, 21\frac{1}{3})$.

2. Puntos de inflexión Los candidatos a puntos de inflexión se encuentran al hacer f'' igual a 0, o cuando

$$3x^2 - 16x + 16 = 0$$
$$(3x - 4)(x - 4) = 0$$
$$x = \tfrac{4}{3} \quad \text{y} \quad x = 4$$

Ya hemos verificado que un punto de inflexión ocurre en $(4, 21\frac{1}{3})$. Confirme que $(\frac{4}{3}, 8.69)$ es también un punto de inflexión.

3. Intersecciones con los ejes Cuando se calcula $f(0) = (0)^4/4 - 8(0)^3/3 + 8(0)^2 = 0$, se llega a la conclusión de que la interacción con el eje y ocurre en (0, 0). Para localizar las intersecciones con el eje x,

$$\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 8x^2 = 0$$

cuando
$$x^2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{8x}{3} + 8\right) = 0$$

Una raíz de esta ecuación es $x = 0$, lo cual indica que una intersección con el eje x se encuentra en (0, 0) (antes debimos observar que la intersección con el eje y es al mismo tiempo una intersección con el eje x). Mediante la fórmula cuadrática verifique que no haya raíces para la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{8x}{3} + 8 = 0$$

Para f, el punto (0, 0) representa la única intersección con los ejes.

4. Dirección final El comportamiento final de $f(x)$ está ligado al del término $x^4/4$. A medida que

$$x \to +\infty \qquad \frac{x^4}{4} \to +\infty \quad \text{y} \quad f(x) \to +\infty$$

Conforme a
$$x \to -\infty \qquad \frac{x^4}{4} \to +\infty \quad \text{y} \quad f(x) \to +\infty$$

Con la información recabada, podemos trazar la forma aproximada de f como se aprecia en la figura 16.20. ❑

Sección 16.3 Ejercicios de seguimiento

Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.

1. $f(x) = x^3/3 - 5x^2 + 16x - 100$
2. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
3. $f(x) = x^4/4 - 25x^2/2$
4. $f(x) = x^3/3 - 2.5x^2 + 4x$
5. $f(x) = (6x - 12)^3$
6. $f(x) = x^6/6 - 8x^2 - 10$
7. $f(x) = -(x - 5)^3$
8. $f(x) = (x^2 - 16)^4$

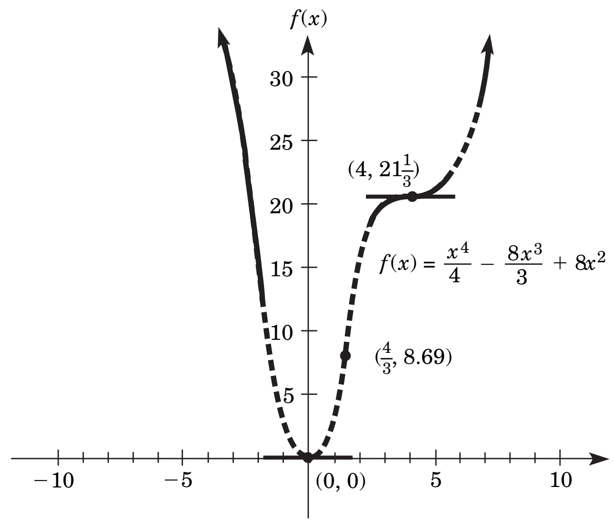


Figura 16.20

9. $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 - 30x$
10. $f(x) = -(x-2)^4$
11. $f(x) = -5x^5 + 100$
12. $f(x) = x^5 - 25$
13. $f(x) = 2x^3/3 + x^2/2 - 10x$
14. $f(x) = x^3/3 - 8x^2 + 60x$
15. $f(x) = -4x^5/5 + 324x - 250$
16. $f(x) = 2x^5/5 - 32x$
17. $f(x) = -e^{-x} - 10x$
18. $f(x) = x^4/4 - 9x^2/2$
19. $f(x) = \ln(x^2 + 25)$
20. $f(x) = x^3/3 - 3.5x^2 - 30x$

16.4 Consideraciones del dominio restringido

En esta sección se examinarán los métodos que ayuden a identificar los máximos y mínimos absolutos cuando el dominio de una función está restringido.

Cuando el dominio está restringido

Con mucha frecuencia, en los problemas aplicados el dominio está restringido. Por ejemplo, si la utilidad P se expresa en función del número de unidades producidas x, es probable que x esté restringida a valores como $0 \leq x \leq x_u$. En este caso x está restringida a valores no negativos (no se producen cantidades negativas), los cuales son menores o iguales a algún límite superior x_u. El valor de x_u puede reflejar la capacidad de producción, definida por escasa mano de obra, pocas materias primas o por la capacidad física de la planta.

En la búsqueda del máximo o mínimo absoluto de una función habrá que tener en cuenta no sólo los máximos y mínimos relativos de ella, sino también los ***puntos finales*** de su dominio. Por ejemplo, observe la función graficada en la figura 16.21. Nótese que el dominio de la función está restringido a valores comprendidos entre 0 y x_u y que el máximo absoluto de f ocurre en x_u, el punto final derecho del dominio. El mínimo absoluto se presenta en x_2, que es también un mínimo relativo en la función. En seguida se describe el procedimiento para identificar los extremos absolutos.

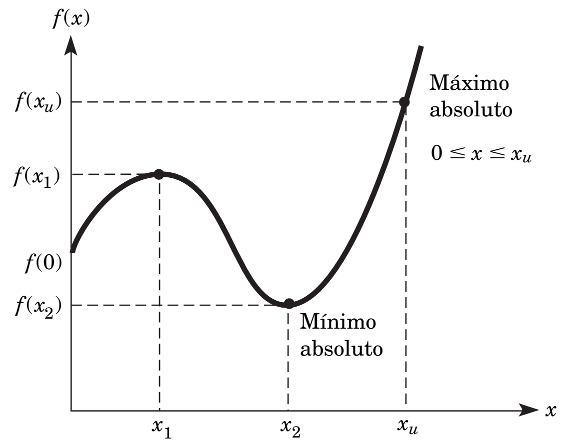


Figura 16.21

Procedimiento para identificar los puntos de máximo y mínimo absolutos

Dada la función continua f definida sobre el intervalo cerrado $[x_l, x_u]$:

I *Localice todos los puntos críticos $[x^*, f(x^*)]$ que estén dentro del dominio de la función.*[1] *Prescinda de los valores críticos de x^* que se encuentren fuera del dominio.*

II *Calcule los valores de $f(x)$ en los dos puntos finales del dominio $[f(x_l)$ y $f(x_u)]$.*

III *Compare los valores de $f(x^*)$ para todos los puntos críticos relevantes con $f(x_l)$ y $f(x_u)$. El máximo absoluto es el mayor de estos valores. El mínimo absoluto es el menor de ellos.*

Ejemplo 18 Determine las localizaciones y valores del máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + 5$$

donde $2 \leq x \leq 10$.

SOLUCIÓN

❑ **Paso I.** La primera derivada es

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} - \frac{14x}{2} + 6$$
$$= x^2 - 7x + 6$$

[1] Recuérdese que los puntos críticos satisfacen la condición $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida.

Si se hace f' igual a 0,

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

o bien

$$(x - 6)(x - 1) = 0$$

Por lo tanto,

$$x = 6 \quad \text{y} \quad x = 1$$

El único valor crítico *dentro del dominio* de la función es $x = 6$.

$$\begin{aligned} f(6) &= \frac{6^3}{3} - \frac{7(6^2)}{2} + 6(6) + 5 \\ &= 72 - 126 + 36 + 5 = -13 \end{aligned}$$

En consecuencia, un punto crítico ocurre en $(6, -13)$.

Para probar $x = 6$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x - 7 \\ f''(6) &= 2(6) - 7 \\ &= 5 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $f''(6) > 0$, un mínimo relativo se presenta en $(6, -13)$. Dado que $f'(x)$ se define para todas las x reales, no existen otros valores críticos.

❑ **Paso II.** Los valores de $f(x)$ en los puntos finales del dominio son

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2^3}{3} - \frac{7(2^2)}{2} + 6(2) + 5 \\ &= \tfrac{8}{3} - 14 + 12 + 5 = 5\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(10) &= \frac{(10)^3}{3} - \frac{7(10)^2}{2} + 6(10) + 5 \\ &= \frac{1\,000}{3} - \frac{700}{2} + 65 = 48\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

❑ **Paso III.** Al comparar $f(2)$, $f(6)$ y $f(10)$ se observa que el mínimo absoluto de -13 ocurre cuando $x = 6$ y que el máximo absoluto de $48\frac{1}{3}$ se presenta cuando $x = 10$. La figura 16.22 muestra una gráfica de la función. ❑

Sección 16.4 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios determine las localizaciones y valores del máximo y mínimo absolutos de f.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, donde $2 \le x \le 8$
2. $f(x) = -x^2 + 8x - 100$, donde $-2 \le x \le 4$
3. $f(x) = x^3 - 12x^2$, donde $2 \le x \le 10$

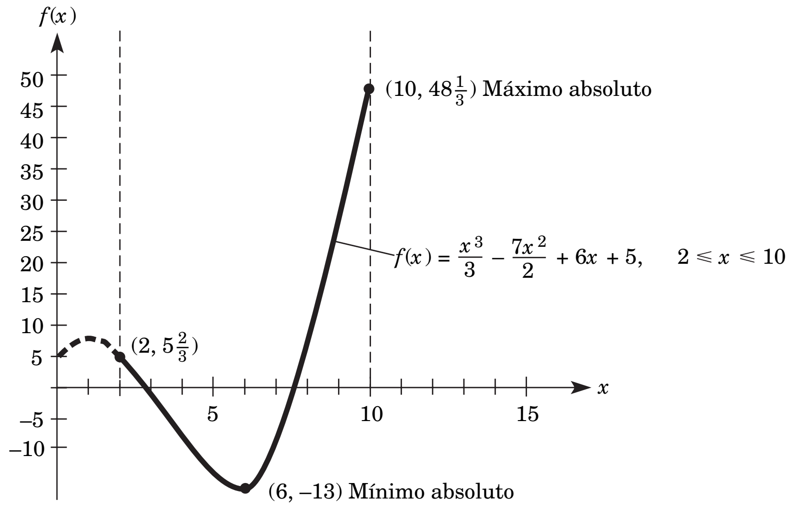


Figura 16.22

4. $f(x) = -2x^3 - 15x^2 + 10$, donde $-6 \leq x \leq +2$
5. $f(x) = x^5/5 - x - 25$, donde $3 \leq x \leq 8$
6. $f(x) = x^5/5 - 3x^4/4 + 2x^3/3 - 20$, donde $0 \leq x \leq 5$
7. $f(x) = x^6/6 - x^5 + 2.5x^4$, donde $0 \leq x \leq 4$
8. $f(x) = x^3 + 10$, donde $1 \leq x \leq 5$
9. $f(x) = -4x^2 + 6x - 10$, donde $0 \leq x \leq 10$
10. $f(x) = x^3/3 - x^2/2 - 6x$, donde $0 \leq x \leq 5$
11. $f(x) = x^4/4 - 4x^2 + 16$, donde $5 \leq x \leq 10$
12. $f(x) = x^4/4 - 7x^3/3 + 5x^2$, donde $0 \leq x \leq 4$
13. $f(x) = x^5/5 - 5x^4/4 - 14x^3/3 - 10$, donde $0 \leq x \leq 6$
14. $f(x) = x^4/4 - 8x^2 + 25$, donde $x \geq 0$
15. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$, donde $-1 \leq x \leq 4$
16. $f(x) = x^{2/3}$, donde $0 \leq x \leq 4$
17. $f(x) = x^{1/2}$, donde $4 \leq x \leq 16$
18. $f(x) = (x - 2)^{1/3}$, donde $0 \leq x \leq 10$

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 16.1

Para los siguientes ejercicios, determine los intervalos sobre los cuales f es: *a*) creciente; *b*) decreciente; *c*) ni creciente ni decreciente; *d*) cóncava hacia arriba, y *e*) cóncava hacia abajo.

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 8$
2. $f(x) = 20 - 4x + x^2$
3. $f(x) = x^3 - 27x$
4. $f(x) = 2x^5$
5. $f(x) = b$
6. $f(x) = 5x^2 - 20x + 100$
7. $f(x) = 4x^2 - 2x + 6$
8. $f(x) = x^3/3 - x^2 + x - 5$
9. $f(x) = x^3/3 + 2x^2 + 4x$
10. $f(x) = (x - 5)^4$
11. $f(x) = (x + 3)^5$
12. $f(x) = (2x - 8)^3$

Para los ejercicios siguientes, identifique las coordenadas de cualquier punto de inflexión.

13. $f(x) = -x^5$
14. $f(x) = 3x^4/2$
15. $f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 150$
16. $f(x) = x^4/12 + x^3 + 4x^2$
17. $f(x) = x^5/20 - x^3/6$
18. $f(x) = (x + 4)^3$
19. $f(x) = (x - 1)^5$
20. $f(x) = x^4/12 + x^3/6 - 3x^2 + 120$
21. $f(x) = x^3/6 - x^2 + 9$
22. $f(x) = x^6$
23. $f(x) = x^4/6 + 5x^3 + 12x^2 - 4$
24. $f(x) = 2x^6 - x^5$
25. $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$
26. $f(x) = (2x - 7)^4$

SECCIÓN 16.2

Para los siguientes ejercicios, determine la posición de todos los puntos críticos, así como su naturaleza.

27. $f(x) = 2x^2 - 16x + 30$
28. $f(x) = -x^2/2 + 8x + 7$
29. $f(x) = 4x^4$
30. $f(x) = x^4 - 25x^2/2$
31. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 40$
32. $f(x) = -2x^3 + 3x^2/2 + 3x + 1$
33. $f(x) = x^5 - x^4 - x^3/3$
34. $f(x) = (-x + 2)^6$
35. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 10$
36. $f(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2 + 80$
37. $f(x) = 2x + 50/x$
38. $f(x) = 96\sqrt{x} - 6x$
39. $f(x) = 3x^3 - x^2/2 + 5x$
40. $f(x) = 5x^3 - x^2 + 12x$
41. $f(x) = (2x - 5)^4$
42. $f(x) = (x + 5)^3$
43. $f(x) = (x + 4)^5$
44. $f(x) = (3x - 9)^4$
45. $f(x) = x^4/4 + x^3 + x^2 + 5$
46. $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 9$
47. $f(x) = 30x - e^x$
48. $f(x) = 2.5x + e^{-0.5x}$
49. $f(x) = e^{(x - 0.2x^2)}$
50. $f(x) = 40x - e^{0.1x} + 50$
51. $f(x) = 10x - e^{0.2x}$
52. $f(x) = e^{(2 - 0.1x^2)}$
53. $f(x) = 40x - e^{2x}$
54. $f(x) = 3.5x - e^{1.5x}$
55. $f(x) = \ln 50x - 15x$
56. $f(x) = 8x^2 \ln x$
57. $f(x) = 80x - 20 \ln x$
58. $f(x) = 0.5x^2 - 4x - 5 \ln x + 50$
59. $f(x) = 45x - 5 \ln x$
60. $f(x) = \ln 20x - 2x$

SECCIÓN 16.3

Trace las gráficas de las funciones siguientes.

61. $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 + 12x$
62. $f(x) = (10 - x)^3$
63. $f(x) = (x + 5)^3$
64. $f(x) = 2x^5/5 + x^4/4 - x^3 + 1$
65. $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 9$
66. $f(x) = x^4/4 + x^3 + x^2 + 5$
67. $f(x) = (x + 3)^3$
68. $f(x) = x^4 - 25x^2/2$

SECCIÓN 16.4

En las funciones siguientes, determine la localización y valores del mínimo y máximo absolutos.

69. $f(x) = 3x^2 - 48x + 30$, donde $0 \leq x \leq 10$
70. $f(x) = 2x^2 - 5x + 15$, donde $-1 \leq x \leq 4$
71. $f(x) = 2x^3/3 + 3x^2 + 4x - 1$, donde $-3 \leq x \leq 5$
72. $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 - 30x$, donde $0 \leq x \leq 10$
73. $f(x) = 2x^5/5 - 27x^2$, donde $-2 \leq x \leq 3$
74. $f(x) = -x^6 + x^4 + 2x^3/3$, donde $-2 \leq x \leq 4$
75. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5.5x^2 + 6$, donde $-1 \leq x \leq 1$
76. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, donde $-3 \leq x \leq 5$
77. $f(x) = -2x^3 + 3x^2/2 + 3x + 1$, donde $-2 \leq x \leq 4$
78. $f(x) = (-x + 2)^4$, donde $0 \leq x \leq 3$

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dada $f(x) = x^3/3 - 3x^2 - 40x$, determine los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente, *c*) ni creciente ni decreciente.

2. Trace una parte de una función para la cual: *a*) $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$, y *b*) $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$.

3. Para los siguientes ejercicios, determine la posición de todos los puntos críticos, así como su naturaleza.

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 21x + 5$

b) $f(x) = e^{-x^2+3}$

4. Dada

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - 4x^2$$

identifique las posiciones de todos los puntos de inflexión.

5. Determine las localizaciones y valores del mínimo y del máximo absolutos para

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - 10, \qquad -2 \leq x \leq 3$$

6. Trace la función $f(x) = (x + 4)^5$.