CAPÍTULO 18

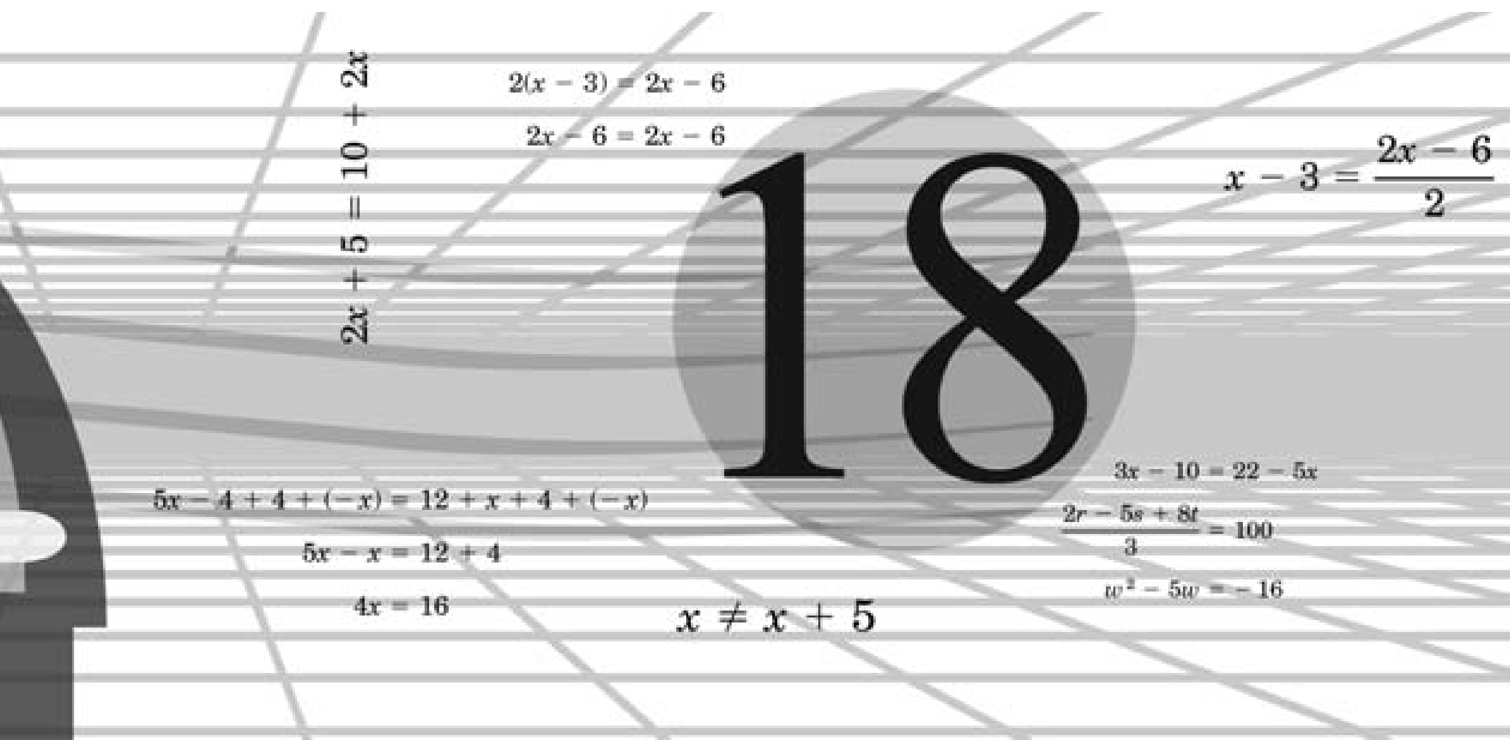
Cálculo integral: una introducción

18.1 ANTIDERIVADAS
18.2 REGLAS DE LA INTEGRACIÓN
18.3 REGLAS ADICIONALES DE INTEGRACIÓN
18.4 OTRAS TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN
18.5 ECUACIONES DIFERENCIALES

Términos y conceptos clave
Fórmulas importantes
Ejercicios adicionales
Evaluación del capítulo

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Introducción a la naturaleza y métodos del cálculo integral.
- Ofrecer algunas reglas de la integración y ejemplos de su uso.
- Dar ejemplos de otros métodos de integración que puedan ser apropiados cuando no lo sean las reglas básicas.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Costo marginal

En el capítulo 17 se definió el costo marginal como el costo adicional en que se incurre como resultado de producir y vender una unidad más de un producto o servicio. También se determinó que dada la función de costo total $C = f(q)$, la función de costo marginal es la derivada de la función de costo total, o $MC = f'(q)$. Suponga que se tiene la función

$$MC = x + 100$$

donde x es igual al número de unidades producidas. También se sabe que el costo total es igual a $40 000 cuando $x = 100$. *Lo que se desea es determinar la función de costo total* $C = f(x)$ (ejemplo 5).

En este capítulo se abordará una segunda e importantísima área de estudio del cálculo: el *cálculo integral.* Según se mencionó al inicio del capítulo 15, el cálculo diferencial es útil para estudiar las razones de cambio y las pendientes de tangentes. Un aspecto fundamental del cálculo integral es determinar las áreas que se encuentran entre curvas y otras fronteras definidas. Asimismo, si se conoce la derivada de una función, con el cálculo integral podrá obtenerse la función original.

Al iniciar esta nueva área de estudio, conviene saber hacia dónde nos dirigimos. En primer lugar, el cálculo integral abarca un campo fundamental de estudio dentro del cálculo. A este material se dedican dos capítulos. Con ello se pretende ofrecer al lector un panorama general de una disciplina para que conozca los aspectos y los métodos del cálculo integral, cómo se relaciona éste con el cálculo diferencial y en qué casos se aplica.

En este capítulo se tratará primero la naturaleza del cálculo integral al relacionarlo con las derivadas. Del mismo modo que se cuenta con reglas para calcular las derivadas en el cálculo diferencial, también existen para obtener las *integrales* en el cálculo integral. Las reglas de mayor uso se describirán en las secciones 18.2 y 18.3. En la sección 18.4 se analizan los procedimientos con que se calculan las integrales cuando no son aplicables las reglas mencionadas en las secciones 18.2 y 18.3. Por último, en la sección 18.5 se explican las ecuaciones diferenciales. El capítulo 19 se centrará en las aplicaciones del cálculo integral.

18.1 Antiderivadas

El concepto de la antiderivada

Dada una función f, ya se sabe calcular la derivada f'. Puede haber ocasiones en que se conozca la derivada f' y se quiera encontrar la función original f. Puesto que el proceso de determinar la función original es el opuesto al de la diferenciación, se dice que f es una ***antiderivada*** de f'.

Considérese la derivada

$$f'(x) = 4 \tag{18.1}$$

Al utilizar el método de tanteo, no resulta muy difícil concluir que la función

$$f(x) = 4x \tag{18.2}$$

tiene una derivada de la forma de la ecuación (18.1). He aquí otra función que tiene la misma derivada:

$$f(x) = 4x + 1$$

De hecho, cualquier función que tenga la forma

$$f(x) = 4x + C \tag{18.3}$$

donde C es cualquier constante, tendrá también la misma derivada. Así pues, con la derivada de la ecuación (18.1), la conclusión será que la función original pertenecía a la *familia* de funciones caracterizadas por la ecuación (18.3). Esa familia es un conjunto de funciones lineales cuyos miembros tienen una pendiente de $+4$, pero diferentes intersecciones C con el eje y. La figura 18.1 contiene algunos miembros de esa familia de funciones.

Puede afirmarse también que la función

$$f(x) = 4x + C$$

es la *antiderivada* de

$$f'(x) = 4$$

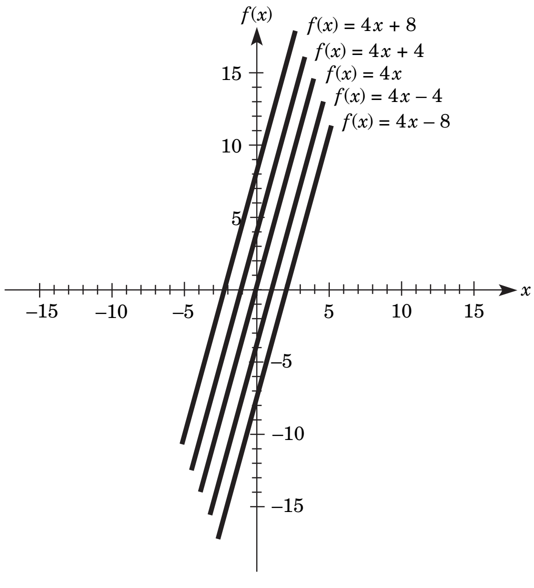


Figura 18.1

Ejemplo 1 Encuentre la antiderivada de $f'(x) = 0$.

SOLUCIÓN

Se sabe que la derivada de cualquier función constante es 0. Por consiguiente, la antiderivada es $f(x) = C$.

Ejemplo 2 Encuentre la antiderivada de $f'(x) = 2x - 5$.

SOLUCIÓN

Al aplicar el método de tanteo y al trabajar con cada término por separado, debería llegarse a la conclusión de que la antiderivada es

$$f(x) = x^2 - 5x + C$$ ❑

> **NOTA** Una comprobación fácil de la antiderivada f consiste en diferenciarla y determinar f'.

Con información complementaria quizá sea posible determinar la función precisa de dónde se dedujo f'. Supóngase en el ejemplo original que se dice que $f(x) = 4$ *y* un punto en la función original es (2, 6). Puesto que las coordenadas en este punto deben satisfacer la ecuación de la función original, puede resolverse para el valor específico C al sustituir $x = 2$ y $f(x) = 6$ en la ecuación (18.3), o bien

$$f(x) = 4x + C$$

$$6 = 4(2) + C$$

$$-2 = C$$

Por lo tanto, el miembro específico de la familia de funciones caracterizadas por la ecuación (18.3) es

$$f(x) = 4x - 2$$

Ejemplo 3 En el ejemplo 1, suponga que un punto en la función f sea $(-2, 5)$. Determine la función específica de la que se obtuvo f'.

SOLUCIÓN

La antiderivada que describe la familia de posibles funciones era

$$f(x) = C$$

La sustitución de $x = -2$ y $f(x) = 5$ en esta ecuación da

$$5 = C$$

Por lo tanto, la función específica es $f(x) = 5$.

Ejemplo 4 En el ejemplo 2, suponga que un punto en la función f sea (2, 20). Determine la función específica de donde se derivó f'.

SOLUCIÓN

La antiderivada que describe la familia de posibles funciones era

$$f(x) = x^2 - 5x + C$$

Si se sustituye $x = 2$ y $f(x) = 20$ en esta ecuación, se obtiene

$$20 = 2^2 - 5(2) + C$$

$$20 = -6 + C$$

$$26 = C$$

Así pues, la función original será

$$f(x) = x^2 - 5x + 26$$ ❑

Funciones de ingreso y costo

En el capítulo 17 se explicó el *enfoque marginal* con el cual se obtiene el nivel de producción que maximiza las utilidades. Se señaló que una expresión del ingreso marginal (*MR*) es la derivada de la función de ingreso total, donde la variable independiente es el nivel de producción. De manera semejante, se afirmó que una expresión del costo marginal (*MC*) es la derivada de la función del costo total. Si se tiene una expresión del ingreso o del costo marginal, las antiderivadas respectivas serán las funciones del ingreso y costo totales.

Ejemplo 5 **(Costo marginal; escenario de motivación)** La función que describe el costo marginal de fabricar un producto es

$$MC = x + 100$$

donde x es el número de unidades producidas. Se sabe también que el costo total es \$40 000, cuando $x = 100$. Determine la función de costo total.

SOLUCIÓN

Para determinar la función de costo total, primero se encuentra la antiderivada de la función de costo marginal, es decir,

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + C \qquad \textbf{(18.4)}$$

Dado que $C(100) = 40\,000$, se puede despejar el valor de C, que resulta para representar el costo fijo.

$$40\,000 = \frac{(100)^2}{2} + 100(100) + C$$

$$40\,000 = 5\,000 + 10\,000 + C$$

o bien

$$25\,000 = C$$

La función específica que representa el costo total de fabricar el producto es

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + 25\,000$$

Ejemplo 6 **(Ingreso marginal)** La función de ingreso marginal para el producto de una compañía es

$$MR = 50\,000 - x$$

donde x es el número de unidades producidas y vendidas. Si el ingreso total es 0 cuando no se vende ninguna unidad, determine la función de ingreso total del producto.

SOLUCIÓN

Dado que la función del ingreso marginal es la derivada de la función del ingreso total, esta última será la antiderivada del ingreso marginal. Al aplicar el método de tanteo se obtiene

$$R(x) = 50\,000x - \frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(18.5)}$$

Puesto que se sabe que $R(0) = 0$, la sustitución de $x = 0$ y $R = 0$ en la ecuación (18.5) da

$$0 = 50\,000(0) - \frac{0^2}{2} + C$$

o bien

$$0 = C$$

Por lo tanto, la función de ingreso total del producto de la compañía es

$$R(x) = 50\,000x - \frac{x^2}{2}$$

❑

Sección 18.1 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 30, encuentre la antiderivada de la función dada.

1. $f'(x) = 80$
2. $f'(x) = -50$
3. $f'(x) = \frac{1}{5}$
4. $f'(x) = \sqrt{70}$
5. $f'(x) = 3x$
6. $f'(x) = -6x$
7. $f'(x) = x^2/2$
8. $f'(x) = x^2$
9. $f'(x) = x^4$
10. $f'(x) = x^3/3$
11. $f'(x) = x^2 - 4x$
12. $f'(x) = x^3 + x^2 + 6x$
13. $f'(x) = x^2 + 8x + 10$
14. $f'(x) = x^5$

15. $f'(x) = 9x^2 + 10x$

16. $f'(x) = 6x^2 + 2x + 20$

17. $f'(x) = 3x^2 + 18x + 12$

18. $f'(x) = 18x^2 - 10x - 100$

19. $f'(x) = 8x^3 - 6x^2$

20. $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$

21. $f'(x) = 12x^3 - 9x^2 + 3$

22. $f'(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$

23. $f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 6$

24. $f'(x) = 20x^4 + 8x^3 - 4x$

25. $f'(x) = 30x^4 - 2x^3 + 8x - 5$

26. $f'(x) = 15x^4 - 6x^3 + 2x - 8$

27. $f'(x) = x^3/2$

28. $f'(x) = \sqrt{2}x^3$

29. $f'(x) = -18x^5 + 9x^2 - 10x$

30. $f'(x) = 36x^5 - 15x^4 + 3x^2$

En los ejercicios 31 a 50, determine f si se conoce f' y un punto que satisfaga f.

31. $f'(x) = 20, (1, 20)$

32. $f'(x) = -8x + 2, (2, 10)$

33. $f'(x) = 10x, (-2, 10)$

34. $f'(x) = x^2, (-4, 26)$

35. $f'(x) = 4x^3, (2, 15)$

36. $f'(x) = -2x^3, (6, 10)$

37. $f'(x) = -x^2 + 4x, (3, 45)$

38. $f'(x) = x^2 + 2x - 3, (-3, 8)$

39. $f'(x) = 6x^2 + 8x, (2, -20)$

40. $f'(x) = 5x^4, (-5, 48)$

41. $f'(x) = 9x^2 + 2x, (-2, 2)$

42. $f'(x) = 9x^2 - 4x + 2, (-8, -20)$

43. $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x, (3, 80)$

44. $f'(x) = x^3 - x^2 + x + 3, (-1, 0)$

45. $f'(x) = 8x^3 - 3x^2, (2, 8)$

46. $f'(x) = 5x^4 - 6x^2, (5, 140)$

47. $f'(x) = -4x^3 - 12x, (-5, 40)$

48. $f'(x) = -8x^3 + 6x^2, (-6, 28)$

49. $f'(x) = 6x^5 - 3x^2, (1, 10)$

50. $f'(x) = 10 - x + x^2, (2, -7)$

51. La función de ingreso marginal del producto de una compañía es

$$MR = 40\,000 - 4x$$

donde x es el número de unidades vendidas. Si el ingreso total es 0 cuando no se venden unidades, determine la función de ingreso total del producto.

52. La función que describe el costo marginal (en dólares) de la producción de un artículo es

$$MC = 8x + 800$$

donde x indica el número de unidades producidas. Se sabe que el costo total es de \$80 000 cuando se fabrican 40 unidades. Calcule la función de costo total.

53. La función que describe la *utilidad marginal* lograda al producir y vender un producto es

$$MP = -6x + 450$$

donde x es el número de unidades y MP es la utilidad marginal medida en dólares. Cuando se producen y venden 100 unidades, la *utilidad total* es \$5 000. Encuentre la función de utilidad total.

54. La función que describe la utilidad marginal lograda con la fabricación y venta de un producto es

$$MP = -3x + 500$$

donde x es el número de unidades y MP es la utilidad marginal medida en dólares. Cuando se producen y venden 200 unidades, la utilidad total es de \$15 000. Determine la función de utilidad total.

18.2 Reglas de la integración

Por fortuna no es preciso recurrir a un método de tanteo cuando se quiere encontrar una antiderivada. Como en el caso de la diferenciación, se ha ideado un conjunto de reglas que permite calcular las antiderivadas. Si una función presenta una forma determinada, tal vez se disponga de una regla para determinar fácilmente su antiderivada.

Integración

El proceso de encontrar las antiderivadas suele recibir el nombre de ***integración***. Y la familia de funciones obtenidas mediante ese proceso se llama ***integral indefinida***. La notación

$$\int f(x)\, dx \tag{18.6}$$

se emplea con frecuencia para indicar la integral indefinida de la función f. El símbolo $\int$ es el ***signo de integral***; f es el ***integrando***, o sea la función cuya integral indefinida se desea obtener; y dx, tal como se considera aquí, denota la variable respecto de la cual se realiza el proceso de integración. Dos descripciones verbales del proceso indicadas por la ecuación (18.6) son "integrar la función f respecto de la variable x" y "encontrar la integral indefinida de f respecto de x".

NOTA No olvide que calcular una integral indefinida es lo mismo que obtener una antiderivada.

En el ejemplo 2 se observó que la antiderivada de $2x - 5$ es $x^2 - 5x + C$. Puede denotarse esto usando la notación integral, como

$$\boxed{\int (2x - 5)\, dx = x^2 - 5x + C}$$

A continuación se da una definición más formal de la integral indefinida.

Definición: Integral definida

Dado que f es una función continua,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{18.7}$$

si $F'(x) = f(x)$.

En la definición anterior, C se conoce como la ***constante de integración***. Una vez más, C refleja la naturaleza indefinida de obtención de la antiderivada o integral indefinida.

Reglas de la integración

A continuación se da un conjunto de reglas que permiten calcular la integral indefinida de algunas funciones comunes en las aplicaciones a la administración y la economía.

Regla 1: Funciones constantes

$$\int k\,dx = kx + C$$

donde k es una constante cualquiera.

El ejemplo 7 ilustra esta regla.

Ejemplo 7

a) $\int (-2)\,dx = -2x + C$

b) $\int \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}x + C$

c) $\int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x + C$

d) $\int 0\,dx = (0)x + C = C$ ❑

Regla 2: Regla de la potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Esta regla es análoga a la regla de la diferenciación basada en la potencia. *Nótese que esta regla no es válida cuando $n = -1$.* Más adelante nos ocuparemos de esta excepción. En su forma verbal, la regla establece que, si el integrando es x elevada a una potencia de valor real, el exponente de x se aumenta en 1, se divide entre el nuevo exponente y se suma la constante de integración. El ejemplo 8 ofrece varias ilustraciones de esta regla.

Ejemplo 8

a) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

c) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

d) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$ ❑

NOTA No olvide el mecanismo intrínseco de verificación. Su aplicación requiere unos cuantos segundos y con él pueden evitarse los errores atribuibles al descuido. Calcule la derivada de las integrales indefinidas encontradas en el ejemplo 8 y compruebe si son iguales a los integrandos respectivos. Quizá se necesite de alguna manipulación algebraica para verificar esos resultados.

Regla 3

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

donde k es una constante de valor real.

En su forma verbal, esta regla establece que la integral indefinida de una constante k por una función f se determina multiplicando la constante por la integral indefinida de f. Otra manera de concebir la regla es afirmar que siempre que una constante pueda factorizarse a partir del integrando, también puede factorizarse fuera de la integral. En el ejemplo 9 se dan algunos casos de esta regla.

Ejemplo 9

a) $$\begin{aligned}\int 5x\,dx &= 5\int x\,dx\\ &= 5\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)\\ &= \frac{5x^2}{2}+5C_1\\ &= \frac{5x^2}{2}+C\end{aligned}$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{5x^2}{2} + C,\qquad f'(x) = \dfrac{5}{2}(2x) = 5x$ ✓

NOTA Con integrales indefinidas se incluye siempre la constante de integración. En la aplicación de la regla 3, el álgebra sugiere que cualquier constante k factorizada fuera de la integral deberá multiplicarse por la constante de integración (el término $5C_1$ en este ejemplo). Esta multiplicación es innecesaria, simplemente se requiere una constante de integración para indicar la "naturaleza indefinida" de la integral. Así, la convención es sumar C y no un múltiplo de C. En el último paso, el término $5C_1$ se reescribe simplemente como C, puesto que C representa cualquier constante y también $5C_1$.

$$b)\ \int \frac{x^2}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + C$$
$$= \frac{x^3}{6} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + C, \qquad f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} = \dfrac{x^2}{2}$ ✓

$$c)\ \int \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = \int 3x^{-1/2}\,dx$$
$$= 3\int x^{-1/2}\,dx$$
$$= 3\,\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 6x^{1/2} + C$$

Comprobación Si $f(x) = 6x^{1/2} + C, \qquad f'(x) = 6(\tfrac{1}{2})x^{-1/2}$

$$= \frac{3}{x^{1/2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{x}}$$ ✓

❑

Regla 4

Si existen $\displaystyle\int f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int g(x)\,dx$, entonces

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

La integral indefinida de la suma (diferencia) de dos funciones es la suma (diferencia) de sus integrales indefinidas respectivas.

Ejemplo 10

$$a)\ \int (3x - 6)\,dx = \int 3x\,dx - \int 6\,dx$$
$$= \frac{3x^2}{2} + C_1 - (6x + C_2)$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 6x + C_1 - C_2$$
$$= \frac{3x^2}{2} - 6x + C$$

Nótese también aquí que, aun cuando las dos integrales producen, desde el punto de vista técnico, constantes separadas de integración, éstas pueden considerarse como una sola.

Comprobación Si $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 6x + C$, $\quad f'(x) = 3x - 6$ ✓

b) $\int (4x^2 - 7x + 6)\,dx = \int 4x^2\,dx - \int 7x\,dx + \int 6\,dx$
$$= \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + C$$

Comprobación Si $f(x) = \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + C$, $\quad f'(x) = \frac{12x^2}{3} - \frac{14x}{2} + 6$
$$= 4x^2 - 7x + 6$$ ✓ ❑

Sección 18.2 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios, encuentre la integral indefinida (si es posible).

1. $\int 60\,dx$

2. $\int -25\,dx$

3. $\int dx/8$

4. $\int dx$

5. $\int 8x\,dx$

6. $\int (x/2)\,dx$

7. $\int -3x\,dx$

8. $\int (-8x/3)\,dx$

9. $\int (3x + 6)\,dx$

10. $\int (10 - 5x)\,dx$

11. $\int (x/3 - 1/4)\,dx$

12. $\int (x/2 + 1/4)\,dx$

13. $\int (3x^2 - 4x + 2)\,dx$

14. $\int (-6x^2 + 10)\,dx$

15. $\int (-18x^2 + x - 5)\,dx$

16. $\int (10 - 6x + 15x^2)\,dx$

17. $\int (4x^3 + 6x^2 - 3)\,dx$

18. $\int (8x^3 + 6x^2 - 2x + 10)\,dx$

19. $\int (x^5 - 12x^3 + 3)\,dx$

20. $\int (8x^3 + x^2/2 + 6)\,dx$

21. $\int \sqrt[5]{x}\,dx$

22. $\int (2/\sqrt[3]{x})\,dx$

23. $\int dx/x^3$

24. $\int (20/\sqrt[3]{x^2})\,dx$

25. $\int (ax^4 + bx^2)\,dx$

26. $\int (mx + b)\,dx$

27. $\int (a/bx^n)\,dx$

28. $\int \sqrt[b]{x}\,dx$

29. $\int dx/x^n$

30. $\int (a/\sqrt[b]{x})\,dx$

31. $\int 2\sqrt[3]{x}\,dx$

32. $\int 3\sqrt{x}\,dx$

33. $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

34. $\int 8\sqrt[4]{x}\,dx$

35. $\int (4\sqrt[4]{x}/3)\,dx$

36. $\int (3\sqrt[3]{x}/2)\,dx$

37. $\int (dx/x^4)$

38. $\int (-8\,dx/x^3)$

39. $\int (16\,dx/x^2)$

40. $\int (3\,dx/x^3)$

41. $\int (dx/\sqrt{x})$

42. $\int (dx/\sqrt[3]{x})$

43. $\int (-15\,dx/\sqrt[5]{x})$

44. $\int (-2\,dx/\sqrt{x})$

45. $\int (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)\,dx$

46. $\int (6\,dx/x^6)$

47. $\int (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)\,dx$

48. $\int (dx/ax^2)$

49. $\int (dx/ax^n)$

50. $\int ([1/x^2] + [2/x^3])\,dx$

18.3 Reglas adicionales de integración

En esta sección se ofrecen más reglas de integración y se dan ejemplos de su aplicación.

Regla 5: Excepción de la regla de la potencia

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + C$$

Ésta es la excepción relacionada con la regla 2 (la regla de la potencia), donde $n = -1$ para x^n. ¿Recuerda el lector las reglas de diferenciación? Si $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x = x^{-1}$.

Regla 6

$$\int e^x\, dx = e^x + C$$

Regla 7

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

Esta regla se parece a la de la potencia (regla 2). En efecto, la regla de la potencia es el caso especial de esta regla, donde $f(x) = x$. Si el integrando está formado por el producto de la función f elevada a una potencia n y la derivada de f, la integral indefinida se calculará aumentando en 1 el exponente de f y dividiendo el resultado entre el nuevo exponente.

Ejemplo 11 Evalúe $\int (5x-3)^3(5)\, dx$.

SOLUCIÓN

Cuando se identifica un integrando que contiene una función elevada a una potencia, el lector deberá pensar de inmediato en la regla 7. El primer paso es determinar la función f. En este caso, la función que se eleva a la tercera potencia es

$$f(x) = 5x - 3$$

Una vez obtenida f, deberá determinarse f'. En este caso,

$$f'(x) = 5$$

Si el integrando presenta la forma $[f(x)]^n f'(x)$, entonces se aplicará la regla 7. El integrando en este ejemplo sí tiene la forma requerida, y

$$\int \overbrace{(5x-3)}^{f(x)}{}^3\, \overbrace{(5)}^{f'(x)}\, dx = \frac{(5x-3)^4}{4} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{(5x-3)^4}{4} + C$, $\quad f'(x) = \dfrac{4}{4}(5x-3)^3(5)$

$$= (5x-3)^3(5) \checkmark$$

Ejemplo 12 Evalúe $\int \sqrt{2x^2 - 6}(4)\, dx$.

SOLUCIÓN

El integrando puede reescribirse como

$$\int (2x^2 - 6)^{1/2}(4)\, dx$$

En relación con la regla 7, se tiene

$$f(x) = 2x^2 - 6 \quad \text{y} \quad f'(x) = 4x$$

Para que se aplique la regla 7, $(2x^2 - 6)^{1/2}$ deberá multiplicarse por f', o sea $4x$, en el integrando. Puesto que el otro factor del integrando es 4 y no $4x$, no será posible evaluar la integral mediante la regla 7.

Ejemplo 13 Evalúe $\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx$.

SOLUCIÓN

Para esta integral

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{y} \quad f'(x) = 2x - 2$$

También en este caso parece que el integrando no es de la forma apropiada. Para aplicar la regla 7, el segundo factor en el integrando tendría que ser $2x - 2$ y no $x - 1$. Sin embargo, al recordar la regla 3 y utilizar algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx &= \frac{2}{2}\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int (x^2 - 2x)^5(2)(x - 1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int (x^2 - 2x)^5(2x - 2)\, dx \end{aligned} \qquad \textbf{(18.8)}$$

Lo que se ha hecho es *manipular* el integrando para convertirlo en la forma adecuada. La regla 3 establece que las *constantes* pueden factorizarse de adentro hacia afuera del signo de la integral. De manera análoga, una constante que sea un factor puede desplazarse de afuera del signo de la integral hacia adentro. Se multiplicó el integrando por 2 y esta operación se compensó al multiplicar la integral por 1/2. En efecto, simplemente se multiplica la integral original por 2/2, o sea 1. Así pues, hemos cambiado el aspecto de la integral original, pero no su valor.

Al evaluar la integral en la ecuación (18.8) se obtiene

$$\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2 - 2x)}^{f(x)}{}^5\, \overbrace{(2x - 2)}^{f'(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 2x)^6}{6} + C$$

$$= \frac{(x^2 - 2x)^6}{12} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)^6}{12} + C$, $\quad f'(x) = \dfrac{6}{12}(x^2 - 2x)^5(2x - 2)$

$$= \frac{6(x^2 - 2x)^5(2)(x - 1)}{12}$$

$$= (x^2 - 2x)^5(x - 1) \quad \checkmark$$

Ejemplo 14 Evalúe $\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx$.

SOLUCIÓN

En esta integral

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 4x^3 - 4x$$

El integrando no es exactamente de la forma de la regla 7. Existe una fuerte tentación a efectuar las siguientes operaciones.

$$\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx = \frac{x}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx$$

$$= \frac{1}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4 x(4x^2 - 4)\,dx$$

$$= \frac{1}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^3 - 4x)\,dx$$

Sin embargo, no se ha comentado ninguna propiedad que permita factorizar las *variables* dentro de un signo de integral. Las constantes sí, pero no así las variables. Por consiguiente, con las reglas de que se dispone hasta ahora no es posible evaluar la integral. ❑

Regla 8

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$$

Esta regla, lo mismo que la precedente, requiere que el integrando presente una forma muy específica. La regla 6 es en realidad el caso especial de ésta cuando $f(x) = x$.

Ejemplo 15 Evalúe $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN

Cuando se identifica un integrando que contiene *e* elevada a una potencia que es una función de *x*, de inmediato el lector debería recordar la regla 8. Igual que en el caso de la regla 7, el siguiente paso consiste en verificar si el integrando tiene la forma requerida para aplicar la regla 8. En este integrando,

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 2x$$

Según la regla 8, el integrando presenta la forma adecuada, y

$$\int \overbrace{2x}^{f'(x)} \; \overbrace{e^{x^2}}^{f(x)} \, dx = e^{x^2} + C$$

Comprobación Si $f(x) = e^{x^2} + C$, $\quad f'(x) = (2x)e^{x^2}$ ✓

Ejemplo 16 Evalúe $\int x^2 e^{3x^3}\,dx$.

SOLUCIÓN

En relación con la regla 8, en este integrando se tiene

$$f(x) = 3x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 9x^2$$

El integrando no se encuentra actualmente en una forma idónea para servirse de la regla 8. No obstante,

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x^3}\,dx &= \frac{9}{9}\int x^2 e^{3x^3}\,dx\\ &= \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3}\,dx\end{aligned}$$

lo que es adecuado para hacer uso de la regla 8. Por consiguiente,

$$\int x^2 e^{3x^3}\,dx = \tfrac{1}{9}e^{3x^3} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \tfrac{1}{9}e^{3x^3} + C$, $\quad f'(x) = \tfrac{1}{9}e^{3x^3}(9x^2) = x^2 e^{3x^3}$ ✓ ❑

Regla 9

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$$

Ejemplo 17 Evalúe $\int \frac{6x}{3x^2 - 10}\,dx$.

SOLUCIÓN

Al aplicar la regla 9, se obtiene

$$f(x) = 3x^2 - 10 \quad \text{y} \quad f'(x) = 6x$$

Puesto que el integrando presenta la forma requerida por la regla 9,

$$\int \frac{6x\,dx}{3x^2 - 10} = \ln(3x^2 - 10) + C$$

Comprobación Si $f(x) = \ln(3x^2 - 10) + C$, $\quad f'(x) = \frac{6x}{3x^2 - 10}$ ✓

Ejemplo 18 Evalúe $\int \frac{x-1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx$.

SOLUCIÓN

En relación con la regla 9, se tiene

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 10 \quad \text{y} \quad f'(x) = 8x - 8$$

El integrando no parece ajustarse a la forma que exige la regla 9. Pero una manipulación algebraica permite volver a escribirlo en la forma requerida, o

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx &= \frac{8}{8}\int \frac{x-1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx\\ &= \frac{1}{8}\int \frac{8(x-1)}{4x^2 - 8x + 10}\,dx\\ &= \frac{1}{8}\int \frac{8x-8}{4x^2 - 8x + 10}\,dx\end{aligned}$$

la que satisface la forma de la regla 9. Por lo tanto,

$$\int \frac{x-1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx = \frac{1}{8}\ln(4x^2 - 8x + 10) + C$$

Comprobación Si $f(x) = \frac{1}{8}\ln(4x^2 - 8x + 10) + C$,

$$f'(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{8x - 8}{4x^2 - 8x + 10}\right] = \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10} \checkmark$$

□

Sección 18.3 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios calcule la integral indefinida (si es posible).

1. $\int (x + 20)^5\,dx$

2. $\int \sqrt{x - 30}\,dx$

3. $\int 8(8x + 20)^3\,dx$

4. $\int \frac{1}{2}[10 - (x/2)]^4\,dx$

5. $\int [(x/3) + 15]^2(\frac{1}{3})\,dx$

6. $\int \sqrt{8 + 2x}\,(6)\,dx$

7. $\int (3x - 10)^3(x)\,dx$

8. $\int x\sqrt{x + 6}\,dx$

9. $\int (x^2 + 3)^4(2x)\,dx$

10. $\int (x^3 + 1)^4(3x^2)\,dx$

11. $\int (x^3 + 5)^3(x^2)\,dx$

12. $\int (x^2 + 3)^{3/2}(x)\,dx$

13. $\int (2x^2 - 4x)^6(x - 1)\,dx$

14. $\int (x^2/4 - x/2)^5(x - 1)\,dx$

15. $\int (2x/\sqrt{x^2 + 8})\,dx$

16. $\int 3x^2/(x^3 + 4)^3\,dx$

17. $\int (4x^3 + 8x^2)^5(x)\,dx$

18. $\int 4x^3\sqrt{x^2 + 1}\,dx$

19. $\int (4x^3 + 1)^3(12x)\,dx$

20. $\int (3x^4 - 5)^4(12x^2)\,dx$

21. $\int \sqrt{2x^3 + 3}\,(x^2)\,dx$

22. $\int \sqrt[3]{20 + 3x^3}\,(x^2)\,dx$

23. $\int (2x^2 + 8x)^3(x + 2)\,dx$

24. $\int (3x - 3x^3)^4(3x^2 - 1)\,dx$

25. $\int (x^3 + 3x^4)^3(3x + 12x^2)\,dx$

26. $\int \sqrt{9x - 3x^2}\,(3 - 2x)\,dx$

27. $\int e^{x^2}\,dx$

28. $\int e^{x-8}\,dx$

29. $\int e^{3x}\,dx$

30. $\int 2xe^{x^2}\,dx$

31. $\int e^{ax}\,dx$

32. $\int (x + 2)e^{x^2+4x}\,dx$

33. $\int \frac{-x}{x^2 + 5}\,dx$

34. $\int \frac{4x}{100 + x^2}\,dx$

35. $\int \frac{18}{6x + 5}\,dx$

36. $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x}\,dx$