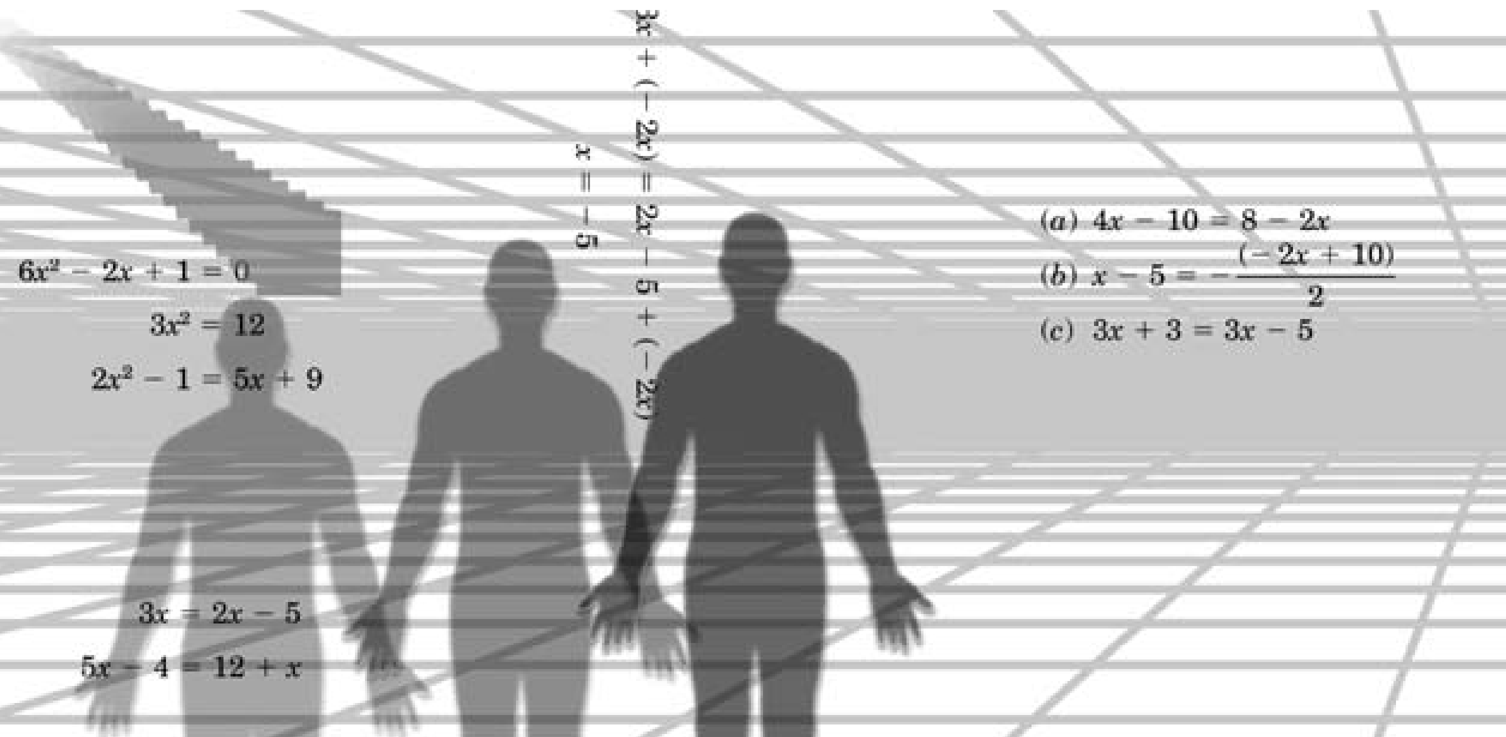
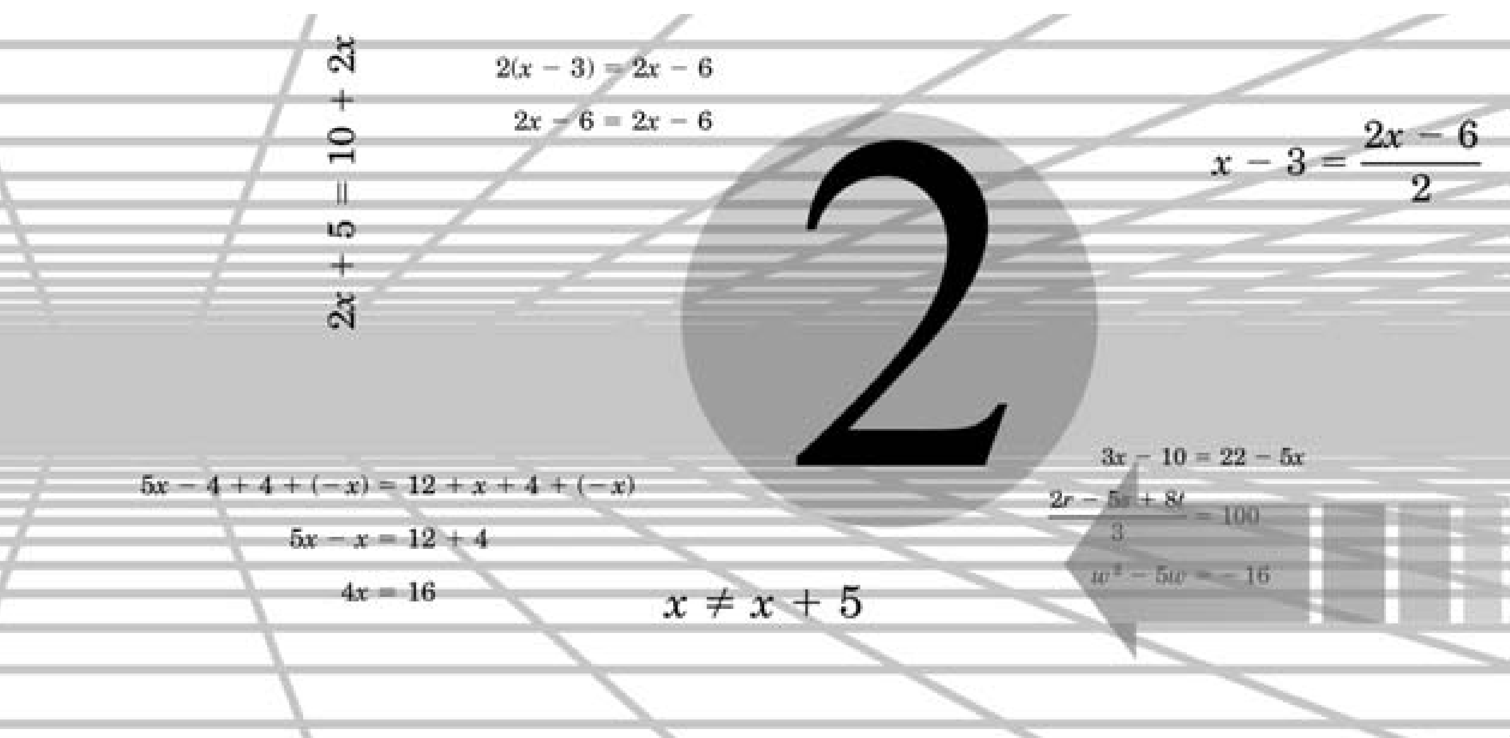
CAPÍTULO 2

Ecuaciones lineales



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar una comprensión rigurosa de las características algebraicas y gráficas de las ecuaciones lineales.
- Proporcionar los instrumentos que permitirán determinar la ecuación que representa una relación lineal.
- Ilustrar una variedad de aplicaciones de las ecuaciones lineales.



Hay muchas razones por las que es importante estudiar las relaciones matemáticas lineales. En primer lugar, existen muchos fenómenos del mundo real que podría interesarnos representar en forma matemática, y que son lineales o que se pueden aproximar de manera razonablemente utilizando relaciones lineales. Como resultado, hay una amplia aplicación de las relaciones matemáticas lineales. En segundo término, es más fácil analizar relaciones lineales que relaciones no lineales. Por último, los métodos para analizar las relaciones no lineales en ocasiones son similares a los que se usan en las relaciones matemáticas lineales o bien son extensiones de los mismos. Como consecuencia, primero es necesario entender bien las relaciones matemáticas lineales para estudiar después las relaciones matemáticas no lineales.

2.1 Ecuaciones lineales

Forma general

Ecuación lineal con dos variables

Una ecuación lineal donde se están relacionando dos variables x y y tiene la forma estándar

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

donde a, b y c son constantes y a y b no pueden ser *ambas* iguales a cero.

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de *primer grado*. Cada variable de la ecuación se eleva (implícitamente) a la primera potencia: $ax + by = c \Rightarrow ax^1 + by^1 = c$; por tanto, es una ecuación de primer grado. La presencia de términos que tienen exponentes distintos a 1 (por ejemplo, x^2) o de términos que implican un producto de variables (por ejemplo, $2xy$) ocasiona que una ecuación no se considere como lineal.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones lineales con dos variables:

	Parámetros de la ecuación (2.1)		
	a	b	c
$2x + 5y = -5$	2	5	-5
$-x + \frac{1}{2}y = 0$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$x/3 = 25$	$\frac{1}{3}$	0	25
$\sqrt{2}u - 0.05v = 3.76$	$\sqrt{2}$	-0.05	3.76
$2s - 4t = -\frac{1}{2}$	2	-4	$-\frac{1}{2}$

(*Nota*: Los nombres de las variables en la ecuación (2.1) pueden ser diferentes de x y y.)

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones que *no* son lineales. ¿Puede explicar por qué?

$$2x + 3xy - 4y = 10$$
$$x + y^2 = 6$$
$$\sqrt{u} + \sqrt{v} = -10$$
$$ax + \frac{b}{y} = c$$

La forma de una ecuación lineal no siempre es obvia. A primera vista, la ecuación

$$2x = \frac{5x - 2y}{4} + 10$$

podría no parecer lineal. Sin embargo, multiplicar ambos lados de la ecuación por 4 y mover las variables al lado izquierdo da: $8x = 5x - 2y + 40$, lo cual implica la ecuación: $3x + 2y = 40$, que es lineal y tiene la forma de la ecuación (2.1).

Representación mediante el uso de las ecuaciones lineales

Dada una ecuación lineal que tiene la forma $ax + by = c$, el ***conjunto solución*** para la ecuación es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Al usar la ***notación de conjunto*** se puede especificar el conjunto solución S como

$$\boxed{S = \{(x, y) \mid ax + by = c\}} \qquad \textbf{(2.2)}$$

De manera verbal, esta notación indica que el **conjunto solución S** consta de los **elementos (x, y),** *de tal manera que* (la línea vertical) satisfaga la ecuación $ax + by = c$. Dicho de otro modo, la ecuación (2.2) expresa que S consta de todos los **pares ordenados** (x, y), de manera que $ax + by = c$. Para cualquier ecuación lineal, S consta de un número infinito de elementos; es decir, **hay un número infinito de pares de valores (x, y) que satisfacen una ecuación lineal que tiene la forma $ax + by = c$.**

Para determinar un par de valores que satisfaga una ecuación, asigne un valor para una de las variables, sustituya este valor en la ecuación y despeje el valor correspondiente de la otra variable. Este método supone que se incluyen ambas variables en la ecuación (esto es, $a \neq 0$ y $b \neq 0$).

Ejemplo 1 Dada la ecuación

$$2x + 4y = 16$$

a) Determinar el par de valores que satisface la ecuación cuando $x = -2$.
b) Determinar el par de valores que satisface la ecuación cuando $y = 0$.

SOLUCIÓN

a) Al sustituir $x = -2$ en la ecuación,

$$\begin{aligned} 2(-2) + 4y &= 16 \\ 4y &= 20 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Cuando $x = -2$, el par de valores que satisface la ecuación es $x = -2$ y $y = 5$, o $(-2, 5)$.
b) Al sustituir $y = 0$ en la ecuación,

$$\begin{aligned} 2x + 4(0) &= 16 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Cuando $y = 0$, el par de valores que satisface la ecuación es $(8, 0)$. ❑

Ejemplo 2

(**Posibilidades de producción**) Una compañía fabrica dos productos diferentes. Para la próxima semana se tienen disponibles 120 horas de trabajo para producir los dos productos. Es posible asignar horas de trabajo de fabricación para cualquiera de los productos. Además, puesto que ambos productos generan buenas utilidades, a la gerencia le interesa aprovechar el total de 120 horas durante la semana. Cada unidad producida del producto *A* requiere tres horas de trabajo y cada unidad del producto *B* requiere 2.5 horas.

a) Defina una ecuación que indique que el total de horas de trabajo empleadas para producir *x* unidades del producto *A* y *y* unidades del producto *B* es igual a 120.
b) ¿Cuántas unidades del producto *A* se pueden fabricar si se producen 30 unidades del producto *B*?
c) Si la gerencia decide producir sólo un producto, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede fabricar del producto *A*? ¿El máximo del producto *B*?

SOLUCIÓN

a) Las variables se pueden definir como sigue:

x = número de unidades fabricadas del producto A
y = número de unidades fabricadas del producto B

La ecuación deseada tiene la estructura siguiente.

$$\boxed{\text{Total de horas empleadas para fabricar los productos } A \text{ y } B = 120} \tag{2.3}$$

De manera más específica,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Total de horas}\\ \text{empleadas para}\\ \text{fabricar el}\\ \text{producto } A\end{array} + \begin{array}{c}\text{Total de horas}\\ \text{empleadas para}\\ \text{fabricar el}\\ \text{producto } B\end{array} = 120} \tag{2.4}$$

Ya que el total de horas empleadas para fabricar un producto es igual al número de horas necesarias por unidad producida por la cantidad de unidades producidas, la ecuación (2.4) se puede volver a expresar como

$$\boxed{3x + 2.5y = 120} \tag{2.5}$$

b) Si se fabrican 30 unidades del producto *B*, entonces $y = 30$. Por tanto,

$$3x + 2.5(30) = 120$$
$$3x = 45$$
$$x = 15$$

Así, un par de valores que satisface la ecuación (2.5) es (15, 30). Esto sugiere que *una combinación* de dos productos que utilizará por completo las 120 horas es 15 unidades del producto *A* y 30 unidades del producto *B*.

c) Si la gerencia decide producir sólo el producto *A*, no se fabricarán unidades del producto *B*, o $y = 0$. Si $y = 0$,

$$3x + 2.5(0) = 120$$
$$3x = 120$$
$$x = 40$$

Por consiguiente, 40 es el número máximo de unidades del producto *A* que se pueden producir al utilizar en su totalidad las 120 horas.

Si la gerencia decide fabricar sólo el producto *B*, $x = 0$ y

$$3(0) + 2.5y = 120$$

o

$$y = 48$$

De este modo, la producción máxima posible del producto *B* es 48 unidades.

Ejemplo 3 Se ha indicado que hay un número infinito de pares de valores (x, y) que satisfacen cualquier ecuación lineal. En el ejemplo 2, ¿hay algún elemento del conjunto solución que pudiera no ser realista?

SOLUCIÓN

En el ejemplo 2, x y y representan el número de unidades fabricadas de dos productos. Puesto que una producción *negativa* es imposible, los valores negativos de x y y no tienen significado real alguno. Hay valores negativos que satisfacen la ecuación (2.5). Por ejemplo, si $y = 60$, entonces

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(60) &= 120 \\ 3x + 150 &= 120 \\ 3x &= -30 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Además de valores negativos, es posible que x y y tengan valores decimales o fraccionarios. Por ejemplo, si $y = 40$,

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(40) &= 120 \\ 3x + 100 &= 120 \\ 3x &= 20 \\ x &= 6\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Según sea la naturaleza de los productos y la forma cómo se venden, los valores fraccionarios pueden o no ser aceptables. ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Dé ejemplos de tipos de productos fabricados para los cuales sólo los valores enteros son razonables. Mencione un ejemplo de un producto para el cual los valores no enteros son razonables.

Ecuaciones lineales con *n* variables

Ecuaciones lineales con *n* variables

Una ecuación lineal con n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tiene la forma general

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \qquad \textbf{(2.6)}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y b son constantes y *no todas* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son iguales a cero.

Cada una de las siguientes expresiones es un ejemplo de una ecuación lineal:

$$3x_1 - 2x_2 + 5x3 = 0$$
$$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 2x_6 = -80$$
$$5x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 - 3x_7 + 10x_8 - 12x_9 + x_{10} = 1\,250$$

Dada una ecuación lineal con n variables, como se define en la ecuación (2.6), se puede especificar el conjunto solución S como

$$\boxed{S = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b\}} \tag{2.7}$$

Como en el caso con dos variables, hay una infinidad de elementos en el conjunto solución. Se representa un elemento de S mediante una serie de valores $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, uno por cada una de las n variables en la ecuación. Una manera de identificar elementos específicos de S es asignar valores a $n - 1$ de las variables, sustituirlos en la ecuación y despejar el valor de la variable restante.

Ejemplo 4

Dada la ecuación

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 16$$

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 0$?
b) Determine todos los elementos del conjunto solución que tienen valores de 0 en tres de las cuatro variables.

SOLUCIÓN

a) Al sustituir los valores dados para x_1, x_2 y x_3, dentro de la ecuación se proporciona

$$2(2) + 3(-1) - (0) + x_4 = 16$$
$$1 + x_4 = 16$$

o bien

$$x_4 = 15$$

El elemento correspondiente del conjunto solución es $(2, -1, 0, 15)$.
b) Si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, entonces

$$2(0) + 3(0) - (0) + x_4 = 16$$

o

$$x_4 = 16$$

Si $x_1 = x_2 = x_4 = 0$,

$$2(0) + 3(0) - x_3 + (0) = 16$$

o

$$x_3 = -16$$

Si $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, entonces

$$2(0) + 3x_2 - (0) + (0) = 16$$

o bien $$x_2 = 16$$

y $$x_2 = \tfrac{16}{3}$$

Si $x_2 = x_3 = x_4 = 0$,

$$2x_1 + 3(0) - (0) + (0) = 16$$

o bien $$2x_1 = 16$$

y $$x_1 = 8$$

Por tanto, los elementos del conjunto solución que tienen tres de las cuatro variables iguales a cero son (0, 0, 0, 16), (0, 0, −16, 0), (0, $\frac{16}{3}$, 0, 0) y (8, 0, 0, 0). ❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 2 (posibilidades de producción), supóngase que también se fabrica un tercer producto (producto *C*). Como consecuencia del producto adicional, la gerencia autorizó 30 horas de trabajo adicionales. Si cada unidad del producto *C* requiere 3.75 horas de trabajo: *a*) determine la ecuación en la que se requiere utilizar el total de 150 horas de trabajo en la producción de los tres productos, y *b*) determine el número máximo de unidades que se podrían producir de cada producto. *Respuesta*: *a*) Si z = número de unidades fabricadas del producto *C*, $3x + 2.5y + 3.75z = 150$, *b*) 50 unidades de *A*, 60 unidades de *B* y 40 unidades de *C*.

Sección 2.1 Ejercicios de seguimiento

Determine cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales.

1. $-5y = 0$

2. $\sqrt{2}x + 8y = -15$

3. $-15x + 24y = 500$

4. $-x^2 + 3y = 10$

5. $2x - 8xy + 5y = 100$

6. $\sqrt{4x} + 3y = -18$

7. $2u - 3v = 20$

8. $r/3 + s/5 = \frac{1}{15}$

9. $m/2 + (2m - 3n)/5 = 0$

10. $(x + 2y)/3 - 3x/4 = 2x - 5y$

11. $20 - 3y = \sqrt{28}$

12. $0.0003x - 2.3245y = x + y - 3.2543$

13. $5x_1 - 3x_2 + x_3 = 20$

14. $(x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5)/25 = 300$

15. $(x_1 + x_2 - x_3x_1) = 5$

16. $3x_2 - 4x_1 = 5x_3 + 2x_2 - x_4 + 36$

17. $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = 25$

18. $(2x_1 - 3x_2 + x_3)/4 = (x_2 - 2x_4)/5 + 90$

19. Vuelva a trabajar con el ejemplo 2 si el producto A requiere 2 horas por unidad y el producto B requiere 4 horas por unidad.

20. Dada le ecuación $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$:

a) ¿Qué valores satisfarán a la ecuación cuando $x_1 = -4$ y $x_3 = 2$?

b) Defina todos los elementos del conjunto solución en el cual dos variables equivalen a 0.

21. Dada la ecuación $x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -60$:

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 10$, $x_2 = 8$ y $x_3 = -2$?

b) Determine todos los elementos del conjunto solución para lo cual los valores de tres variables son iguales a 0.

22. Mezcla de productos Una compañía fabrica dos productos, A y B. Cada unidad de A requiere tres horas de trabajo y cada unidad de B requiere cinco horas de trabajo. La capacidad de producción diaria es de 240 horas laborales.

a) Si se producen cada día x unidades del producto A y y unidades del producto B y se aprovechan todas las horas laborales, determine la ecuación lineal que requiere el uso de 240 horas de trabajo por día.

b) ¿Cuántas unidades de A se pueden hacer cada día si se producen 30 unidades de B a diario?

c) ¿Cuántas unidades de A se pueden hacer por *semana* si cada día se producen 12 unidades de B? (Suponga una semana de cinco días laborales.)

23. Planeación de la nutrición Una persona en régimen de dieta considera tres tipos de alimento en una comida. Está preocupada en particular por la cantidad de una vitamina contenida en la comida. Una onza del alimento 1 proporciona 6 miligramos de vitamina, una onza del alimento 2 proporciona 8 miligramos y una onza del alimento 3 proporciona 12 miligramos. El *requerimiento mínimo diario* (MDR; *minimum daily requirement*) de la vitamina es 120 miligramos.

a) Si x_j equivale al número de onzas del tipo de alimento j servidas en una comida, determine la ecuación que asegura que la comida satisfaga exactamente el MDR.

b) Si sólo se debe incluir uno de estos tres tipos de alimento en la comida, ¿cuánto debe servirse (en cada uno de los tres casos posibles) para satisfacer el MDR?

24. Puente aéreo de emergencia La Cruz Roja quiere transportar por aire provisiones a un país sudamericano que sufrió un terremoto. Se consideran cuatro tipos de provisiones, cada uno de los cuales se transportaría en contenedores. Un contenedor de un artículo en particular pesa 120, 300, 250 y 500 libras, respectivamente, para los cuatro artículos. Si el avión que se va a utilizar tiene una capacidad de peso de 80 000 libras y x_j es igual al número de contenedores enviados del artículo j:

a) Determine la ecuación que asegura que el avión se cargará hasta su capacidad de peso.

b) Si se decide dedicar el avión a transportar sólo un artículo, ¿cuántos contenedores podría transportar de cada artículo?

25. Revisión del puente aéreo En el ejercicio 24, cada contenedor de un artículo requiere un volumen específico de espacio. Suponga que los contenedores de los cuatro artículos requieren 30, 60, 50 y 80 pies cúbicos, respectivamente. Si la capacidad de volumen del avión es de 25 000 pies cúbicos:

a) Determine la ecuación que asegura que se ocupe con exactitud la capacidad de volumen del avión.

b) Si se decide dedicar el avión a un solo artículo, ¿cuántos contenedores de cada artículo se podrían transportar si sólo se considera la capacidad de volumen?

c) Mediante la información del ejercicio 24, ¿cuál es el número máximo de contenedores de cada artículo que se podrían transportar si se consideran tanto el peso como el volumen? Indique en cada caso si la capacidad de peso o volumen es el factor restrictivo.

26. Contratación de personal Una empresa de consultoría de software recibió un importante contrato para desarrollar un nuevo sistema de reservaciones para una de las principales aerolíneas. Con el fin de cumplir el contrato, se requerirá la contratación de nuevos analistas programadores, analistas programadores senior e ingenieros de software. Cada puesto de analista programador costará $60 000 en salario y beneficios. Cada puesto de analista programador senior costará $80 000 y cada puesto de ingeniero de software costará $100 000. El presupuesto de la aerolínea es de $12 millones por año para las nuevas contrataciones. Si x_j es igual al número de personas contratadas por categoría de trabajo j (donde $j = 1$ corresponde a analistas programadores, etc.):

a) Determine la ecuación que asegura que el total de las nuevas contrataciones consumirá el presupuesto con exactitud.

b) Si se deseara gastar el presupuesto completo en un solo tipo de puesto, ¿cuántas personas de cada tipo se podría contratar?

c) Si sólo se necesitan 10 analistas programadores para el contrato, ¿cuál es el número máximo de analistas programadores senior que se podría contratar? ¿El número máximo de ingenieros de software?

27. Transporte público La ciudad de Nueva York recibió una donación federal de $100 millones para mejorar el transporte público. Los fondos se usarán sólo para la compra de nuevos autobuses, la compra de nuevos carros de transporte subterráneo o la repavimentación de las calles de la ciudad. Los costos estimados son $250 000 por autobús, $200 000 por carro de transporte subterráneo y $500 000 por milla repavimentada. Los funcionarios de la ciudad quieren determinar diferentes maneras de gastar el dinero donado.

a) Defina las variables de decisión y escriba la ecuación que asegura el gasto completo del donativo federal.

b) Si se determinó comprar 100 autobuses y 200 carros de transporte subterráneo nuevos, ¿cuántas millas de calles de la ciudad se pueden repavimentar?

c) Si los funcionarios desean gastar todo el dinero en un solo tipo de mejora, ¿cuáles son las diferentes posibilidades?

28. Campaña política Un candidato al puesto de gobernador de un estado del medio oeste tiene un presupuesto publicitario de $5 millones. Los consejeros del candidato identificaron cuatro opciones de propaganda: anuncios en periódicos, comerciales de radio, comerciales de televisión y anuncios en Internet. Los costos para estas opciones de medios de comunicación promedian $2 500, $4 000, $10 000 y $1 000, respectivamente, por unidad publicitaria. Si x_j es igual al número de unidades adquiridas de la opción de medios j:

a) Escriba una ecuación que requiera gastos publicitarios por el total de $5 millones.

b) Si se ha determinado que se usarán 200 anuncios en periódicos, 500 anuncios en radio y 100 anuncios televisivos, ¿cuántos anuncios de Internet se pueden adquirir?

c) Si se compran 300 anuncios televisivos, ¿cuál es el número máximo de anuncios en periódico que se puede comprar? ¿Número máximo de anuncios de radio? ¿Anuncios por televisión?