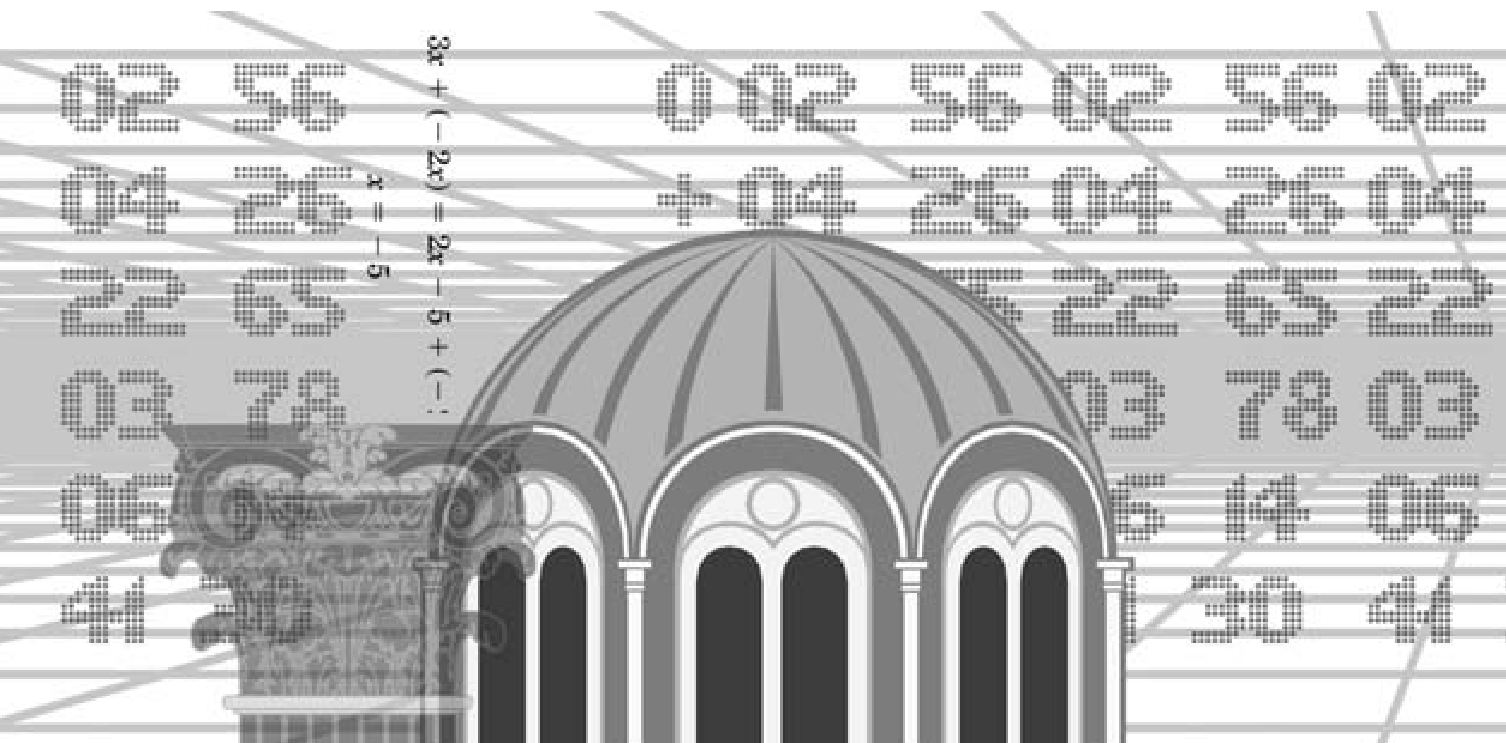
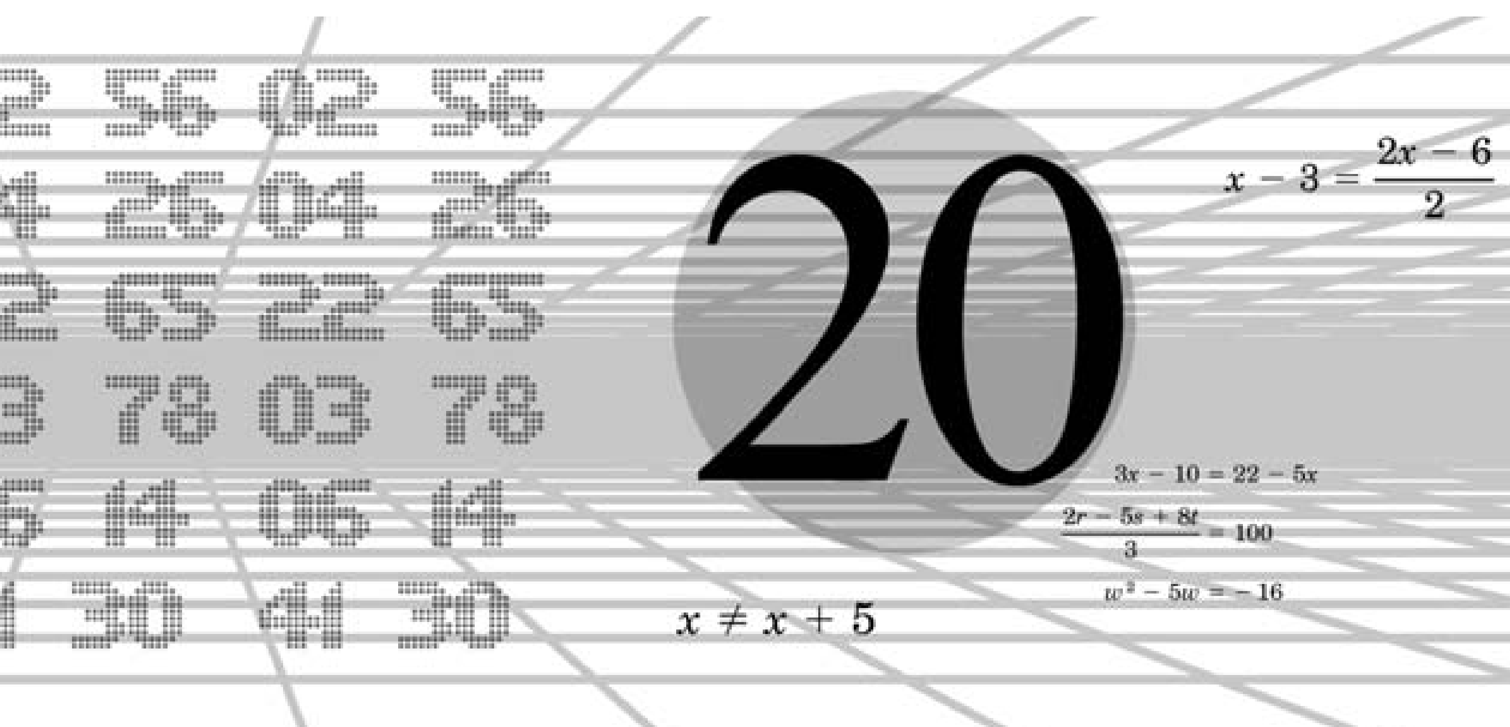
CAPÍTULO 20

Optimización: funciones de varias variables



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Lograr que el lector comprenda el cálculo de las funciones que contienen dos variables independientes.
- Dar ejemplos de la representación gráfica de funciones en tres dimensiones.
- Ofrecer un panorama general de los procedimientos de optimización para funciones que contienen más de dos variables independientes.
- Introducir la naturaleza y métodos de optimización de las funciones sujetas a condiciones de restricción.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Método de los mínimos cuadrados, o cómo hallar la curva de mejor ajuste para un conjunto de puntos de datos

A lo largo del texto se ha comentado la noción de estimación de relaciones matemáticas. En los capítulos 2, 5, 6 y 7 se vieron aplicaciones reales en las que se utilizaron puntos muestrales de datos para determinar las funciones de estimación lineales, cuadráticas y exponenciales. En cada caso, dichos puntos fueron seleccionados para uso en la determinación de las funciones de estimación. Dado un conjunto de puntos de datos y suponiendo una forma funcional (por ejemplo, lineal, cuadrática, etc.), el *método de los mínimos cuadrados* es uno de los más populares para determinar el "mejor" ajuste para los datos. En este capítulo se verá que el modelo de los mínimos cuadrados se basa en métodos de optimización (ejemplo 21).

En los capítulos 15 a 17 se ofreció una metodología para analizar las funciones que contienen una variable independiente. En las aplicaciones reales, un criterio u objetivo de decisión se basa a menudo en más de una variable. Como se mencionó en el capítulo 4, cuando las funciones incluyen más de una variable independiente se llaman ***funciones multivariadas*** o ***funciones de varias variables***. Se cuenta con métodos del cálculo diferencial para examinar su comportamiento y determinar los valores óptimos (máximos y mínimos). Al estudiar algunos de esos procedimientos en el presente capítulo, se verá que se parecen a los que se aplicaron a las funciones de una variable independiente.

Este capítulo se concentrará inicialmente en las ***funciones bivariadas*** (las que contienen dos variables independientes). Se describirán sus gráficas y luego se dará una explicación de las derivadas de esas funciones y su interpretación. A continuación se expondrán los métodos para obtener sus valores óptimos. Luego vendrá una sección en que se comentan las aplicaciones de las funciones bivariadas. La explicación abarcará la optimización de las funciones de n variables. El tema de la *optimización restringida* se aborda en la última sección del capítulo.

20.1 Representación gráfica de funciones de dos variables

Representación gráfica

Una función que incluye una variable dependiente z y dos variables independientes x y y puede representarse con la notación

$$\boxed{z = f(x, y)} \qquad \textbf{(20.1)}$$

Ya antes en el libro se dijo que el número de variables presentes en una función determina el número de dimensiones necesarias para graficarla. Se requieren dos dimensiones para trazar las funciones de una sola variable, y en cambio hacen falta tres dimensiones para graficar las funciones bivariadas.

Según se señaló en el capítulo 4, las funciones lineales que contienen una variable independiente tienen una gráfica de *líneas rectas* en dos dimensiones. Las funciones lineales que incluyen dos variables independientes se grafican como *planos* en tres dimensiones.

En general, las funciones no lineales que contienen una variable independiente se grafican como *curvas* en dos dimensiones. Y la gráfica de las funciones no lineales que contienen dos variables independientes son *superficies curvas* en tres dimensiones. Entre los ejemplos de superficies no lineales se encuentran la superficie ondulante de un campo de golf, la pendiente del terreno para esquiar y la vela de una embarcación de navegación. Un punto importante es que estas funciones se representan con *superficies*, no con sólidos.

Trazado de funciones de dos variables

Aunque la graficación en tres dimensiones es difícil, se dispone de técnicas que pueden aplicarse en algunos casos para trazar la forma general de la gráfica de una función bivariada. El material que se explica a continuación se entenderá mejor si se conocen las gráficas de estas funciones.

Considérese la función bivariada

$$z = f(x, y) = 25 - x^2 - y^2 \tag{20.2}$$

donde $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$. A fin de trazar esta función, se fijará el valor de una de las variables independientes y se graficará la función resultante. Por ejemplo, si se hace $y = 0$, la función f se convierte en

$$z = 25 - x^2 - 0^2$$

o bien

$$z = 25 - x^2 \tag{20.3}$$

Al fijar el valor de una de las variables, la función se reformula en términos de la otra variable independiente. Es decir, una vez especificado el valor de la variable independiente, el de la variable dependiente varía con el valor de la variable independiente restante. Dada la ecuación (20.3), la tabla 20.1 indica algunos valores de x y los valores resultantes de z.

Tabla 20.1

x	0	1	2	3	4	5
$z = 25 - x^2$	25	24	21	16	9	0

La figura 20.1 es una gráfica parcial de la función con el valor de y fijado en 0. Si se hace $y = 0$, la gráfica de la ecuación (20.3) debe estar en el plano xz. Un estudio detenido de la ecuación (20.3) revela que la relación entre z y x es cuadrática. Y la gráfica de la figura 20.1 forma parte de una parábola cóncava hacia abajo.

Si se hace $x = 0$ en la función original, f se transforma en

$$z = 25 - 0^2 - y^2$$

o bien

$$z = 25 - y^2 \tag{20.4}$$

La tabla 20.2 ofrece algunos valores de y, así como los valores resultantes de z.

La figura 20.2 es una gráfica parcial de $f(x, y)$. Con $x = 0$, la gráfica de la ecuación (20.4) se encuentra en el plano yz. La ecuación (20.4) indica una relación cuadrática entre y y z.

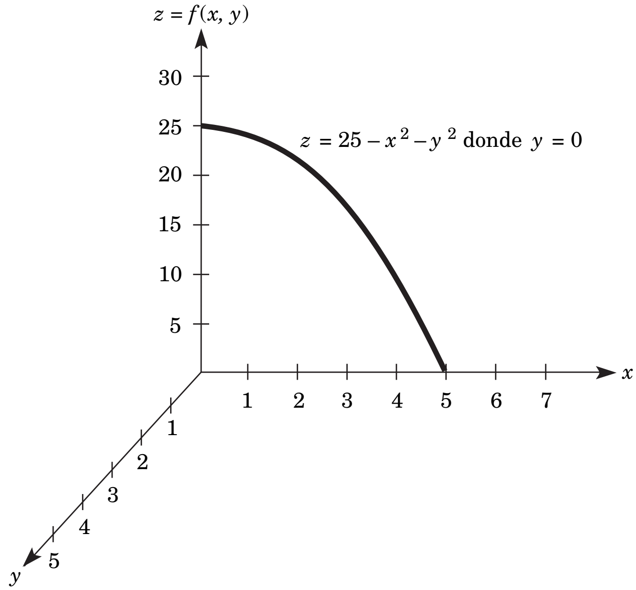


Figura 20.1 Gráfica parcial de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

Tabla 20.2

y	0	1	2	3	4	5
$z = 25 - y^2$	25	24	21	16	9	0

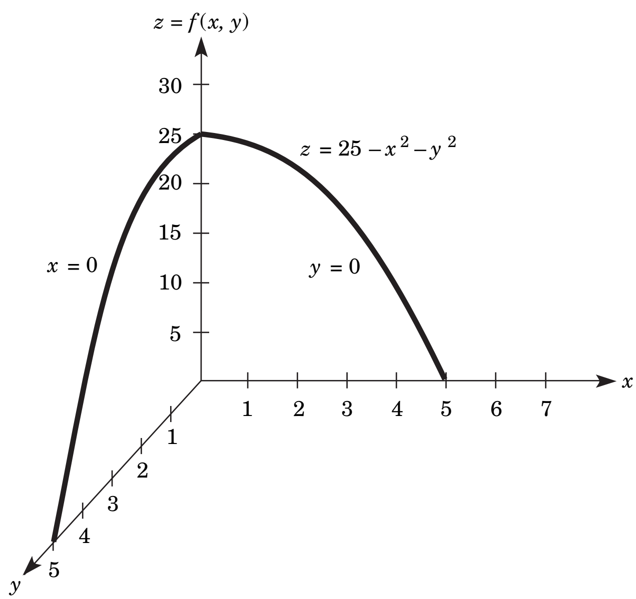


Figura 20.2 Gráfica parcial de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

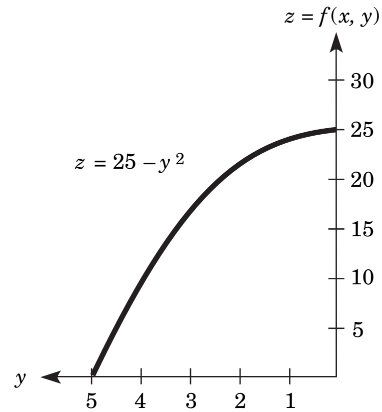


Figura 20.3 Traza con $x = 0$ vista a lo largo del eje x.

Y si se examina atentamente la figura 20.2 en una dirección paralela al eje x, se verá que la gráfica de esta ecuación es una parte de la parábola cóncava hacia abajo. La figura 20.3 contiene lo que se vería si se observara a lo largo del eje x.

Definición: Traza

Si $z = f(x, y)$, una traza es la gráfica de f cuando una variable se mantiene constante.

Observe la figura 20.2. Las dos partes de f que allí se muestran son *trazas*. Una es una traza cuando $y = 0$, en tanto que la otra es una traza donde $x = 0$. Cada traza representa una *costilla* en la superficie que simboliza la función.

La figura 20.4 presenta una gráfica de la función que incluye cuatro trazas adicionales. Haciendo $y = 1$, la función se convierte en

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 25 - x^2 - 1^2 \\ &= 24 - x^2 \end{aligned}$$

La traza que representa a esta función es paralela al plano xz y se encuentra una unidad fuera a lo largo del eje positivo y. De manera análoga, si se hace $y = 3$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 25 - x^2 - 3^2 \\ &= 16 - x^2 \end{aligned}$$

La traza que representa a esta función tiene una gráfica paralela al plano xz y tres unidades fuera a lo largo del eje y.

También se han dibujado las trazas haciendo que $x = 1$ y $x = 3$. Estas seis trazas en combinación comienzan a parecerse a la estructura esquelética de la superficie. Y si se tuviera que graficar más trazas asociadas a otros supuestos valores de x y y se obtendría una representación más exacta de la superficie que representa a f, similar a la parte sombreada de la figura 20.4.

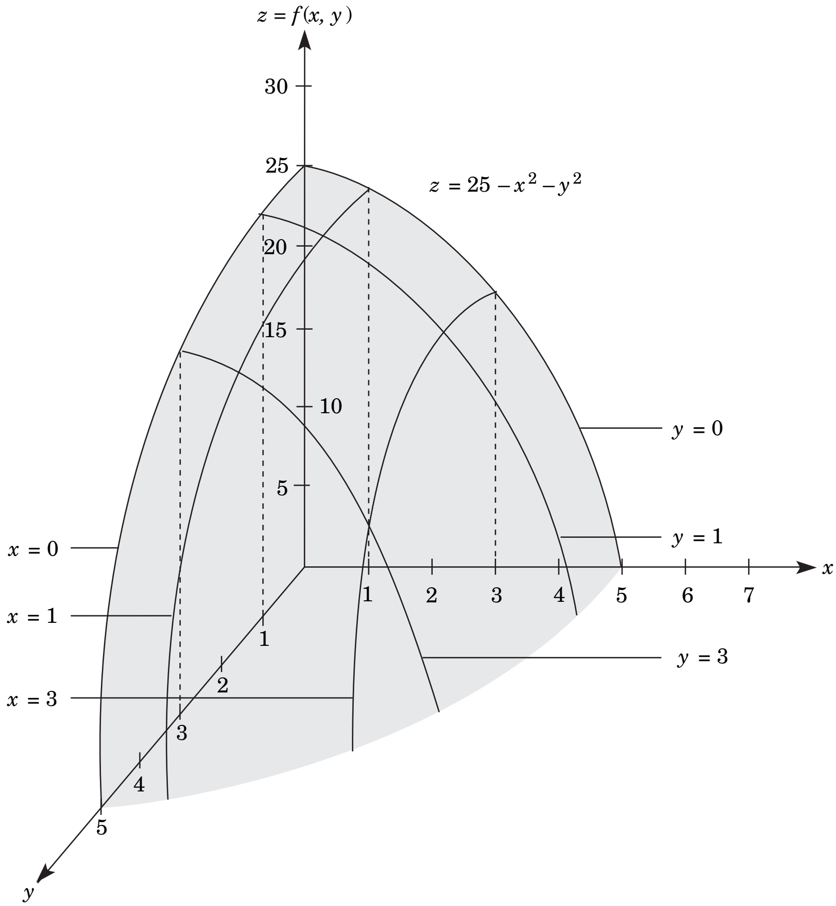


Figura 20.2 Gráfica de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

Por lo tanto, un procedimiento que puede en ocasiones ofrecer una gráfica aproximada de una función de la forma $z = f(x, y)$ consiste en suponer valores selectos de x y y, para luego graficar las trazas que representan las funciones resultantes.

NOTA Conviene tener presente en este momento una observación importante en relación con la gráfica de una función $f(x, y)$. *Siempre que se mantiene constante x, la traza resultante se grafica en un plano paralelo al plano yz. Siempre que se mantiene constante y, la gráfica de la traza resultante se hace en un plano paralelo al plano xz.*

Sección 20.1 Ejercicios de seguimiento

Trace la gráfica de las siguientes funciones.

1. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 4$
2. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 3$
3. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$
4. $f(x, y) = 25 - x^2/4 - y^2/4$, donde $0 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 10$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$

20.2 Derivadas parciales

Aunque más complejo, el cálculo de las funciones bivariadas se asemeja mucho al de las funciones de una sola variable. En la presente sección se hablará de las derivadas de estas funciones y de su interpretación.

Derivadas de funciones de dos variables

En las funciones de una sola variable, la derivada representa la tasa instantánea de cambio en la variable dependiente respecto del que se opera en la variable independiente. En las funciones bivariadas se tienen dos ***derivadas parciales***. Estas derivadas representan la tasa instantánea de cambio en la variable dependiente respecto de los cambios de las dos variables independientes, tomadas por separado. En una función $z = f(x, y)$, puede calcularse una derivada parcial respecto de cada variable independiente. La derivada parcial tomada respecto de x se denota mediante

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{o} \quad f_x$$

La derivada parcial tomada respecto de y se indica mediante

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{o} \quad f_y$$

Aunque ambas formas pueden utilizarse para denotar la derivada parcial, en este capítulo se utilizará la notación con subíndices f_x y f_y.

Definición: Derivada parcial

En la función $z = f(x, y)$, la derivada parcial de z respecto de x en (x, y) es

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

a condición de que exista el límite. La derivada parcial de z respecto de y en (x, y) es

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

suponiendo que exista el límite.

Ejemplo 1 Considere la función

$$f(x, y) = 3x^2 + 5y^3$$

Para calcular la derivada parcial respecto de x, se usará el *método del límite* (explicado en la sección 15.3). Primero se forma el cociente de la diferencia como

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \frac{3(x + \Delta x)^2 + 5y^3 - (3x^2 + 5y^3)}{\Delta x} \\
&= \frac{3(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) + 5y^3 - 3x^2 - 5y^3}{\Delta x}
\end{aligned}$$

que, al simplificarse, da

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{6x\,\Delta x + 3\,\Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{\cancel{\Delta x}\,(6x + 3\,\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
&= 6x + 3\,\Delta x
\end{aligned}$$

La derivada parcial es

$$\begin{aligned}
f_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) \\
&= 6x
\end{aligned}$$

Nótese que al calcular f_x se están examinando los efectos que producen los cambios de x (es decir, Δx); la otra variable y independiente se mantiene constante.

La derivada parcial tomada respecto de y puede obtenerse de modo similar.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} &= \frac{\Delta f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \frac{3x^2 + 5(y + \Delta y)^3 - (3x^2 + 5y^3)}{\Delta y} \\
&= \frac{3x^2 + 5(y^3 + 3y^2\,\Delta y + 3y\,\Delta y^2 + \Delta y^3) - 3x^2 - 5y^3}{\Delta y} \\
&= \frac{\cancel{3x^2} + \cancel{5y^3} + 15y^2\,\Delta y + 15y\,\Delta y^2 + 5\,\Delta y^3 - \cancel{3x^2} - \cancel{5y^3}}{\Delta y} \\
&= \frac{\cancel{\Delta y}\,(15y^2 + 15y\,\Delta y + 5\,\Delta y^2)}{\cancel{\Delta y}} \\
&= 15y^2 + 15y\,\Delta y + 5\,\Delta y^2
\end{aligned}$$

La derivada parcial es

$$\begin{aligned} f_y &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} (15y^2 + 15y\,\Delta y + 5\,\Delta y^2) \\ &= 15y^2 \end{aligned}$$

Al determinar f_y se están examinando los efectos de los cambios de y (o sea, Δy); la otra variable x independiente se mantiene constante.

Ejemplo 2 Considere la función

$$f(x, y) = 5x^2y$$

Al aplicar el método del límite para calcular las derivadas parciales,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{5(x + \Delta x)^2y - 5x^2y}{\Delta x} \\ &= \frac{5(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2)y - 5x^2y}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{5x^2y} + 10xy\,\Delta x + 5y\,\Delta x^2 - \cancel{5x^2y}}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{\Delta x}\,(10xy + 5y\,\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 10xy + 5y\,\Delta x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (10xy + 5y\,\Delta x) \\ &= 10xy \end{aligned}$$

Para determinar f_y

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} &= \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{5x^2(y + \Delta y) - 5x^2y}{\Delta y} \\ &= \frac{\cancel{5x^2y} + 5x^2\Delta y - \cancel{5x^2y}}{\Delta y} \\ &= 5x^2 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} f_y &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} 5x^2 \\ &= 5x^2 \end{aligned}$$

❑

Por fortuna, las derivadas parciales se obtienen más fácilmente empleando las mismas reglas de diferenciación utilizadas en los capítulos 15 a 17. La única excepción es que, *cuando se encuentra una derivada parcial respecto de una variable independiente, se supone que se mantiene constante a la otra*. Por ejemplo, al calcular la derivada parcial respecto de x, se supone que y es constante. Y un punto muy importante es que *la variable que se supone constante debe tratarse como una constante al aplicar las reglas de diferenciación.*

Ejemplo 3 Encuentre las derivadas parciales respecto de f_x y f_y para la función

$$f(x, y) = 5x^2 + 6y^3$$

SOLUCIÓN

Primero, para determinar la derivada parcial respecto de x se supondrá que y es constante. Al diferenciar término por término, se observa que la derivada de $5x^2$ respecto de x es $10x$. Al diferenciar el segundo término, no se olvide que se supone que y es constante. Así pues, este término presenta la forma general

$$6(\text{constante})^3$$

que es simplemente una constante. Una constante no cambia de valor al hacerlo otras variables (o, como se señaló en el capítulo 15, la derivada de una constante es 0), por lo cual la derivada del segundo término es 0. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f_x &= 10x + 0 \\ &= 10x \end{aligned}$$

Al encontrar la derivada parcial respecto de y, se supone que se mantiene constante la variable x. Al diferenciar término por término, $5x^2$ se considera como constante, ya que x se supone constante y la derivada es 0. La derivada de $6y^3$ respecto de y es $18y^2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} f_y &= 0 + 18y^2 \\ &= 18y^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Encuentre f_x y f_y para la función

$$f(x, y) = 4xy$$

SOLUCIÓN

Para calcular f_x se supone que y es constante. El término $4xy$ tiene la forma de un producto. Para diferenciar tales términos de producto, pueden aplicarse dos métodos. El primero consiste en usar simplemente la regla del producto. Al considerar $4xy$ como el producto $4x$ y y, con la regla de producto se obtiene

$$f_x = (4)(y) + (0)(4x)$$

o bien

$$f_x = 4y$$

Otro método consiste en recordar cuál variable se supone que era constante. Cuando y se mantiene constante, puede rearreglarse $4xy$ para que tenga la forma

$$\boldsymbol{f(x, y) = \text{constante} \cdot x}$$

o bien

$$f(x, y) = (4y)x$$

Al agrupar 4 y y, este término presenta la forma general de una constante $4y$ por x. Y la derivada de una constante multiplicada por x es la constante, o

$$f_x = 4y$$

Para calcular f_y, se supone que x es constante. Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$f_y = (0)(y) + (1)(4x)$$

o bien

$$f_y = 4x$$

O usando el otro procedimiento, el factor $4x$ es constante (al mantener constante x) y puede considerarse que f tiene la forma

$$\boldsymbol{f(x, y) = \text{constante} \cdot y}$$
$$= (4x)y$$

La derivada respecto de y es la constante, o bien

$$f_y = 4x$$

Ejemplo 5

Encuentre f_x y f_y si

$$f(x, y) = -10xy^3$$

SOLUCIÓN

Para calcular f_x deberá suponerse que y es constante. Esta función puede rearreglarse (mental o explícitamente) para que tenga la forma

$$f(x, y) = (\text{constante})x = (-10y^3)x$$

donde $-10y^3$ es constante. La derivada es

$$f_x = -10y^3$$

Para f_y puede considerarse que la función tiene la forma

$$(\text{constante})y^3 \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{(-10x)}y^3$$

La derivada respecto de y es

$$\boldsymbol{(\text{constante})(3y^2)}$$

o bien

$$f_y = -30xy^2$$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique las expresiones para f_x y f_y calculándolas utilizando ahora la regla del producto.

Ejemplo 6 Calcule f_x y f_y si

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

SOLUCIÓN

Al aplicar las reglas de diferenciación de las funciones exponenciales,

$$f_x = (2x + 0)e^{x^2+y^2} = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$f_y = (0 + 2y)e^{x^2+y^2} = 2ye^{x^2+y^2}$$

Ejemplo 7 Encuentre f_x y f_y si

$$f(x, y) = (3x - 2y^2)^3$$

SOLUCIÓN

Al recordar la potencia de una regla de función se obtiene

$$\begin{aligned} f_x &= 3(3x - 2y^2)^2(3) \\ &= 9(3x - 2y^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= 3(3x - 2y^2)^2(-4y) \\ &= -12y(3x - 2y^2)^2 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Dada $f(x, y) = (4x^2 - 5y^3)^4$, encuentre f_x y f_y. *Respuesta:* $f_x = 32x(4x^2 - 5y^3)^3$, $fy = -60y^2(4x^2 - 5y^3)^3$.

Interpretación de las derivadas parciales

Una interpretación de las derivadas parciales se refiere a la pendiente de la tangente. Como en el caso de las funciones de una sola variable, las derivadas parciales f_x y f_y tienen una interpretación de la pendiente de una tangente.

Interpretación como pendiente de f_x y f_y

I *f_x es una expresión general para la pendiente de la tangente de la familia de trazas paralelas al plano xz.*

> **II** *f_y es una expresión general para la pendiente de la tangente de la familia de trazas paralelas al plano yz.*

La derivada parcial f_x estima el cambio en z cuando se da un cambio en x, suponiendo que y se mantenga constante. En la sección 20.1 se vio que, cuando y es mantenida constante, las trazas correspondientes se grafican paralelas al plano xz. La pendiente de esas trazas la representa f_x.

De manera semejante, f_y supone que x se conserva constante. Cuando se mantuvo constante x en la sección 20.1, el resultado fue una familia de trazas paralelas al plano yz. Y f_y representa la pendiente de esas trazas. La figura 20.5 muestra la representación de la pendiente.

La otra interpretación de las derivadas parciales es la de la tasa instantánea de cambio. Como en el caso de las funciones de una sola variable, las derivadas parciales pueden emplearse para aproximar los cambios de valor de la variable dependiente, si se produce un

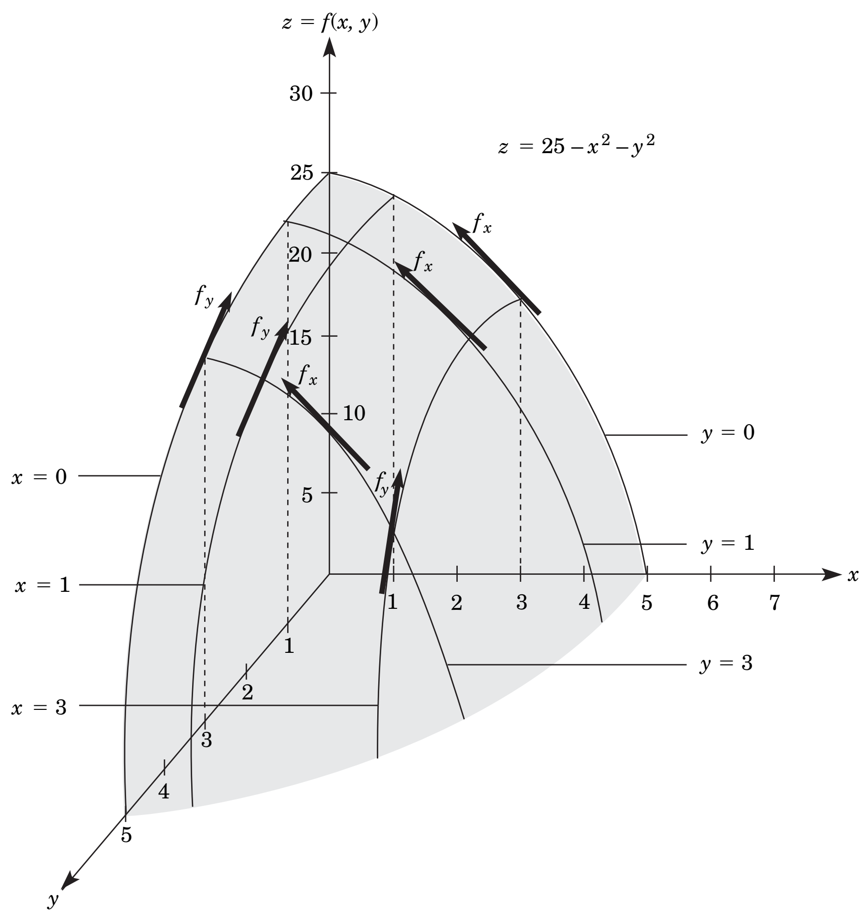


Figura 20.5 Representación de las derivadas parciales a partir de la pendiente de la tangente.

cambio en una de las variables independientes. Por ejemplo, f_x puede servir para aproximar el cambio de $f(x, y)$, cuando se da un cambio en x y se supone que y es constante. La derivada parcial f_y puede utilizarse para aproximar el cambio de $f(x, y)$, dado un cambio en y, suponiendo que x es constante. El siguiente ejemplo ilustra esta interpretación.

Ejemplo 8

(Interrelaciones de la demanda de varios productos) Hasta ahora se ha supuesto que la demanda de un producto depende, exclusivamente, de su precio. Así, las *funciones de demanda* analizadas presentan la forma

$$q = f(p)$$

Con frecuencia, la demanda de un producto o servicio recibe el influjo no sólo de su precio, sino también de los precios de otros productos o servicios. La ecuación (20.5) es una función de demanda que expresa la cantidad demandada del producto 1 (q_1) en términos de su precio (p_1) y también de los precios de otros dos productos (p_2 y p_3), todos ellos expresados en dólares.

$$\boxed{q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 10\,000 - 2.5p_1 + 3p_2 + 1.5p_3} \qquad \textbf{(20.5)}$$

Las derivadas parciales de esta función de demanda pueden ofrecer una medida de la respuesta instantánea de la demanda ante los cambios en los precios de los tres productos. Por ejemplo,

$$f_{p_1} = -2.5$$

sugiere que, si p_2 y p_3 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 *disminuirá* a una tasa instantánea de 2.5 unidades por cada unidad (dólar) que aumente p_1. De modo análogo, las derivadas parciales

$$f_{p_2} = 3 \quad \text{y} \quad f_{p_3} = 1.5$$

indican las tasas instantáneas de cambio en la demanda asociada a los que se producen en los precios de los otros dos productos. $f_{p_2} = 3$ sugiere que la demanda del producto 1 *aumentará* a una tasa instantánea de tres unidades por cada unidad (dólar) que aumente p_2 (se mantienen constantes p_1 y p_3 y $f_{p_3} = 1.5$ indica que la demanda del producto 1 *crecerá* a una tasa instantánea de 1.5 unidades por cada unidad (dólar) que p_3 aumente (se mantienen constantes p_1 y p_2).

Haga en seguida un par de observaciones. En primer lugar, esta función de demanda es lineal y las correspondientes derivadas parciales son constantes. Es decir, las tasas instantáneas de cambio son realmente las mismas en cualquier parte del dominio de la función de demanda. En segundo lugar, el hecho de que la demanda del producto 1 *aumente* al incrementarse los precios de los productos 2 y 3 revela una interdependencia entre los tres productos. Éste es el tipo de relación que cabría esperar que exista entre *productos en competencia*. Entre los ejemplos de este tipo de bienes conviene citar las diferentes marcas de un mismo producto (por ejemplo, las llantas radiales) o los productos que pueden servir para satisfacer una necesidad determinada (como margarina *vs*. mantequilla, carne de res *vs*. carne de pollo). En el caso de esta categoría de bienes de consumo cabría esperar que, conforme se incremente el precio de un producto, disminuya su demanda y la de los productos en competencia aumente. De manera análoga, a medida que descienda el precio de un producto, cabría esperar que su demanda aumente y la de los productos de la competencia disminuya. Éste es el tipo de comportamiento ejemplificado por la función de demanda en la ecuación (20.5) y sus derivadas parciales. ❑

Ejercicio de práctica

En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 120\,000 - 0.5p_1^2 - 0.4p_2^2 - 0.2p_3^2$$

a) Calcule todas las derivadas parciales. *b*) Si los precios actuales de los tres productos son $p_1 = 10$, $p_2 = 20$ y $p_3 = 30$, evalúe las derivadas parciales e interprete su significado. *c*) ¿Qué sugerirán la función de demanda y sus derivadas parciales respecto de la interdependencia entre los tres productos? *Respuesta: a*) $f_{p_1} = -p_1, f_{p_2} = -0.8p_2, f_{p_3} = -0.4p_3$; *b*) $f_{p_1}(10, 20, 30) = -10, f_{p_2}(10, 20, 30) = -16, f_{p_3}(10, 20, 30) = -12$; *c*) son productos complementarios.

Ejemplo 9

(Gastos de publicidad) Un fabricante nacional estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica esta relación es

$$z = 50\,000x + 40\,000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$$

donde *z es el número de unidades vendidas al año, x denota la cantidad destinada a la publicidad por televisión y la y indica la cantidad gastada en la publicidad por radio (ambas en miles)*.

Suponga que la empresa está gastando actualmente \$40 000 en la publicidad por televisión ($x = 40$) y \$20 000 en la publicidad por radio ($y = 20$). Con estos gastos,

$$\begin{aligned} f(40, 20) &= 50\,000(40) + 40\,000(20) - 10(40)^2 - 20(20)^2 - 10(40)(20) \\ &= 2\,000\,000 + 800\,000 - 16\,000 - 8\,000 - 8\,000 = 2\,768\,000 \end{aligned}$$

o se proyecta que se vendan 2 768 000 unidades.

Supóngase que se quiere determinar el efecto en las ventas anuales si se destinan \$1 000 o más dólares a la publicidad por televisión. La derivada parcial f_x debería dar una aproximación del efecto; esta derivada parcial es

$$f_x = 50\,000 - 20x - 10y$$

Como se quiere conocer la tasa instantánea de cambio y como los gastos son actualmente \$40 000 y \$20 000, se evalúa f_x cuando $x = 40$ y cuando $y = 20$:

$$\begin{aligned} f_x(40, 20) &= 50\,000 - 20(40) - 10(20) \\ &= 50\,000 - 800 - 200 = 49\,000 \end{aligned}$$

Al evaluar la derivada parcial, puede afirmarse que un incremento de los gastos de \$1 000 destinados a la televisión debería producir ventas adicionales de *aproximadamente* 49 000 unidades.
Para determinar la exactitud de esta aproximación, se evaluará $f(41, 20)$:

$$\begin{aligned} f(41, 20) &= 50\,000(41) + 40\,000(20) - 10(41)^2 - 20(20)^2 - 10(41)(20) \\ &= 2\,050\,000 + 800\,000 - 16\,810 - 8\,000 - 8\,200 = 2\,816\,990 \end{aligned}$$

El *aumento real* de las ventas se proyecta como

$$f(41, 20) - f(40, 20) = 2\,816\,990 - 2\,768\,000$$
$$= 48\,990 \text{ unidades}$$

La diferencia entre los incrementos real y estimado usando f_x es de 48 990 − 49 000 = −10 unidades. El signo de menos indica que la derivada parcial *sobreestimó* el cambio verdadero.

Supóngase ahora que se quiere determinar el efecto, si se destinan \$1 000 más a la publicidad por radio y no a la publicidad por televisión. La derivada parcial tomada con respecto de y aproximará este cambio:

$$f_y = 40\,000 - 40y - 10x$$

Al evaluar f_y cuando $x = 40$ y cuando $y = 20$, se obtiene

$$f_y(40, 20) = 40\,000 - 40(20) - 10(40)$$
$$= 40\,000 - 800 - 400 = 38\,800$$

Así pues, un aumento de \$1 000 en los gastos de publicidad por radio originará un *incremento aproximado* de 38 800 unidades. Con un aumento de \$1 000 en los gastos de este tipo de publicidad, las ventas reales se estiman en

$$f(40, 21) = 50\,000(40) + 40\,000(21) - 10(40)^2 - 20(21)^2 - 10(40)(21)$$
$$= 2\,000\,000 + 840\,000 - 16\,000 - 8\,820 - 8\,400 = 2\,806\,780 \text{ unidades}$$

El *incremento real* en las ventas es

$$f(40, 21) - f(40, 20) = 2\,806\,780 - 2\,768\,000$$
$$= 38\,780 \text{ unidades}$$

También en este caso, el cambio aproximado estimado empleando f_y presenta un error de apenas 20 unidades.

Desde el punto de vista comparativo, si se asignan \$1 000 a la publicidad por televisión o radio, es evidente que el rendimiento mayor provendrá de la televisión. ❑

Derivadas de segundo orden

Igual que en el caso de las funciones de una sola variable, se pueden determinar derivadas de segundo orden para las funciones bivariadas. Éstas serán de gran importancia en la siguiente sección cuando se trate de optimizar el valor de una función.

Para las funciones de la forma $f(x, y)$ existen *cuatro* diferentes derivadas de segundo orden. Éstas se dividen en dos tipos: ***derivadas parciales puras de segundo orden*** y ***derivadas parciales mixtas***. Las dos derivadas parciales se denotan con f_{xx} y f_{yy}. La derivada parcial pura de segundo orden respecto de x, f_{xx} se calcula obteniendo primero f_x y luego diferenciando f_x respecto de x. De manera parecida, f_{yy} se obtiene determinando la expresión para f_y y luego diferenciando f_y respecto de y.

Las dos derivadas parciales mixtas se denotan mediante f_{xy} y f_{yx}. La derivada parcial mixta f_{xy} se obtiene determinando fx y luego diferenciando fx respecto de y. De modo análogo, f_{yx} se encuentra determinando f_y para luego diferenciar f_y respecto de x. La figura 20.6 sintetiza los procedimientos con que se obtienen las derivadas de segundo orden.

Derivadas parciales de primer orden		Derivadas parciales de segundo orden	
f_x	diferenciar respecto de x	f_{xx}	(derivada parcial pura de segundo orden)
	diferenciar respecto de y	f_{xy}	(derivada parcial mixta)
f_y	diferenciar respecto de y	f_{yy}	(derivada parcial pura de segundo orden)
	diferenciar respecto de x	f_{yx}	(derivada parcial mixta)

Figura 20.6 Determinación de las derivadas de segundo orden.

Ejemplo 10 Determine las derivadas de primero y segundo órdenes para la función

$$f(x, y) = 8x^3 - 4x^2y + 10y^3$$

SOLUCIÓN
Se empieza con las primeras derivadas:

$$f_x = 24x^2 - 8xy$$
$$f_y = -4x^2 + 30y^2$$

La derivada parcial pura f_{xx} se calcula al diferenciar f_x respecto de x, o sea

$$f_x = 24x^2 - 8xy \quad \rightarrow \quad f_{xx} = 48x - 8y$$

f_{yy} se obtiene al diferenciar f_y respecto de y, es decir,

$$f_y = -4x^2 + 30y^2 \quad \rightarrow \quad f_{yy} = 60y$$

La derivada parcial mixta f_{xy} se calcula al diferenciar f_x respecto de y, o sea

$$f_x = 24x^2 - 8xy \quad \rightarrow \quad f_{xy} = -8x$$

f_{yx} se obtiene diferenciando f_y respecto de x, esto es,

$$f_y = -4x^2 + 30y^2 \quad \rightarrow \quad f_{yx} = -8x$$ ❑

NOTA Una proposición conocida con el nombre de **teorema de Young** establece que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales entre sí a condición de que ambas sean continuas. Obsérvese que esta condición se cumple en el ejemplo 10. Esta propiedad ofrece una posible comprobación de los errores que pudieran haberse cometido al calcular f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}.

No nos detendremos en la interpretación de estas derivadas de segundo orden. Sin embargo, conviene hacer algunas precisiones. Las derivadas parciales puras f_{xx} y f_{yy} transmiten información sobre la concavidad de una función (lo mismo que la segunda derivada en relación con las funciones de una sola variable). En concreto, ***f_{xx} suministra información sobre la concavidad de las trazas que son paralelas al plano xz. De manera semejante f_{yy} proporciona información acerca de la concavidad de las trazas paralelas al plano yz***.

La interpretación de las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} es menos intuitiva que en el caso de las derivadas parciales puras. No obstante, serán muy importantes en la siguiente sección.

Sección 20.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 40, determine f_x y f_y.

1. $f(x, y) = 3x^2 - 10y^3$
2. $f(x, y) = -2x + 3y$
3. $f(x, y) = 10x^2 + 2xy - 6y^2$
4. $f(x, y) = x^2 - 2y^3$
5. $f(x, y) = x^3y^5$
6. $f(x, y) = 25xy^3$
7. $f(x, y) = 6x^2 - xy + 30y^2$
8. $f(x, y) = 20x^2 + 7x^2y^3 + 5y^3$
9. $f(x, y) = -4/xy^2$
10. $f(x, y) = -2x/3y^2$
11. $f(x, y) = (x^2 - 5y)(2x + 4y^5)$
12. $f(x, y) = (1/x)(y^2 + 3y^3)$
13. $f(x, y) = (x - y)^4$
14. $f(x, y) = (x^3 + 3y^2)^4$
15. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
16. $f(x, y) = -20/\sqrt[3]{x + 2y}$
17. $f(x, y) = \ln(x + y)$
18. $f(x, y) = e^{3x-2y}$
19. $f(x, y) = e^{5x^3-2y^2}$
20. $f(x, y) = e^{2x} \ln y$
21. $f(x, y) = 3x^4 - 8x^2y^3$
22. $f(x, y) = 10x^2 - 25xy + 30y^3$
23. $f(x, y) = -3x^3 + 8xy^2 + y^3$
24. $f(x, y) = 15y^3 - 5yx^3 + 25$
25. $f(x, y) = 2x^2/3y^3$
26. $f(x, y) = -x/y^3$
27. $f(x, y) = (x - y)/x^5$
28. $f(x, y) = (3x - y^2)/(x^2 + 1)$
29. $f(x, y) = -5x^2/(x + y)$
30. $f(x, y) = 3y^2/(x^2 - 5y)$
31. $f(x, y) = (x - y)^3$
32. $f(x, y) = (8x - 3y)^4$
33. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2y^2}$
34. $f(x, y) = \sqrt[4]{4x^3 + 2y^2}$
35. $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$
36. $f(x, y) = \ln(x^2 - 4xy + y^2)$
37. $f(x, y) = e^{x^2y}$
38. $f(x, y) = e^{xy^3}$
39. $f(x, y) = e^x \ln y$
40. $f(x, y) = e^{y^2} \ln x$

En los ejercicios 41 a 60, encuentre todas las derivadas de segundo orden.

41. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^3 + 10$
42. $f(x, y) = x^2 - 3x + 4y^3 + 2y$
43. $f(x, y) = 5x^3 - 3xy + 3y^2$
44. $f(x, y) = -20x^5 + 10xy + 6y^3$
45. $f(x, y) = x^3y^4$
46. $f(x, y) = -10xy^3$
47. $f(x, y) = e^{x+y}$
48. $f(x, y) = \ln(x + y)$
49. $f(x, y) = e^{xy}$
50. $f(x, y) = e^y \ln x$
51. $f(x, y) = (x - y)^5$
52. $f(x, y) = (y - x)^4$
53. $f(x, y) = x^4y^2$
54. $f(x, y) = x^2y^5$
55. $f(x, y) = x/y^2$
56. $f(x, y) = y/x^2$
57. $f(x, y) = (6x - 8y)^{3/2}$
58. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
59. $f(x, y) = \ln x^3y^2$
60. $f(x, y) = \ln 3xy^3$

61. En $f(x, y) = 100x^2 + 200y^2 - 10xy$:
a) Determine $f(10, 20)$.

b) Haciendo uso de las derivadas parciales, estime el cambio esperado en $f(x, y)$, si x aumenta en una unidad.

c) Compare el cambio real con el cambio estimado.

d) Repita los incisos *b*) y *c*), suponiendo un posible incremento de una unidad en y.

62. En $f(x, y) = 20x^3 - 30y^3 + 10x^2y$:

a) Determine $f(20, 10)$.

b) Haciendo uso de las derivadas parciales, estime el cambio esperado en $f(x, y)$, si x aumenta en una unidad.

c) Compare el cambio real con el cambio estimado.

d) Repita los incisos *b*) y *c*), suponiendo un posible incremento de una unidad en y.

63. Una empresa estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos de publicidad por radio y televisión. La función que expresa esta relación es

$$z = 2\,000x + 5\,000y - 20x^2 - 10y^2 - 50xy$$

donde z es el número de unidades vendidas, x indica la cantidad destinada a la publicidad por televisión y la y denota la cantidad que se gasta en publicidad por radio (las dos últimas variables se expresan en miles de dólares). En la actualidad, la firma está destinando \$50 000 a la publicidad por televisión y \$30 000 a la publicidad por radio.

a) ¿Cuáles se espera que sean las ventas anuales?

b) Usando derivadas parciales, estime el efecto en las ventas anuales, si se asignan \$1 000 más a la publicidad por televisión.

c) Empleando derivadas parciales, estime el efecto en las ventas anuales si se asignan \$1 000 más a la publicidad por radio.

d) ¿En qué tipo de publicidad se obtienen mejores resultados con una inversión de \$1 000?

64. En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 25\,000 - 0.1p_1^2 - 0.5p_2^2$$

a) Determine las derivadas parciales f_{p_1} y f_{p_2}.

b) Si $p_1 = 20$ y $p_2 = 10$, evalúe f_{p_1} y f_{p_2} e interprete su significado.

c) ¿Cómo se interrelacionan esos tres productos entre sí?

65. En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 250\,000 - 0.5p_1^2 + p_2^2 + 0.4p_3^2$$

a) Determine las derivadas parciales f_{p_1}, f_{p_2} y f_{p_3}.

b) Si $p_1 = 30$, $p_2 = 10$ y $p_3 = 20$, evalúe las derivadas parciales e interprete su significado.

c) ¿Cómo se interrelacionan los dos productos entre sí?

20.3 Optimización de las funciones de dos variables

El proceso de encontrar los valores óptimos de las funciones bivariadas es muy parecido al que se aplicó en el caso de las funciones de una sola variable. En la presente sección se explicará ese proceso.

Puntos críticos

Igual que con las funciones de una sola variable, nos concentraremos en identificar los puntos máximo y mínimo relativos en la superficie que representa una función $f(x, y)$.

Dichos puntos tienen en dos dimensiones el mismo significado que en tres.

Definición: Máximo relativo

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***máximo relativo*** cuando $x = a$ y $y = b$ si para todos los puntos (x, y) "suficientemente cercanos" a (a, b),

$$f(a, b) \geq f(x, y)$$

Un máximo relativo suele aparecer en la parte superior o pico de una cresta de la superficie que representa a $f(x, y)$.

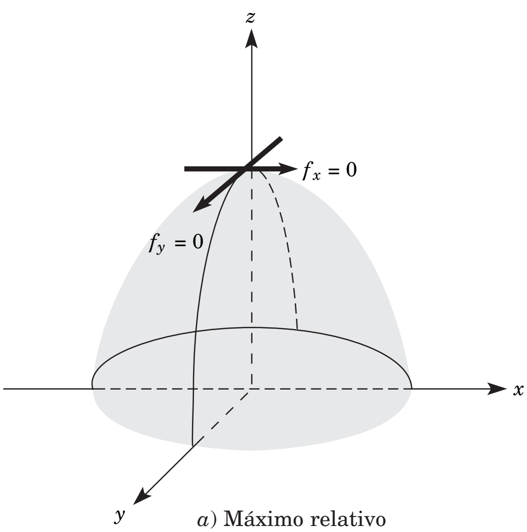
Definición: Mínimo relativo

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***mínimo relativo*** cuando $x = a$ y $y = b$ si para todos los puntos (x, y) "suficientemente cercanos" a (a, b),

$$f(a, b) \leq f(x, y)$$

Un mínimo relativo suele aparecer en la parte inferior de un valle sobre la superficie que representa a $f(x, y)$.

La figura 20.7 muestra tanto un punto máximo relativo como un punto mínimo relativo. Si el lector examina las condiciones de pendiente de una superficie plana en un máximo o mínimo relativo, debería llegar a la conclusión de que una línea tangente trazada en el punto en cualquier dirección tiene una pendiente de 0. Dado que las primeras derivadas parciales f_x y f_y representan expresiones generales de la pendiente de la tangente de trazas paralelas, respectivamente, a los planos xz y yz, puede afirmarse lo siguiente.



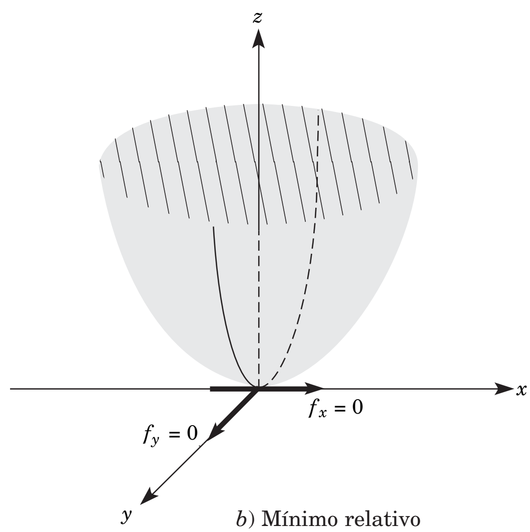


Figura 20.7 Extremos relativos en un espacio tridimensional.

Condición necesaria de extremos relativos

Una *condición necesaria* para la existencia de un máximo relativo o un mínimo relativo de una función f cuyas derivadas parciales f_x y f_y existen, establece que

$$f_x = 0 \quad \text{y} \quad f_y = 0 \tag{20.6}$$

Una parte importante de esta definición es que *tanto* f_x como f_y son 0. Como se aprecia en la figura 20.8, puede haber un número infinito de puntos en una superficie donde f_x sea 0. En la figura 20.8, una línea tangente trazada paralelamente al plano xz en cualquier parte de la traza AB mostrará una pendiente de 0 ($f_x = 0$). No obstante, el único punto donde *tanto* f_x como f_y son cero es en A. En los otros puntos a lo largo de AB una línea tangente trazada paralelamente al plano yz presenta una pendiente negativa ($f_y < 0$).

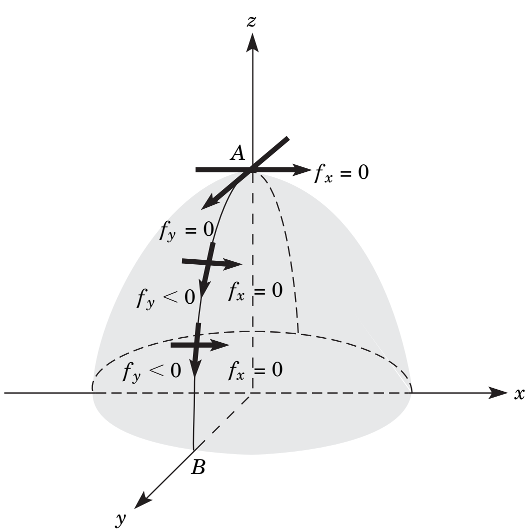


Figura 20.8 $f_x = 0$ a lo largo del trazo AB.

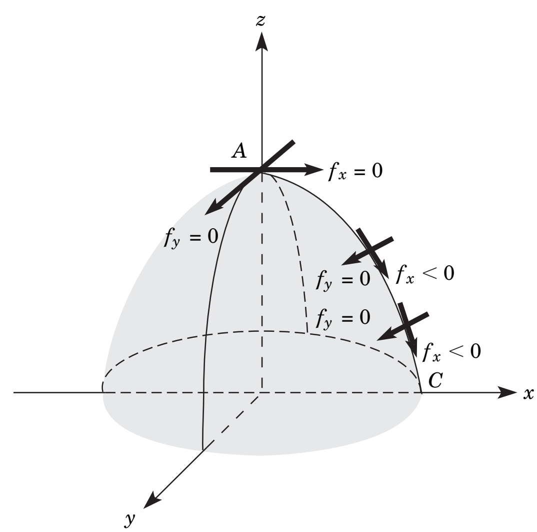


Figura 20.9 $f_y = 0$ a lo largo del trazo AC.

De manera similar, la figura 20.9 contiene una traza AC a lo largo de la cual $f_y = 0$, pero $f_x < 0$, salvo en el punto A.

Los valores de x^* y y^*, en que se satisface la ecuación (20.6), son los **valores críticos**. El punto correspondiente $(x^*, y^*, f(x^*, y^*))$ es candidato a convertirse en un máximo o mínimo relativo en f y recibe el nombre de **punto crítico**.

Ejemplo 11 Localice los puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$$

SOLUCIÓN

Encuentre primero las expresiones de f_x y f_y

$$f_x = 8x - 12$$
$$f_y = 2y + 2$$

Para determinar los valores de x y y en que f_x y f_y son iguales a 0,

$$f_x = 0 \text{ cuando } 8x - 12 = 0$$

o un valor crítico de x es $\qquad x = \frac{3}{2}$

$$f_y = 0 \text{ cuando } 2y + 2 = 0$$

o un valor crítico de y es $\qquad y = -1$

Sustituyendo estos valores en f,

$$\begin{aligned} f(\tfrac{3}{2}, -1) &= 4(\tfrac{3}{2})^2 - 12(\tfrac{3}{2}) + (-1)^2 + 2(-1) - 10 \\ &= 9 - 18 + 1 - 2 - 10 = -20 \end{aligned}$$

El único punto crítico de f ocurre en $(\frac{3}{2}, -1, -20)$.

Ejemplo 12 Para localizar los puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 8x + 10y - 5xy$$

se calculan las primeras derivadas parciales,

$$f_x = -4x + 8 - 5y$$
$$f_y = -2y + 10 - 5x$$

Los valores de x y y que hacen f_x y $f_y = 0$ se calculan al resolver las siguientes ecuaciones:

$$-4x + 8 - 5y = 0 \qquad \textbf{(20.7)}$$
$$-2y + 10 - 5x = 0 \qquad \textbf{(20.8)}$$

Al volver a escribir las ecuaciones anteriores queda

$$4x + 5y = 8 \qquad \textbf{(20.9)}$$
$$5x + 2y = 10 \qquad \textbf{(20.10)}$$

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación (20.9) por -2 y los dos de la ecuación (20.10) por 5 y se suman las ecuaciones resultantes, se obtendrá

$$\begin{array}{rcr} -8x - 10y &=& -16 \\ 25x + 10y &=& 50 \\ \hline 17x \qquad &=& 34 \end{array}$$

y un valor crítico de x será $\qquad x = 2$

Si se sustituye $x = 2$ en la ecuación (20.10), se encuentra que

$$5(2) + 2y = 10$$

$$2y = 0$$

y el valor crítico correspondiente de y es $\qquad y = 0$

Si se sustituyen los valores anteriores en f,

$$\begin{aligned} f(2, 0) &= -2(2)^2 - (0)^2 + 8(2) + 10(0) - 5(2)(0) \\ &= -8 + 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Así pues, un punto crítico ocurre en (2, 0, 8).

Ejemplo 13 Para determinar cualquier punto crítico en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$$

se identifican las primeras derivadas parciales y se hacen iguales a 0.

$$f_x = 4x + 4y - 2xy - 4 = 0 \qquad \textbf{(20.11)}$$

$$f_y = 4x - x^2 = 0 \qquad \textbf{(20.12)}$$

Estas dos ecuaciones deben resolverse simultáneamente. Sin embargo, las ecuaciones no son lineales. En la ecuación (20.12), f_y será 0 cuando

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4 - x) = 0$$

o cuando los valores críticos son

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4$$

Para determinar los valores de y que corresponden a estos valores críticos de x y que hacen f_x igual a 0, se sustituirán estos valores, uno a la vez, en la ecuación (20.11).

***Para x* = 0**,

$$\begin{aligned} 4(0) + 4y - 2(0)y - 4 &= 0 \\ 4y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, un punto crítico ocurre en la gráfica de f cuando $x = 0$ y cuando $y = 1$. Si $x = 0$ y $y = 1$,

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 2(0)^2 + 4(0)(1) - (0)^2(1) - 4(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, se presenta un punto crítico en (0, 1, 0).
***Para x* = 4**,

$$\begin{aligned} 4(4) + 4y - 2(4)y - 4 &= 0 \\ 16 + 4y - 8y - 4 &= 0 \\ -4y &= -12 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} f(4, 3) &= 2(4)^2 + 4(4)(3) - (4)^2(3) - (4)(4) \\ &= 32 + 48 - 48 - 16 = 16 \end{aligned}$$

otro punto crítico ocurre en f en (4, 3, 16). ❑

Cómo distinguir los puntos críticos

Una vez identificado un punto crítico, es necesario determinar su naturaleza. Aparte de los puntos máximos y mínimos relativos, hay otro caso en que tanto f_x como f_y son 0.

La figura 20.10 muestra esa situación a la cual se le conoce con el nombre de ***punto en silla de montar***. Dicho punto es una parte de la superficie que tiene la forma de una silla

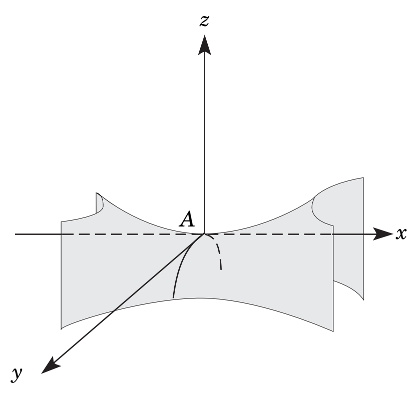


Figura 20.10 Punto en silla de montar.

de montar. En el punto A ("donde el jinete se sienta al montar un caballo"), los valores de f_x y f_y son 0. Sin embargo, la función no llega al máximo ni a un mínimo relativo en A. Si se divide a través de la superficie en el punto A con un plano que tenga la ecuación $x = 0$, el borde o traza resultante indica un máximo relativo en A. Sin embargo, si se divide a través de la superficie con el plano que se describe con la ecuación $y = 0$, el trazo resultante indica un mínimo relativo en A. La figura 20.11 contiene estas observaciones.

Las condiciones que permiten distinguir entre el máximo relativo, el mínimo relativo o los puntos en silla de montar se dan a continuación. La prueba de un punto crítico es una prueba de la segunda derivada (como se utilizó en los problemas de una sola variable) que, desde el punto de vista intuitivo, investiga las condiciones de concavidad en el punto crítico.

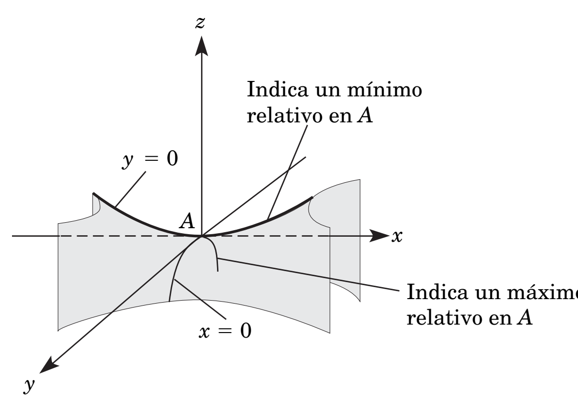


Figura 20.11 Signos contrarios de concavidad para el punto en silla de montar.

Prueba del punto crítico

Si se tiene un punto crítico de f localizado en (x^*, y^*, z^*) en que todas las segundas derivadas parciales sean continuas, determine el valor de $D(x^*, y^*)$, donde

$$D(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*)f_{yy}(x^*, y^*) - [f_{xy}(x^*, y^*)]^2 \quad \textbf{(20.13)}$$

I *Si $D(x^*, y^*) > 0$, el punto crítico es*

*a) un **máximo relativo** si tanto $f_{xx}(x^*, y^*)$ como $f_{yy}(x^*, y^*)$ son negativas*

*b) un **mínimo relativo** si tanto $f_{xx}(x^*, y^*)$ como $f_{yy}(x^*, y^*)$ son positivas.*

II *Si $D(x^*, y^*) < 0$, el punto crítico es un punto en silla de montar.*

III *Si $D(x^*, y^*) = 0$, se necesitan otras técnicas (que rebasan el alcance de este libro) para determinar la naturaleza del punto crítico.*

Ejemplo 14

En el ejemplo 11 se determinó que un punto crítico ocurre en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$$

Determine la naturaleza del punto crítico en $(\frac{3}{2}, -1, -20)$.

SOLUCIÓN

Del ejemplo 11,

$$f_x = 8x - 12$$
$$f_y = 2y + 2$$

Las cuatro derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = 8 \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_{yy} = 2 \qquad f_{yx} = 0$$

Al evaluar $D(x^*, y^*)$ se tiene

$$\begin{aligned} D(\tfrac{3}{2}, -1) &= (8)(2) - 0^2 \\ &= 16 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $D(\frac{3}{2}, -1) > 0$ y $f_{xx}(\frac{3}{2}, -1) = 8$ y $f_{yy}(\frac{3}{2}, -1) = 2$, ambas mayores que 0, se puede llegar a la conclusión de que un *mínimo relativo* ocurre en $(\frac{3}{2}, -1, -20)$. La figura 20.12 es una gráfica de la función. Esta gráfica, lo mismo que varias de las siguientes se generan con computadora empleando el paquete de graficación SAS y se trazan en una graficadora Calcomp.*

Ejemplo 15 Para determinar la localización y la naturaleza de cualquier punto crítico de la función

$$f(x, y) = -2x^2 + 24x - y^2 + 30y$$

las primeras derivadas parciales son

$$f_x = -4x + 24$$
$$f_y = -2y + 30$$

Haciendo f_x y f_y iguales a 0, se tiene que

$$f_x = -4x + 24 = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y = -2y + 30 = 0$$

Los valores críticos se identifican en

$$x = 6 \qquad \text{y} \qquad y = 15$$

Puesto que

$$\begin{aligned} f(6, 15) &= -2(6)^2 + 24(6) - (15)^2 + 30(15) \\ &= -72 + 144 - 225 + 450 \\ &= 297 \end{aligned}$$

existe un punto crítico en la gráfica de f en (6, 15, 297).

---

* SAS: Statistical Analysis System (Sistema de Análisis Estadístico), subrutina G3d.

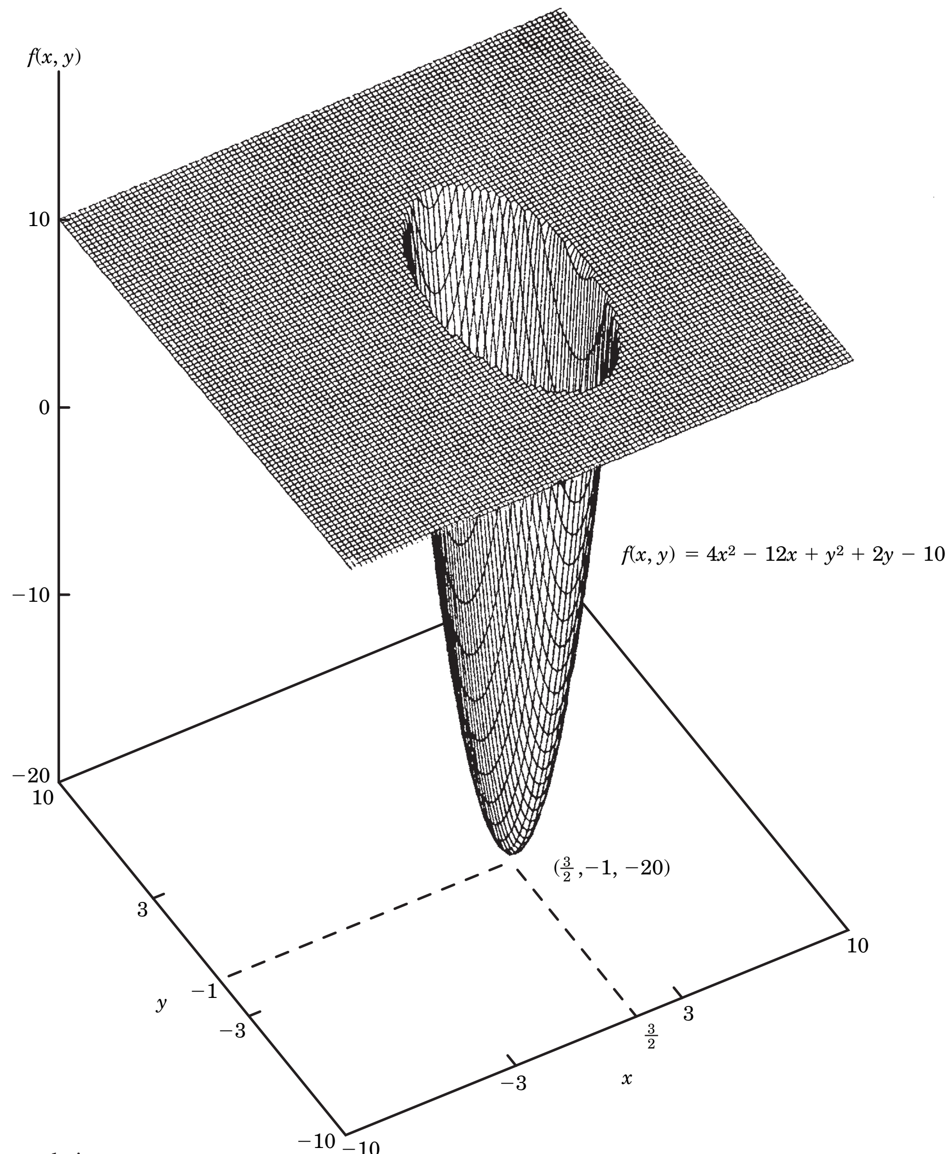


Figura 20.12 Mínimo relativo en $f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$.

Para determinar la naturaleza del punto crítico, las derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = -4 \qquad f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = -2 \qquad f_{yx} = 0$$

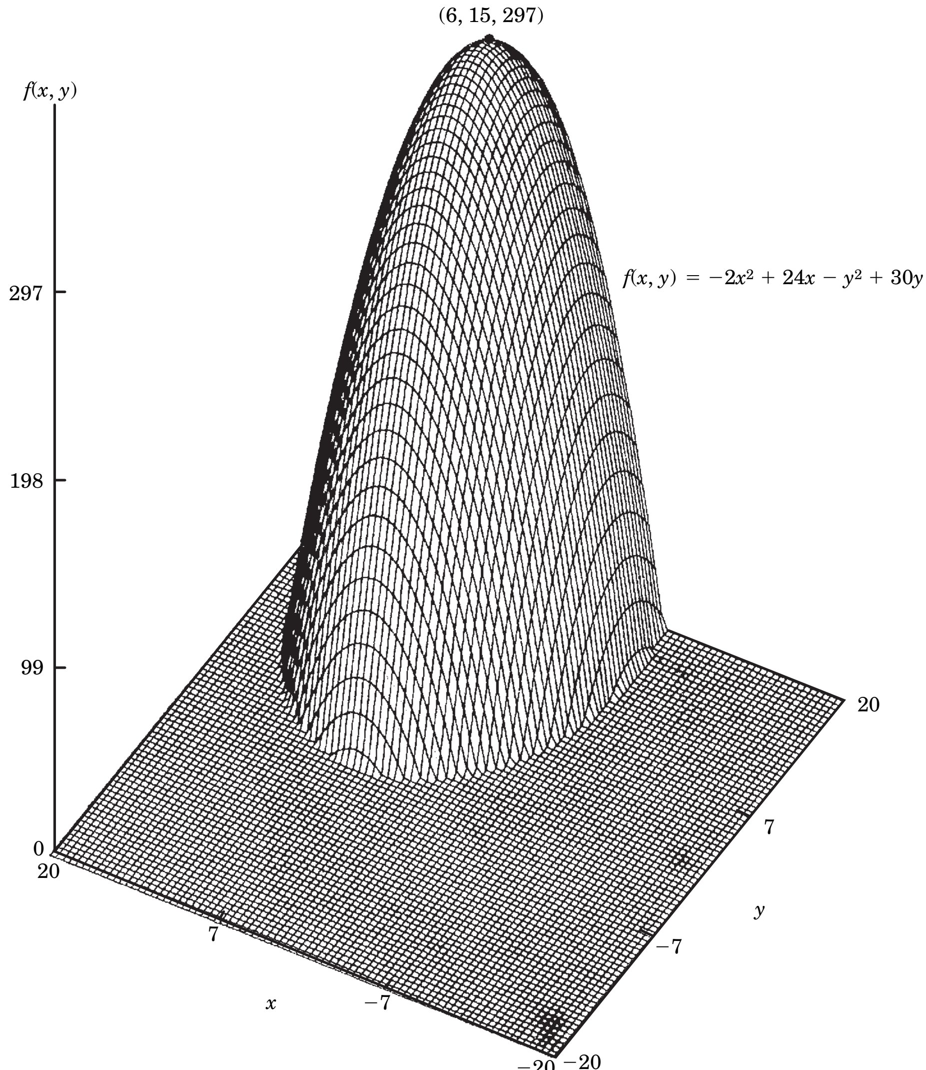


Figura 20.13 Máximo relativo en $f(x, y) = -2x^2 + 24x - y^2 + 30y$.

Al evaluar $D(x^*, y^*)$ se obtiene

$$\begin{aligned} D(6, 15) &= (-4)(-2) - 0^2 \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $D(6, 15) > 0$ y tanto f_{xx} como f_{yy} son negativas, un máximo relativo se presenta en (6, 15, 297). La figura 20.13 es una gráfica de la función.

Ejemplo 16

En el ejemplo 13 se determinó que ocurren puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$$

en (0, 1, 0) y (4, 3, 16). Para determinar la naturaleza de los dos puntos críticos, es preciso obtener todas las segundas derivadas. De acuerdo con el ejemplo 13,

$$f_x = 4x + 4y - 2xy - 4$$
$$f_y = 4x - x^2$$

Las derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = 4 - 2y \qquad f_{xy} = 4 - 2x$$
$$f_{yy} = 0 \qquad f_{yx} = 4 - 2x$$

Evaluación de (0, 1, 0):

$$\begin{aligned} D(0, 1) &= [4 - 2(1)](0) - [4 - 2(0)]^2 \\ &= (2)(0) - 4^2 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

Como $D(0, 1) < 0$, un punto en silla de montar se presenta en f en (0, 1, 0).

Evaluación de (4, 3, 16):

$$\begin{aligned} D(4, 3) &= [4 - 2(3)](0) - [4 - 2(4)]^2 \\ &= (-2)(0) - (-4)^2 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

Un segundo punto en silla de montar ocurre en f, éste en (4, 3, 16). La figura 20.14 presenta una gráfica de la función.

Ejemplo 17

En la función

$$f(x, y) = -x^2 - y^3 + 12y^2$$

determine la localización y la naturaleza de todos los puntos críticos.

SOLUCIÓN

Si se calculan las primeras derivadas parciales y se hacen iguales a 0, se obtiene

$$f_x = -2x = 0 \quad \text{o bien un valor crítico ocurre en } x = 0$$

$$\begin{aligned} f_y &= -3y^2 + 24y = 0 \\ &3y(-y + 8) = 0 \end{aligned}$$

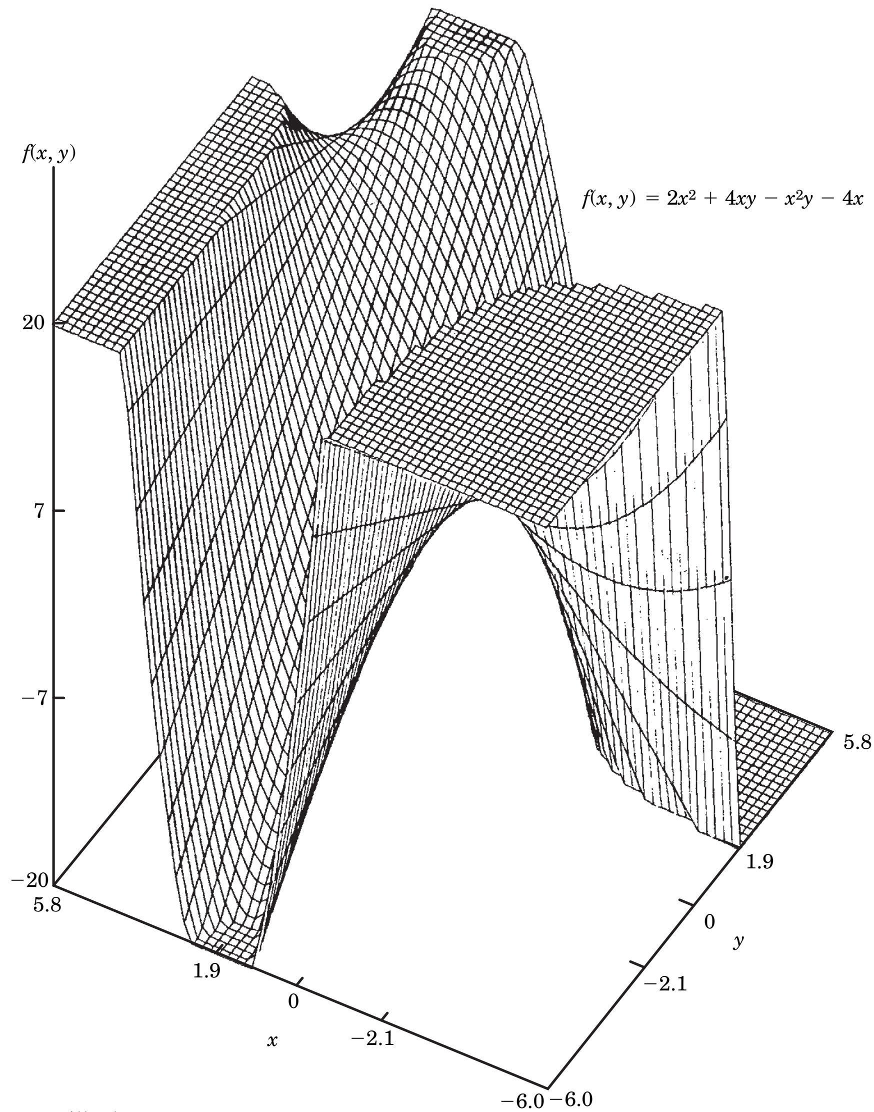


Figura 20.14 Dos puntos en silla de montar sobre $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$.

O bien ocurren valores críticos en

$$y = 0 \quad \text{y} \quad y = 8$$

Hay *dos* puntos críticos en f: uno asociado a los valores críticos $x = 0$ y $y = 0$. Y el otro asociado a los valores críticos $x = 0$ y $y = 8$. Verifique que los dos puntos estacionarios se presenten en (0, 0, 0) y (0, 8, 256).

Las derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_{yy} = -6y + 24 \qquad f_{yx} = 0$$

Evaluación de (0, 0, 0):

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= (-2)[-6(0) + 24] - 0^2 \\ &= (-2)(24) - 0 \\ &= -48 < 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, se tiene un punto en silla de montar en (0, 0, 0).

Evaluación de (0, 8, 256):

$$\begin{aligned} D(0, 8) &= (-2)[-6(8) + 24] - 0^2 \\ &= (-2)(-24) \\ &= 48 > 0 \end{aligned}$$

Con $D > 0$, el punto crítico es un máximo relativo o bien un mínimo relativo. Los valores de las dos derivadas parciales puras en el punto crítico son $f_{xx}(0, 8) = -2$ y $f_{yy}(0, 8) = -6(8) + 24 = -24$. Puesto que ambas son negativas, se llega a la conclusión de que se presenta un máximo relativo en la gráfica de f en (0, 8, 256). La figura 20.15 es una gráfica de f que ofrece dos perspectivas diferentes de la superficie. ❑

Sección 20.3 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios, determine la localización y la naturaleza de todos los puntos críticos.

1. $f(x, y) = 4x^2 - y^2 + 80x + 20y - 10$
2. $f(x, y) = x^2 + xy - 5x - 2y^2 + 2y$
3. $f(x, y) = x^3/3 - 5x^2/2 + 3y^2 - 12y$
4. $f(x, y) = -8x^2 + 12xy + 44x - 12y^2 + 12y$
5. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$
6. $f(x, y) = -x^2 + 6x - 12y + y^3 + 5$
7. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 6y + 10$
8. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 16y + 22$
9. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
10. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
11. $f(x, y) = xy + \ln x + y^2 - 10, x > 0$
12. $f(x, y) = 25x - 25xe^{-y} - 50y - x^2$
13. $f(x, y) = x^2/2 + 2y^2 - 20x - 40y + 100$
14. $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 45x - 30y - 50$
15. $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 3xy - 60x - 32y + 200$
16. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$
17. $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$
18. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$
19. $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 10$
20. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x + 10y - 20$
21. $f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x + 4y + 25$

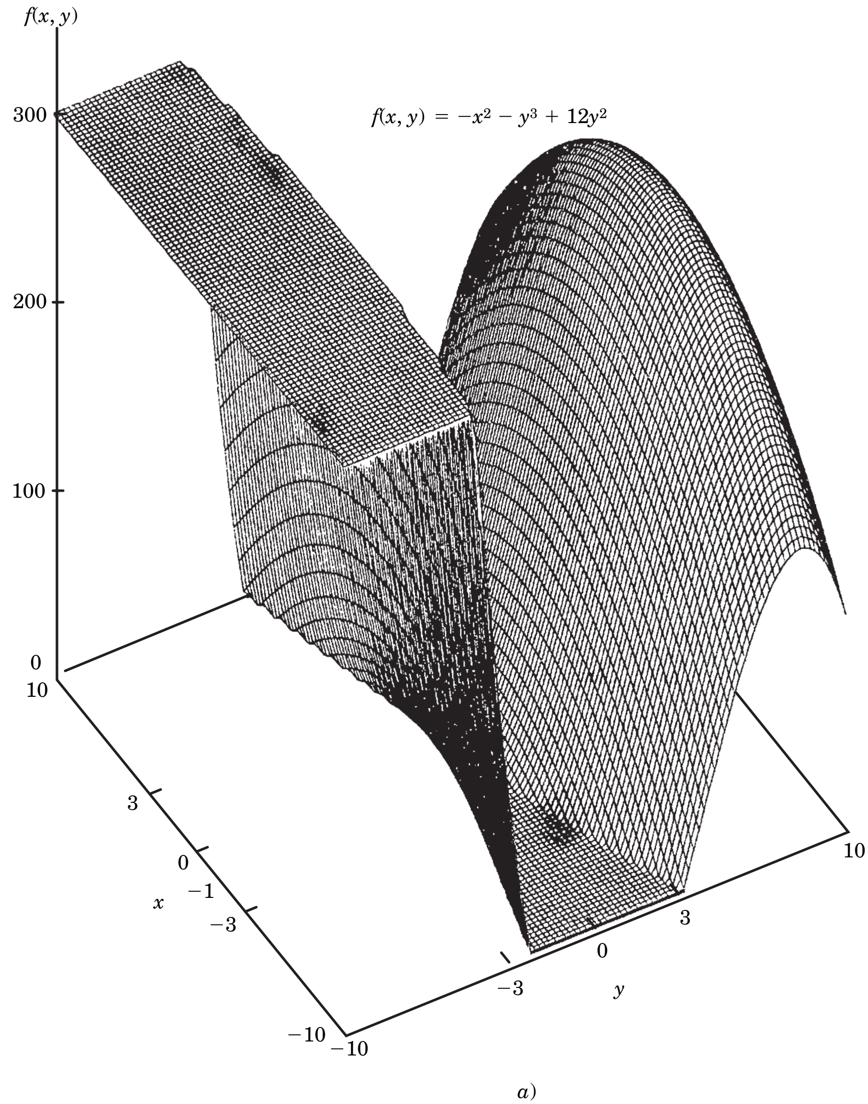


Figura 20.15 Máximo relativo y punto en silla de montar en $f(x, y) = -x^2 - y^3 + 12y^2$.

22. $f(x, y) = 2x^2 + y^3 - x - 12y + 15$
23. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 6$
24. $f(x, y) = 4xy - x^3 - y^2$
25. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 6y + 10$

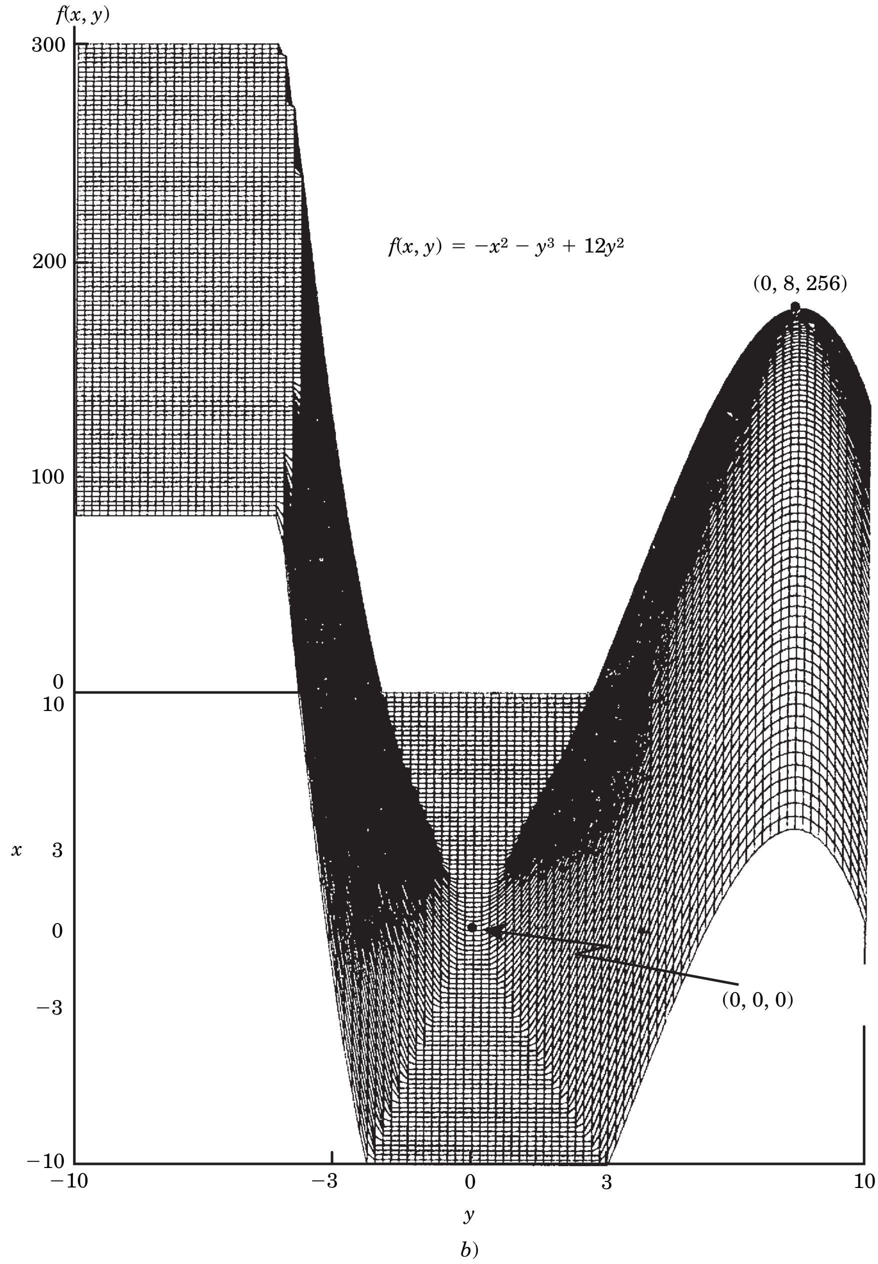


Figura 20.15 *Continuación.*