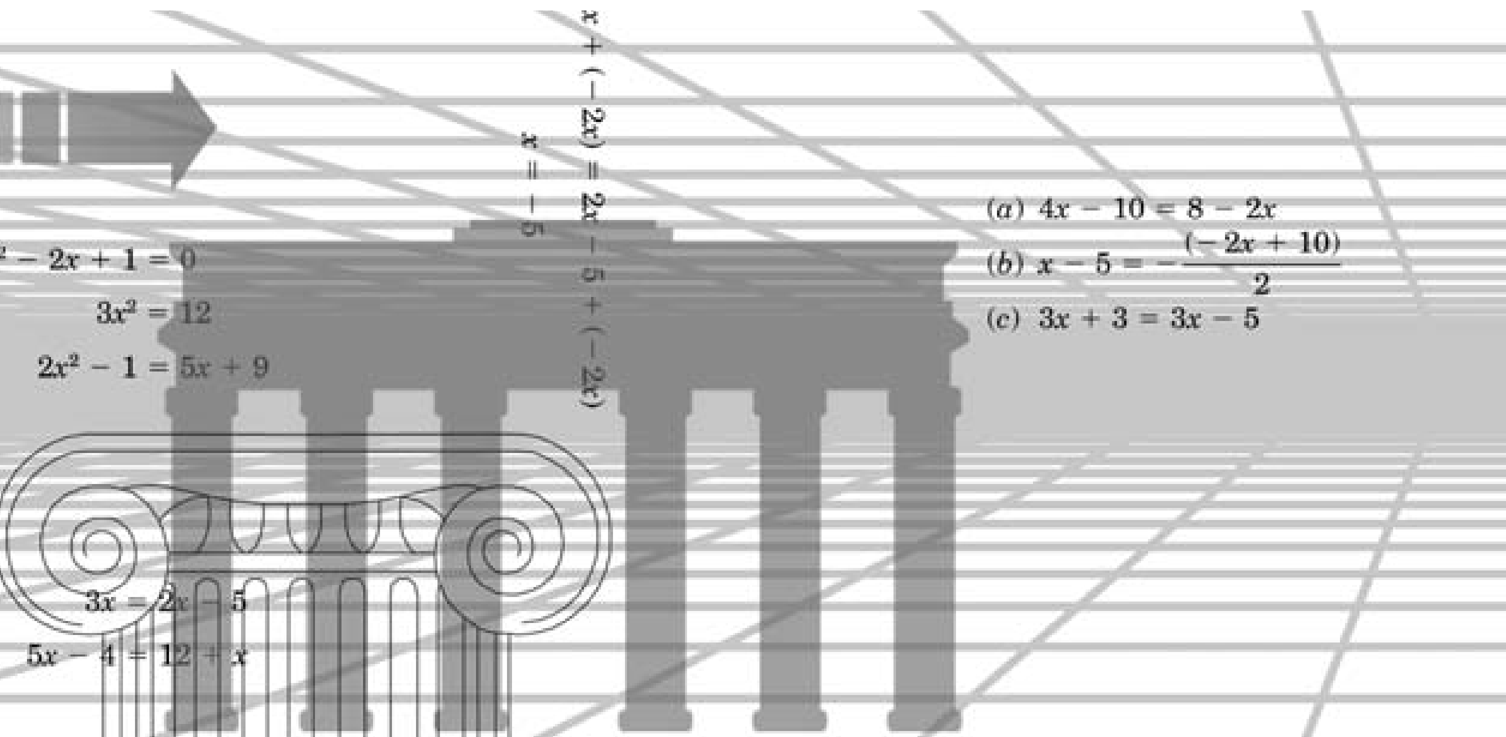
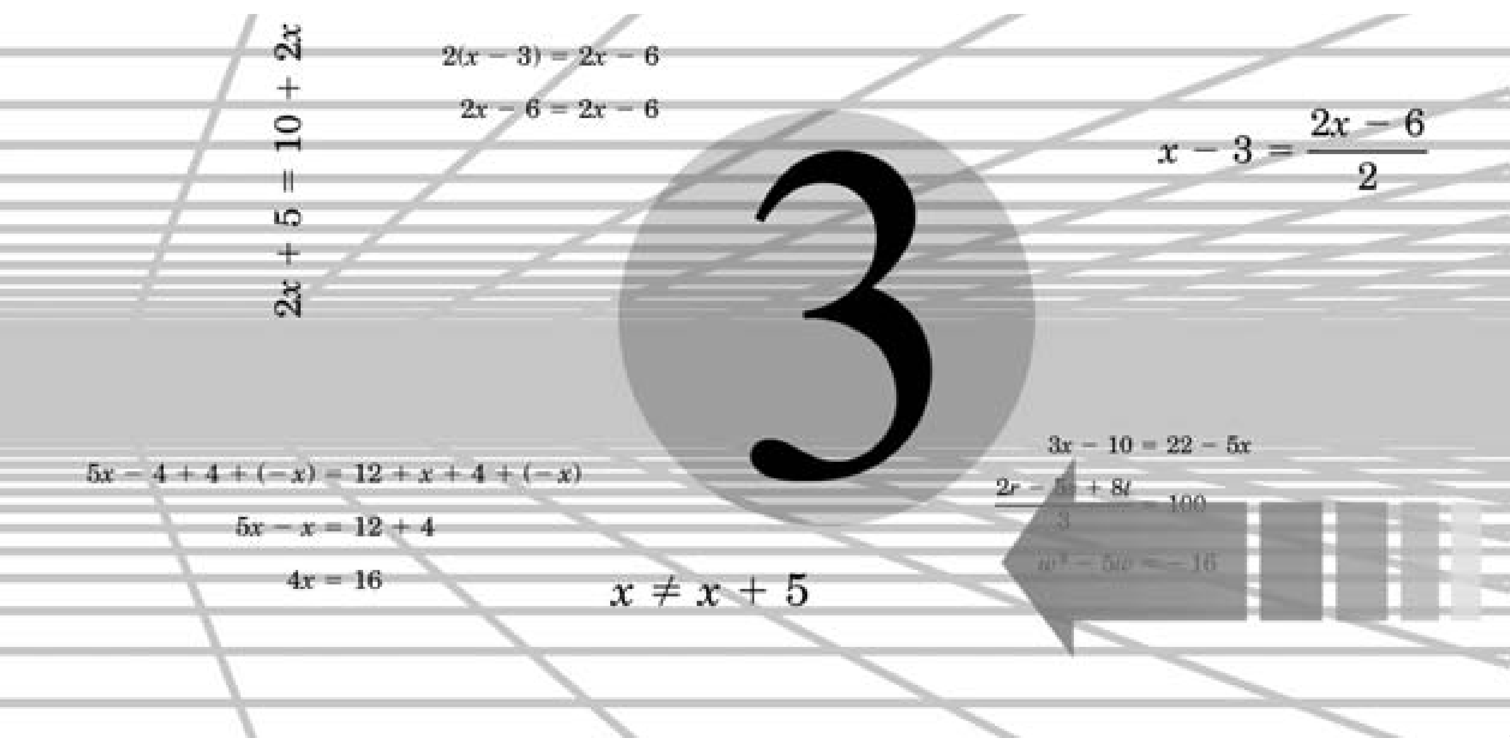
CAPÍTULO 3

Sistemas de ecuaciones lineales



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar una comprensión de la naturaleza de los sistemas de ecuaciones y su representación gráfica (cuando es apropiado).
- Proporcionar una comprensión de las diferentes posibilidades del conjunto solución para los sistemas de ecuaciones.
- Proporcionar una apreciación de la interpretación gráfica de los conjuntos solución.
- Presentar procedimientos para determinar los conjuntos solución para sistemas de ecuaciones.
- Ilustrar algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Puente aéreo de emergencia (continúa)

El ejemplo 20 del capítulo 2 (página 76) trata sobre el transporte de provisiones a una ciudad sudamericana por medio de un puente aéreo de emergencia. A partir del ejemplo 20 sabemos que la capacidad de volumen del avión es de 6 000 pies cúbicos. Otra consideración es que la capacidad de peso del avión es de 40 000 libras. Además, la cantidad de dinero disponible para la compra de provisiones asciende a un total de $150 000. Reportes iniciales indican que el agua es el artículo más importante. Para responder a esta necesidad, funcionarios de la Cruz Roja especificaron que el número de contenedores de agua enviados debería ser el doble del número combinado de sangre y paquetes de provisiones médicas enviados. *Funcionarios de la Cruz Roja quieren determinar si hay alguna combinación de los cuatro artículos que llenen las capacidades de peso y volumen del avión, ocupen todo el presupuesto de $150 000 y satisfagan los requerimientos relacionados con el envío de agua.* [Ejemplo 16]

En la administración, la economía o aplicaciones de ciencias sociales, a veces nos interesamos en determinar si hay valores de variables que satisfacen varios atributos. Tal vez se pueda representar cada atributo por medio de una ecuación, expresada en términos de variables diferentes. Juntos, los conjuntos de ecuaciones representan todos los atributos de interés. En este capítulo cubriremos los procesos que se usan para determinar si hay valores de variables que juntos satisfacen un conjunto de ecuaciones. Por ejemplo, en el Escenario de motivación, veremos si hay cantidades de los cuatro artículos que satisfacen los atributos de la capacidad de peso, la capacidad de volumen, el presupuesto y los requerimientos de agua.

3.1 Sistemas de ecuaciones con dos variables

Sistemas de ecuaciones

Un ***sistema de ecuaciones*** es un conjunto que consiste en más de una ecuación. Una manera de caracterizar un sistema de ecuaciones es por sus ***dimensiones***. Si un sistema de ecuaciones consiste en m ecuaciones y n variables, decimos que este sistema es un ***sistema de "m por n"***, o que tiene dimensiones de $\boldsymbol{m \times n}$. Se describe un sistema de ecuaciones que implica 2 ecuaciones y 2 variables como un sistema de dimensión de 2×2. Se dice que un sistema que consiste en 15 ecuaciones y 10 variables es un sistema de (15×10).

Al resolver sistemas de ecuaciones, nos interesamos en identificar valores de variables que satisfacen de manera simultánea todas las ecuaciones del sistema. Por ejemplo, dadas las dos ecuaciones

$$5x + 10y = 20$$

$$3x + 4y = 10$$

tal vez queramos identificar cualquier valor de x y y que satisfaga ambas ecuaciones al mismo tiempo. Al usar la notación de conjunto, querríamos identificar el ***conjunto solución S***, donde

$$\boxed{S = \{(x, y) \mid 5x + 10y = 20 \quad \text{y} \quad 3x + 4y = 10\}}$$

Como se verá en este capítulo, el conjunto solución S de un sistema de ecuaciones lineales puede ser un ***conjunto nulo***, un ***conjunto finito*** o un ***conjunto infinito.****

Hay muy pocos procedimientos de solución que se pueden usar para solucionar sistemas de ecuaciones. En este capítulo nos concentramos en dos procedimientos diferentes. Se presentarán otros procedimientos en el capítulo 9.

En este capítulo comenzamos nuestro análisis con los sistemas más simples, dos ecuaciones y dos variables. Nuestros análisis enfatizarán los aspectos algebraicos de cada situación. Estos procedimientos se extenderán más adelante en el capítulo para que comprendamos cómo se manejan los sistemas de ecuaciones más grandes. También analizaremos una variedad de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones.

Análisis gráfico

Sabemos a partir del capítulo 2 que se grafica un sistema de ecuaciones que incluye dos variables como una línea recta. Por tanto, se representa un sistema de ecuaciones lineales de (2×2) con dos líneas rectas en dos dimensiones. Al despejar los valores de las dos variables que satisfacen *ambas* ecuaciones, tratamos de determinar gráficamente si las dos líneas rectas tienen algún punto en común.

Puede haber tres tipos distintos de conjuntos solución para los sistemas de ecuaciones de (2×2). La figura 3.1 ilustra las tres posibilidades. En la figura 3.1*a*), las dos líneas rectas se intersecan. Las *coordenadas* del punto de intersección (x_1, y_1) representan la solución para el sistema de ecuaciones, es decir, el par de valores para x y y que satisfacen *ambas* ecuaciones. Cuando sólo hay un par de valores para las variables que satisface el sistema de ecuaciones, se dice que el sistema tiene una ***solución única.***

En la figura 3.1*b*), las dos líneas rectas son paralelas entre sí. Debe recordar del capítulo 2 que líneas rectas paralelas tienen la misma pendiente; y dado que tienen diferentes intersecciones de y, las líneas no tienen puntos en común. Si un sistema de ecuaciones de

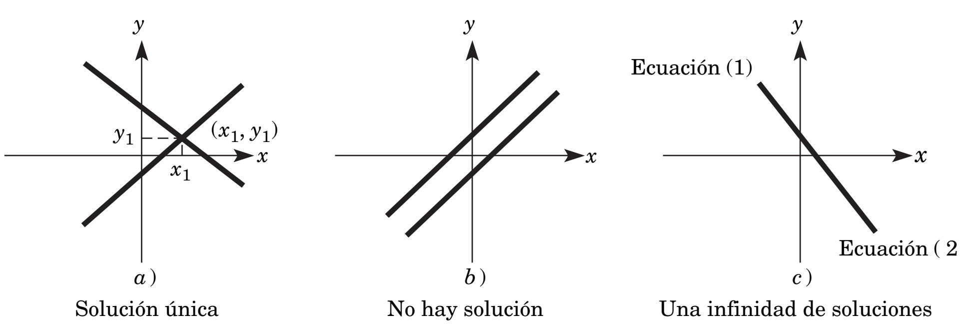


Figura 3.1 Posibilidades de conjunto solución para un sistema de ecuaciones (2×2).

* Un conjunto nulo no contiene ningún elemento (está vacío), un conjunto finito consiste en un número limitado de elementos y un conjunto infinito consiste en un número infinito de elementos.

(2×2) tiene estas características, se dice que el sistema ***no tiene solución***. Es decir, no hay valores para las variables que satisfagan ambas ecuaciones. Se dice que las ecuaciones son ***inconsistentes*** en dicho sistema.

Se ilustra la posibilidad final para un sistema de (2×2) en la figura 3.1*c*). En este caso ambas ecuaciones se trazan como la misma línea recta y se considera que son ***ecuaciones equivalentes***. Un número infinito de valores es común a las dos líneas rectas y se dice que el sistema tiene una ***infinidad de soluciones***. Al representarse por la misma línea recta implica que ambas líneas tienen la misma pendiente y la misma intersección de y. Dos ecuaciones *pueden* parecer muy distintas una de otra y aun así ser equivalentes. Por ejemplo, las dos ecuaciones

$$-6x + 12y = -24$$

y

$$1.5x - 3y = 6$$

son equivalentes. Verifique que la pendiente y la intersección de y sean las mismas para ambas.

La siguiente es otra forma de resumir los tres casos que se presentan en la figura 3.1.

Relaciones de pendiente-intersección

Dado un sistema de ecuaciones lineales (de forma pendiente-intersección) de (2×2),

$$y = m_1x + k_1 \tag{3.1}$$

$$y = m_2x + k_2 \tag{3.2}$$

donde m_1 y m_2 representan las pendientes respectivas de las dos líneas rectas y k_1 y k_2 representan las respectivas intersecciones de y.

I *Hay* una solución única *para el sistema si* $m_1 \neq m_2$.
II *No hay* ninguna solución *del sistema si* $m_1 = m_2$ *pero* $k_1 \neq k_2$.
III *Hay* una infinidad de soluciones *si* $m_1 = m_2$ *y* $k_1 = k_2$.

Soluciones gráficas

Los planteamientos de solución gráfica son posibles para sistemas de ecuaciones con dos variables. Sin embargo, se debe ser preciso en el trazo de sus gráficas. El ejemplo siguiente ilustra una solución gráfica.

Ejemplo 1 Determine gráficamente la solución del sistema de ecuaciones

$$2x + 4y = 20 \tag{3.3}$$

$$3x + y = 10 \tag{3.4}$$

Las intersecciones con los ejes de las x y y son (10, 0) y (0, 5) respectivamente para la ecuación (3.3). De modo similar, las intersecciones de la ecuación (3.4) son $(\frac{10}{3}, 0)$ y (0, 10). Cuando se trazan en una misma gráfica como se indica en la figura 3.2, las dos líneas rectas parecen cruzarse en (2, 4).

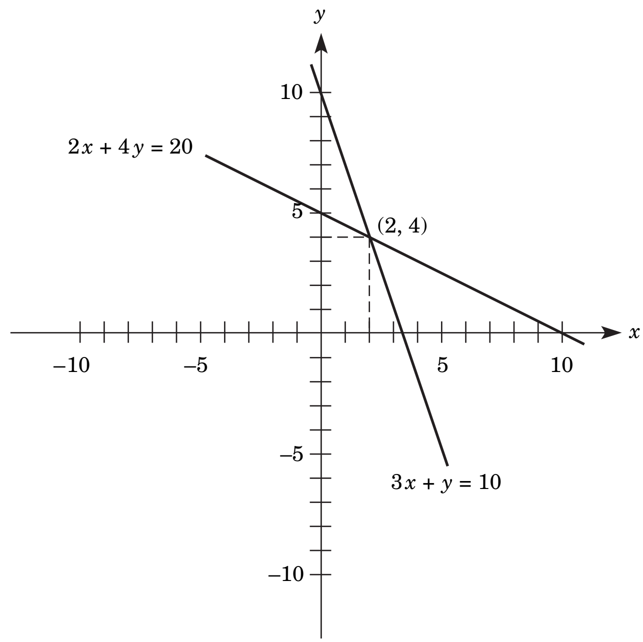


Figura 3.2

Un problema con la solución gráfica es que puede ser difícil leer las coordenadas precisas del punto de intersección entre ellas. Esto es cierto en especial cuando las coordenadas donde se intersecan no son números enteros. Es por eso que desde el punto de vista de la identificación de soluciones *exactas* son preferibles los procedimientos de solución algebraica. Sin embargo, si usa los procedimientos gráficos o los algebraicos, siempre hay una forma de verificar su respuesta. Sustituya su respuesta en las ecuaciones originales para ver si los valores la satisfacen. Al sustituir $x = 2$ y $y = 4$ en las ecuaciones (3.3) y (3.4), tenemos

$$2(2) + 4(4) = 20$$

o

$$20 = 20$$

y

$$3(2) + (4) = 10$$

o

$$10 = 10$$

Por tanto, nuestra solución es correcta. ❑

El procedimiento de eliminación

Un método popular para resolver sistemas con dos o tres variables es el ***procedimiento de eliminación***. Dado un sistema de ecuaciones de (2×2), se suman las dos ecuaciones o múltiplos de las dos ecuaciones con el fin de *eliminar* una de las dos variables. La ecuación resultante se expresa en términos de la variable restante. Se puede despejar la variable restante en esta ecuación, valor que se puede sustituir de nuevo en una de las ecuaciones originales y despejar el valor de la variable eliminada. El proceso de solución se demuestra en el ejemplo siguiente y después se formalizará el procedimiento.

Ejemplo 2 Resuelva el sistema de ecuaciones del ejemplo 1.

SOLUCIÓN

El sistema original era

$$2x + 4y = 20 \qquad \textbf{(3.3)}$$

$$3x + y = 10 \qquad \textbf{(3.4)}$$

El objetivo del procedimiento de eliminación consiste en eliminar una de las dos variables al sumar las ecuaciones (o sus múltiplos). Si *multiplicamos* la ecuación (3.4) por -4 y *sumamos* la ecuación resultante [Ecuación (3.4*a*)] a la ecuación (3.4), tenemos la ecuación (3.5):

$$
\begin{array}{rrcrl}
 & 2x + 4y & = & 20 & \textbf{(3.3)} \\
[-4 \cdot \text{ecuación } (3.4)] \rightarrow & \underline{-12x - 4y} & \underline{=} & \underline{-40} & \textbf{(3.4}\boldsymbol{a}\textbf{)} \\
 & -10x & = & -20 & \textbf{(3.5)}
\end{array}
$$

La ecuación (3.5) contiene sólo la variable x y se puede despejar para obtener el valor $x = 2$. Al sustituir este valor de x en una de las ecuaciones originales [elijamos la ecuación (3.3)] encontramos que

$$2(2) + 4y = 20$$

$$4y = 16$$

o

$$y = 4$$

Por tanto, la solución única de este sistema, como determinamos gráficamente, es $x = 2$ y $y = 4$. ❑

Ejercicio de práctica

Verifique que la solución es exactamente la misma si se opta por eliminar x. Para eliminar x, multiplique las ecuaciones (3.3) y (3.4) por -3 y 2, respectivamente.

Se puede generalizar el procedimiento de eliminación para un sistema de ecuaciones de (2×2) como sigue.

Procedimiento de eliminación para sistemas de (2 × 2)

I *Seleccione una variable para eliminar.*

II *Multiplique (si es necesario) las ecuaciones por constantes con el fin de que los coeficientes de la variable seleccionada sean los negativos del otro en las dos ecuaciones, después sume las dos ecuaciones resultantes.*

III **A)** *Si la suma de ecuaciones da como resultado una ecuación nueva que tiene una variable, el sistema tiene una* **solución única**. *Despeje el valor de la variable restante y sustituya de nuevo este valor en una de las ecuaciones originales para determinar el valor de la variable que se eliminó originalmente.*

> **B)** *Si la suma de las ecuaciones da como resultado la* **identidad** *0 = 0, las dos ecuaciones originales son* **equivalentes** *entre sí y el sistema tiene una* **infinidad de soluciones**.
>
> **C)** *Si la suma de las ecuaciones da como resultado un* **enunciado falso**, *digamos, 0 = 5, las ecuaciones son* **inconsistentes** *y* **no hay ninguna solución**. *Véase la figura 3.3.*

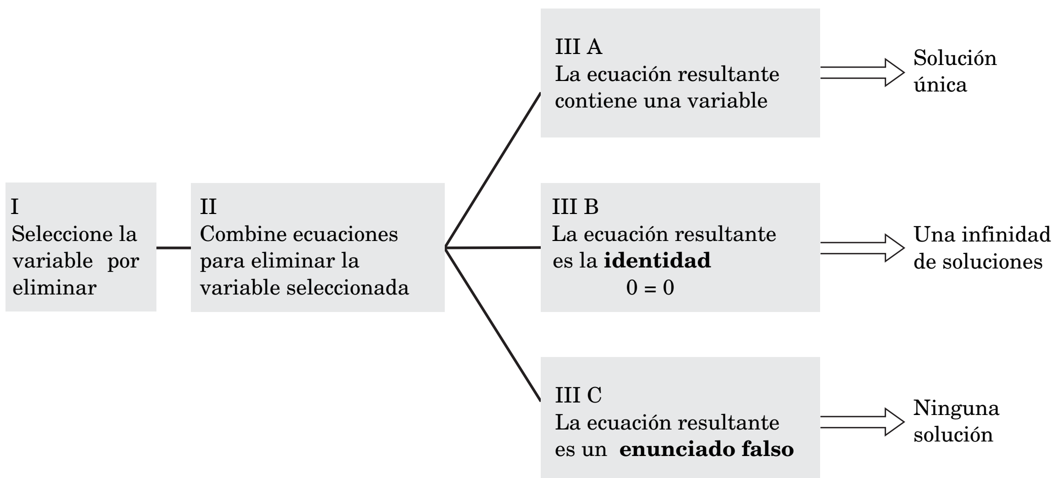


Figura 3.3 Procedimiento de eliminación para sistemas de (2×2).

Ejemplo 3

(Una infinidad de soluciones) Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente con el procedimiento de eliminación.

$$3x - 2y = 6 \qquad \textbf{(3.6)}$$

$$-15x + 10y = -30 \qquad \textbf{(3.7)}$$

SOLUCIÓN

Al seleccionar la variable x para eliminarla, se multiplica la ecuación (3.6) por 5 y se suma a la ecuación (3.7).

$$[5 \cdot \text{ecuación (3.7)}] \rightarrow \quad 15x - 10y = 30 \qquad \textbf{(3.6}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

$$\underline{-15x + 10y = -30} \qquad \textbf{(3.7)}$$

$$0 = 0$$

Cuando se suman las ecuaciones (3.6a) y (3.7), se eliminan ambas variables en el lado izquierdo de la ecuación y queda la identidad $0 = 0$. A partir del paso IIB del procedimiento de solución concluimos que las dos ecuaciones son equivalentes y que hay una infinidad de soluciones. ❑

Con el fin de especificar elementos de la muestra del conjunto solución, podríamos suponer un valor arbitrario para x o y y sustituir este valor en una de las ecuaciones originales, despejando el valor correspondiente de la otra variable. Por ejemplo, verifique que si suponemos que $y = 3$, la sustitución de este valor en la ecuación (3.6) o en la (3.7) dará como resultado el valor correspondiente $x = 4$. Por tanto, un elemento del conjunto solución es (4, 3). Una manera más general de especificar el conjunto solución consiste en despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones originales. El resultado es una ecuación que expresa el valor de una variable en términos del valor de la segunda variable. Para ilustrarlo, si se despeja x en la ecuación (3.6), el resultado es

$$3x = 2y + 6$$

o

$$x = \tfrac{2}{3}y + 2$$

Por consiguiente, una manera de generalizar el conjunto solución es

$$\boxed{\begin{array}{l} y \text{ arbitrario} \\ x = \tfrac{2}{3}y + 2 \end{array}}$$

De forma muy simple, esta situación indica que se puede asignar *cualquier* valor real a y y que x se obtiene por la sustitución de y en la ecuación $x = \tfrac{2}{3}y + 2$. Alternativamente, se podría generalizar el conjunto solución al despejar y en cualquiera de las ecuaciones originales. Verifique que la generalización resultante tendría la forma

$$\boxed{\begin{array}{l} x \text{ arbitrario} \\ y = \tfrac{3}{2}x - 3 \end{array}}$$

Ejemplo 4

(**Conjunto sin solución**) Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente con el procedimiento de eliminación.

$$6x - 12y = 24 \qquad \textbf{(3.8)}$$

$$-1.5x + 3y = 9 \qquad \textbf{(3.9)}$$

SOLUCIÓN

Al multiplicar la ecuación (3.9) por 4 y al sumar este múltiplo en la ecuación (3.8) tenemos

$$\begin{array}{rrr} & 6x - 12y = 24 & \textbf{(3.8)} \\ [4 \cdot \text{ecuación } (3.9)] \rightarrow & \underline{-6x + 12y = 36} & \textbf{(3.9}\boldsymbol{a}\textbf{)} \\ & 0x + 0y = 60 & \end{array}$$

o

$$0 = 60$$

Ya que $0 = 60$ es un enunciado falso, el sistema de ecuaciones no tiene solución. ❑