9. $$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 54 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 30 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 &= 14 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 24 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 - 15x_3 &= 60 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 &= 48 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -36 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 17 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= -30 \\ -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 50 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 30 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 + 16x_3 &= 50 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 20 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 25 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 15 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -15x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 15 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

21. ¿Qué posibilidades de conjunto solución existen para *a*) un sistema de ecuaciones de (5×3)?, *b*) un sistema de (4×8)? *c*) un sistema de (25×25)? *d*) un sistema de (100×75)? y *e*) un sistema de $(4\,000 \times 1\,000)$?

22. ¿Qué posibilidades de conjunto solución existen para *a*) un sistema de ecuaciones de (30×40)? *b*) un sistema de $(2\,500 \times 1\,000)$? *c*) un sistema de (600×30)? *d*) un sistema de $(450 \times 1\,200)$? y *e*) un sistema de (75×75)?

3.4 Aplicaciones selectas

Ejemplo 16

(Puente aéreo de emergencia; escenario de motivación) El escenario de motivación al inicio de este capítulo estudió el puente aéreo de emergencia de provisiones a una ciudad sudamericana que sufrió una extensa inundación. La tabla 3.1 indica los cuatro artículos considerados para el primer avión que se mandará a la ciudad al igual que el volumen, peso y costo por contenedor de cada artículo.

Tabla 3.1

Artículo	Volumen/contenedor, pies cúbicos	Peso por contenedor, libras	Costo por contenedor, $
Sangre	20	150	1 000
Paquetes de provisiones médicas	30	100	300
Alimento	8	60	400
Agua	6	70	200

Recuerde del ejemplo 22 (capítulo 2) que la capacidad de volumen del avión es de 6 000 pies cúbicos. La capacidad de peso es 40 000 libras. Además, la cantidad total de dinero disponible para la compra de provisiones es de \$150 000. Reportes iniciales indican que el agua es el artículo más importante. Para responder a esta necesidad, funcionarios de la Cruz Roja especificaron que el número de contenedores de agua enviados debe ser el doble del número combinado de sangre y de paquetes de provisiones médicas. *Los funcionarios de la Cruz Roja quieren determinar si hay alguna combi-*

nación de los cuatro artículos que llene el avión a sus capacidades de peso y de volumen, gaste el presupuesto completo de \$150 000 y satisfaga el requerimiento concerniente al envío de agua.

SOLUCIÓN

Si

x_1 = *número de contenedores de sangre*
x_2 = *número de contenedores de paquetes de provisiones médicas*
x_3 = *número de contenedores de alimento*
x_4 = *número de contenedores de agua*

el sistema de ecuaciones que representa los requerimientos en este problema es

$$\begin{aligned} 20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 6x_4 &= 6\,000 && \text{(volumen)} \\ 150x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 70x_4 &= 40\,000 && \text{(peso)} \\ 1\,000x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 200x_4 &= 150\,000 && \text{(fondos)} \\ x_4 &= 2(x_1 + x_2) && \text{(agua)} \end{aligned}$$

Antes de solucionar este sistema de ecuaciones de (4×4), vamos a hacer los cambios siguientes:

1. Se vuelve a escribir la ecuación con x_1 y x_2 en el lado izquierdo de la ecuación.
2. Se coloca la ecuación reordenada de agua como la primera de las cuatro ecuaciones.

El sistema de ecuaciones resultante, escrito en forma de arreglo, es

$$\begin{array}{rrrr|r} -2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 20 & 30 & 8 & 6 & 6\,000 \\ 150 & 100 & 60 & 70 & 40\,000 \\ 1\,000 & 300 & 400 & 200 & 150\,000 \end{array}$$

Para reducir la magnitud de algunos de los números, se dividen las ecuaciones tres y cuatro entre 10 y 100, respectivamente, para producir

$$\begin{array}{rrrr|rl} -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & R_1 \\ 20 & 30 & 8 & 6 & 6\,000 & R_2 \\ 15 & 10 & 6 & 7 & 4\,000 & R_3 \\ 10 & 3 & 4 & 2 & 1\,500 & R_4 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl} 1 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & R_{1a} = -\frac{1}{2}R_1 \\ 0 & 10 & 8 & 16 & 6\,000 & R_{2a} = R_2 - 20R_{1a} \\ 0 & -5 & 6 & 14.5 & 4\,000 & R_{3a} = R_3 - 15R_{1a} \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 1\,500 & R_{4a} = R_4 - 10R_{1a} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl} 1 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & R_{1a} \\ 0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 & R_{2b} = \frac{1}{10}R_{2a} \\ 0 & -5 & 6 & 14.5 & 4\,000 & R_{3a} \\ 0 & -7 & 4 & 7 & 1\,500 & R_{4a} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl} 1 & 0 & -0.8 & -2.1 & -600 & R_{1b} = R_{1a} - R_{2b} \\ 0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 & R_{2b} \\ 0 & 0 & 10 & 22.5 & 7\,000 & R_{3b} = R_{3a} + 5R_{2b} \\ 0 & 0 & 9.6 & 18.2 & 5\,700 & R_{4b} = R_{4a} + 7R_{2b} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -0.8 & -2.1 & -600 \\ 0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & 2.25 & 700 \\ 0 & 0 & 9.6 & 18.2 & 5\,700 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_{1b} \\ R_{2b} \\ R_{3c} = \frac{1}{10}R_{3b} \\ R_{4b} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.3 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 2.25 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4 & -1\,020 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_{1c} = R_{1b} + 0.8R_{3c} \\ R_{2c} = R_{2b} - 0.8R_{3c} \\ R_{3c} \\ R_{4c} = R_{4b} - 9.6R_{3c} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.3 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -0.2 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 2.25 & 700 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_{1c} \\ R_{2c} \\ R_{3c} \\ R_{4d} = -\dfrac{1}{3.4}R_{4c} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_{1d} = R_{1c} + 0.3R_{4d} \\ R_{2d} = R_{2c} + 0.2R_{4d} \\ R_{3d} = R_{3c} - 2.25R_{4d} \\ R_{4d} \end{array}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 25$ y $x_4 = 300$. La recomendación matemática es que los funcionarios de la Cruz Roja carguen 50 contenedores de sangre, 100 contenedores de paquetes de provisiones médicas, 25 contenedores de alimento y 300 contenedores de agua en el primer avión. ❑

Problema de mezcla de productos

Una variedad de aplicaciones se ocupa de determinar las diferentes cantidades de productos que satisfacen requerimientos específicos. En el ejemplo siguiente nos interesamos en determinar las cantidades de tres productos que utilizarán por completo la capacidad de producción disponible.

Ejemplo 17 Una compañía fabrica tres productos, cada uno de los cuales se debe procesar en tres departamentos distintos. La tabla 3.2 resume las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Además, se establecen las capacidades semanales de cada departamento en términos de horas de trabajo disponibles. Lo que se desea es determinar si hay alguna combinación de los tres productos que utilice por completo las capacidades semanales de los tres departamentos.

Tabla 3.2

	Producto			
Departamento	**1**	**2**	**3**	**Horas disponibles por semana**
A	2	3.5	3	1 200
B	3	2.5	2	1 150
C	4	3	2	1 400

SOLUCIÓN

Si suponemos que x_j = *número de unidades fabricadas por semana del producto j*, las condiciones por satisfacer se expresan mediante el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3.5x_2 + 3x_3 &= 1\,200 \qquad \text{(departamento } A\text{)} \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 &= 1\,150 \qquad \text{(departamento } B\text{)} \\ 4x_1 + \quad 3x_2 + 2x_3 &= 1\,400 \qquad \text{(departamento } C\text{)} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique que al resolver estas ecuaciones de manera simultánea, el conjunto solución consiste en una solución, que es $x_1 = 200$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 150$, o (200, 100, 150). Interprete el conjunto solución para el supervisor de producción de esta compañía.

Modelo de mezcla

Algunas aplicaciones implican la mezcla de ingredientes o componentes para formar una mezcla final que tiene características específicas. Algunos ejemplos incluyen la mezcla de gasolina con otros productos de petróleo, la mezcla de granos de café y la mezcla de whiskys. Muy a menudo los requerimientos de mezcla y las relaciones se definen por medio de ecuaciones lineales o desigualdades lineales. El ejemplo siguiente ilustra una aplicación simple.

Ejemplo 18

Un fabricante de café se interesa en la mezcla de tres tipos distintos de granos de café para obtener una mezcla final. Los tres granos componentes cuestan al fabricante $1.20, $1.60 y $1.40 por libra, respectivamente. El fabricante quiere mezclar un lote de 40 000 libras de café y tiene un presupuesto para comprar café de $57 600. En la mezcla del café, una restricción es que la cantidad usada del componente 2 debe ser el doble de la del componente 1 (el tostador cree que esto es crítico para evitar un sabor amargo).

El objetivo es el de determinar si hay una combinación de los tres componentes que lleve a una mezcla final 1) que consista en 40 000 libras, 2) que cueste $57 600 y 3) que satisfaga la restricción en los componentes 1 y 2.

Si x_j *es igual al número de libras por componente* j *usado en la mezcla final*, la ecuación (3.16) especifica que la mezcla total debe pesar 40 000 libras:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40\,000 \tag{3.16}$$

La ecuación (3.17) especifica que el costo total de los tres componentes debe ser igual a $57 600:

$$1.20x_1 + 1.60x_2 + 1.40x_3 = 57\,600 \tag{3.17}$$