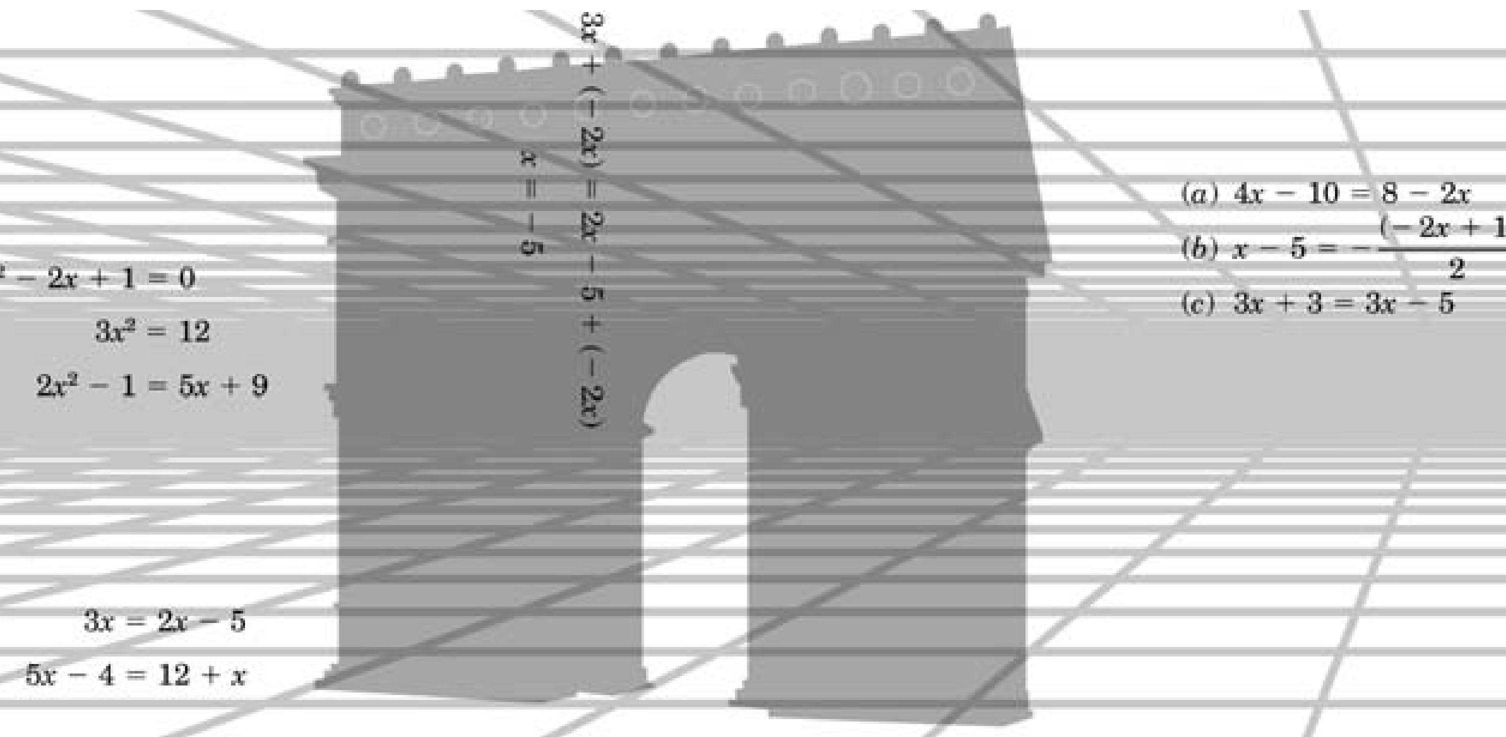
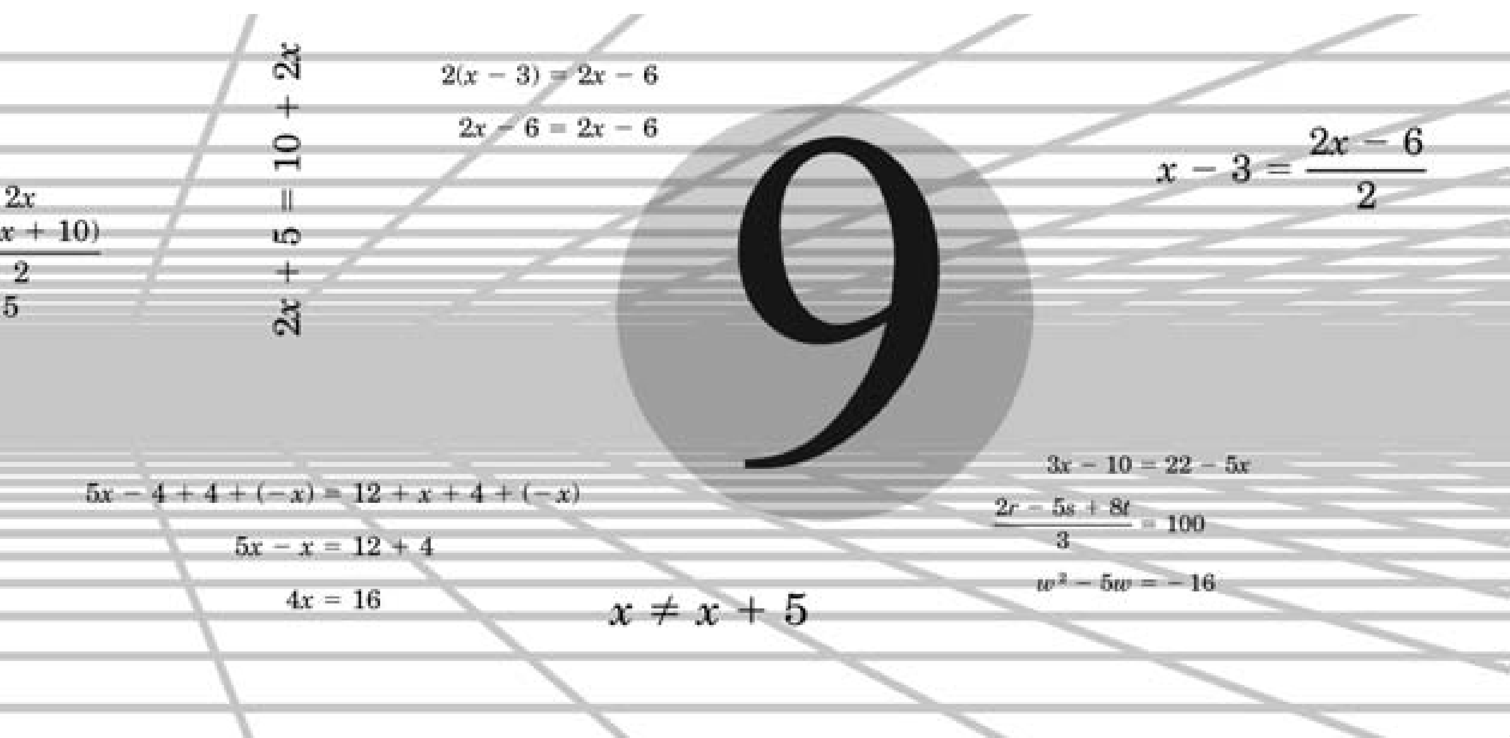
CAPÍTULO 9

Álgebra matricial



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar comprensión de la naturaleza de una matriz y la representación matricial de los datos.
- Proporcionar entendimiento del álgebra matricial.
- Presentar una variedad de aplicaciones de las matrices y el álgebra matricial.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Análisis del cambio de marca

El análisis del cambio de marca se ocupa del comportamiento de compra de los consumidores que compran un producto o contratan un servicio en repetidas ocasiones. Como ejemplos de tales productos se pueden citar la gasolina, los detergentes, los refrescos y las comidas rápidas. El análisis del cambio de marca se enfoca en la lealtad a la marca y el grado en que los consumidores están dispuestos a cambiar a productos competidores. Las empresas a menudo tratan de proyectar los efectos que tendrán las campañas de promoción, como rebajas y programas publicitarios, sobre las ventas de sus productos. *Si se tiene información disponible en relación con las tasas de las ganancias y pérdidas por todos los competidores, una empresa puede:* a) *pronosticar su participación en el mercado en algún momento futuro;* b) *pronosticar la tasa con que la empresa aumentará o disminuirá su participación en el mercado en el futuro, y* c) *determinar si la participación en el mercado alguna vez llegará a niveles de equilibrio en que cada empresa o marca retiene una participación constante del mercado.*

En este capítulo se analiza el álgebra matricial y sus aplicaciones. Se presenta la naturaleza de las matrices y luego se analizan los diferentes tipos de matrices, el álgebra de matrices y algunos conceptos especializados de la matriz. La última sección del capítulo presenta varias aplicaciones del álgebra matricial.

9.1 Introducción a las matrices

¿Qué es una matriz?

Siempre que se manejan datos, se debe interesar en organizarlos de manera tal que sean significativos y se puedan identificar con facilidad. Resumir los datos en forma tabular puede ayudar en esta función. Una *matriz* es una forma común para resumir y presentar números o datos.

> **Definición: Matriz**
>
> Una ***matriz*** es un arreglo rectangular de elementos.

Los elementos de una matriz por lo general son números reales, pero no siempre. Considere las calificaciones de prueba de cinco estudiantes en tres exámenes. Éstas se presentan en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{cc} & \text{Prueba} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Estudiante} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz contiene el conjunto de calificaciones de prueba encerradas entre los paréntesis grandes. El arreglo tiene forma rectangular con cinco filas (una por cada estudiante) y tres columnas (una por cada prueba). Cada fila contiene las tres calificaciones de prueba para un estudiante particular. Cada columna contiene las cinco calificaciones en una prueba particular.

Forma generalizada de una matriz

Una matriz A que contiene elementos a_{ij} tiene la forma general

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz generalizada se representa con m filas y n columnas. Los subíndices en un elemento a_{ij} indican la ubicación del elemento en una matriz. El elemento a_{ij} se localiza en la intersección de la fila i y la columna j de la matriz. Por ejemplo, a_{21} se localiza en la intersección de la fila 2 y la columna 1. El elemento a_{35} se ubicaría en la fila 3 y la columna 5 de la matriz.

Ejercicio de práctica

Si la matriz de calificación de prueba de los estudiantes recibe el nombre de **S** y los elementos se expresan como s_{ij}, ¿cuáles son los elementos s_{12}, s_{32}, s_{43} y s_{16}? *Respuesta*: 82, 70, 99, no hay elemento s_{16}.

Los **nombres** de la matriz generalmente se representan con letras mayúsculas y los elementos de una matriz con letras minúsculas con subíndices. Una matriz se caracteriza también por su ***dimensión***. La dimensión o el ***orden*** indican el número de filas y el número de columnas contenidos en una matriz. Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que tiene una dimensión $\boldsymbol{m \times n}$, que se lee "***m* por *n***". La matriz de calificación de prueba de los estudiantes tiene una dimensión (5×3), o se dice que es una matriz de "5 por 3".

Propósito del estudio del álgebra matricial

Las matrices ofrecen un medio conveniente para almacenar, presentar y manipular datos. Los datos de las calificaciones obtenidas en una prueba se almacenan convenientemente en la matriz anterior y ésta ofrece un método claro y compacto para presentar estos datos. La mayor parte de los datos almacenados en computadoras se almacenan en un formato de matriz. En el lenguaje FORTRAN se reserva espacio de almacenamiento para arreglos en la memoria de la computadora para utilizar el enunciado DIMENSION. El enunciado

“DIMENSION $A(20, 30)$” reserva espacio para una matriz **A** que tiene una dimensión (20×30). En el lenguaje BASIC, el enunciado “DIM A (20, 30)” cumple la misma función.

Cuando se almacenan datos en matrices, a menudo es necesario desplegarlos. Si los datos se almacenan en una matriz con algún patrón lógico, puede ser relativamente fácil recuperar elementos individuales o grupos de elementos. Con frecuencia es necesario manipular datos que se almacenan en una matriz. Por ejemplo, una profesora tal vez quiera determinar el promedio de una clase en una prueba dada o el promedio de un estudiante en las tres pruebas utilizando los datos de la calificación en la prueba de la matriz antes definida. El álgebra matricial permite manipular los datos y efectuar cálculos a la vez que mantiene los datos en forma de matriz. Esto es conveniente en especial en las aplicaciones computarizadas.

Ejemplo 1 **(Consumo de energía en Estados Unidos)** La matriz **E** siguiente presenta el consumo de energía diario promedio de cuatro regiones diferentes del país durante 1987. Las cifras se dan en millones de barriles por día y representan la cantidad de petróleo que generaría la energía equivalente. Se han redondeado a los 100 000 barriles más cercanos. **E** es una matriz (4×5).

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\text{Petróleo y gas estadounidense} & \text{Carbón} & \text{Petróleo y gas importados} & \text{Hidroeléctrica, solar, geotérmica y combustibles sintéticos} & \text{Nuclear}
\end{array} \\
\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5 \\ 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4 \\ 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \text{Noreste} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste medio} \\ \text{Oeste} \end{array}
\end{array}
$$

❑

Las siguientes secciones analizan diferentes tipos de matrices y su manipulación.

9.2 Tipos especiales de matrices

Vectores

Hay una clase especial de matrices que se denomina ***vector***. Un vector es una matriz que sólo tiene una fila o una columna.

Definición: Vector fila

Un ***vector fila*** (o *vector renglón*) es una matriz que sólo tiene una fila. Un vector fila **R** con n elementos r_{ij} tiene una dimensión $(1 \times n)$ y la forma general

$$\mathbf{R} = (r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13} \quad \cdots \quad r_{1n})$$

Nótese que es posible expresar los elementos generalizados de un vector fila $(1 \times n)$ mediante r_{1j}, donde $j = 1, \ldots, n$.

Las tres calificaciones obtenidas por el estudiante 1 en la prueba se podrían guardar en el vector fila **A** (1×3) como

$$\mathbf{A} = (75 \quad 82 \quad 86)$$

El siguiente vector fila (1×5) es una submatriz del ejemplo 1 que resume el equivalente promedio del consumo diario de energía para el noreste durante 1987.

$$\mathbf{B} = (6.5 \quad 2.8 \quad 3.0 \quad 0.2 \quad 0.5)$$

Definición: Vector columna

Un ***vector columna*** es una matriz que sólo tiene una columna. Un vector columna **C** con m elementos c_{ij} tiene una dimensión $m \times 1$ y la forma general

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

En el caso de la matriz de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba anterior, se podrían representar las calificaciones de los cinco estudiantes en el primer examen mediante el vector columna (5×1)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 75 \\ 91 \\ 65 \\ 59 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas

Definición: Matriz cuadrada

Una ***matriz cuadrada*** es una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas.

Si la dimensión de una matriz es $(m \times n)$, una matriz cuadrada es tal que $m = n$. Las siguientes matrices son cuadradas.

$$\mathbf{A} = (3) \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Si una matriz **A** es cuadrada, a veces nos interesamos en un subconjunto de elementos a_{ij} que cae a lo largo de la ***diagonal principal*** de la matriz. Estos elementos se localizan en posiciones en que $i = j$, por ejemplo, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \ldots, a_{nn}$. Los elementos en la diagonal principal de la matriz **B** son $b_{11} = 1$ y $b_{22} = 4$. Los elementos en la diagonal principal de la matriz **C** son $c_{11} = 2$, $c_{22} = -4$ y $c_{33} = 6$.

Definición: Matriz identidad

Una ***matriz identidad*** **I**, en ocasiones llamada ***matriz unidad***, es una matriz cuadrada para la cual todos los elementos a lo largo de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los otros elementos son iguales a 0.

Si e_{ij} representa un elemento generalizado en una matriz identidad, entonces

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Las matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices identidad (2×2) y (3×3).

Aunque se verán distintas aplicaciones de la matriz identidad, una propiedad importante incluye la multiplicación de una matriz identidad por otra matriz. La multiplicación de matrices es una operación algebraica legítima en ciertas circunstancias. Dada una matriz **A** y una matriz identidad **I**, *si el producto* ***AI*** *está definido,* ***AI*** $=$ ***A.*** De modo similar, *si el producto de* ***IA*** *está definido, entonces* ***IA*** $=$ ***A.*** La matriz identidad **I** es para la multiplicación matricial, lo que el número 1 es para la multiplicación en el sistema de los números reales; esto es, $(a)(1) = (1)(a) = a$.

Transpuesta de una matriz

Hay veces en que es necesario reordenar los elementos de datos en un matriz. La reordenación simplemente puede tener el objetivo de ver el arreglo de números desde una perspectiva diferente o manipular los datos en una última etapa. Una clase de reordenación consiste en la ***transpuesta*** de una matriz.

Definición: Transpuesta

Dada la matriz A $(m \times n)$ con elementos a_{ij}, la ***transpuesta*** de **A**, expresada como $\mathbf{A}^T$, es una matriz $(n \times m)$ que contiene elementos a_{ij}^t donde $a_{ij}^t = a_{ji}$.

Ejemplo 2 Para encontrar la transpuesta de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

primero se determina la dimensión de $\mathbf{A}^T$. Dado que $\mathbf{A}$ es una matriz (3×2), $\mathbf{A}^T$ será una matriz (2×3) con la forma

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11}^t & a_{12}^t & a_{13}^t \\ a_{21}^t & a_{22}^t & a_{23}^t \end{pmatrix}$$

Usando la definición anterior, se obtiene

$$\begin{array}{ll} a_{11}^t = a_{11} = 3 & a_{21}^t = a_{12} = 2 \\ a_{12}^t = a_{21} = 4 & a_{22}^t = a_{22} = 0 \\ a_{13}^t = a_{31} = 1 & a_{23}^t = a_{32} = -2 \end{array}$$

o bien

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

❑

Estudie las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^T$ del ejemplo 2. ¿Encuentra algún patrón? Lo que debe observar es que *las filas de* $\mathbf{A}$ *se convierten en las columnas de* $\mathbf{A}^T$. De igual modo, *las columnas de* $\mathbf{A}$ *se convierten en las filas de* $\mathbf{A}^T$. Estas relaciones serán verdaderas para cualquier matriz y su transpuesta, y ofrecen un método sencillo para determinar la transpuesta.

Ejemplo 3 Aplíquese esta lógica para encontrar la transpuesta de

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Para formar la transpuesta de $\mathbf{B}$, las filas 1, 2 y 3 se convierten en las columnas 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}^T$, o

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

De igual manera, se puede considerar que las columnas 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}$ se convierten en las filas 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}^T$. Ambas perspectivas son válidas. ❑

Sección 9.2 Ejercicios de seguimiento

Determine la dimensión de cada una de las siguientes matrices y encuentre la transpuesta.

1. $(8 \quad -8 \quad 5 \quad 3)$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ -6 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 10 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Encuentre una matriz **A** (2×4) para la cual

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

12. Encuentre una matriz **B** (5×3) para la cual

$$b_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{si } i = j \\ 2i + j & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

9.3 Operaciones matriciales

En esta sección se analizarán algunas de las operaciones del álgebra matricial.

Adición y sustracción de matrices

Propiedad de la adición (sustracción) de matrices

Se pueden sumar o sustraer dos matrices si y sólo si tienen la misma dimensión.

Si **A** y **B** son matrices $(m \times n)$ sumadas para formar una nueva matriz **C**, **C** tendrá la misma dimensión que **A** y **B**. Los elementos de **C** se encuentran al sumar los elementos correspondientes de **A** y **B**. Es decir,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para toda } i \text{ y } j$$

Si se sustrae una matriz **B** de una matriz **A** para formar una nueva matriz **C**, los elementos de **C** se encuentran al sustraer los elementos correspondientes de **B** de **A**, o bien

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad \text{para toda} \quad i \text{ y } j$$

Ejemplo 4

Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (-3) & 3 + 2 \\ 4 + 0 & -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Usando las mismas matrices,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 - (1) & 2 - (3) \\ 0 - (4) & 4 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

El Departamento de Energía ha proyectado cifras de consumo de energía para el año 2000. La matriz **P** muestra el promedio de consumo diario por fuente de energía para las mismas regiones de Estados Unidos que se indicaron en el ejemplo 1. Como antes, estas cifras se dan en millones de barriles de petróleo por día que darían la energía equivalente.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{Petróleo y gas estadounidense} & \text{Carbón} & \text{Petróleo y gas importados} & \text{Hidroeléctrica, solar, geotérmica y combustibles sintéticos} & \text{Nuclear} \end{array} \\ \mathbf{P} = & \begin{pmatrix} 5.9 & 4.8 & 2.0 & 0.7 & 1.2 \\ 2.9 & 1.9 & 0.2 & 0.9 & 0.5 \\ 2.3 & 2.4 & 0.5 & 0.5 & 0.9 \\ 6.0 & 1.9 & 2.9 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Noreste} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste medio} \\ \text{Oeste} \end{array} \end{array}$$

El cálculo de la matriz **P** − **E** refleja el cambio estimado en el promedio del consumo diario por fuente de energía entre 1987 y 2000.

$$\mathbf{P}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}5.9 & 4.8 & 2.0 & 0.7 & 1.2\\ 2.9 & 1.9 & 0.2 & 0.9 & 0.5\\ 2.3 & 2.4 & 0.5 & 0.5 & 0.9\\ 6.0 & 1.9 & 2.9 & 1.0 & 0.6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5\\ 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2\\ 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4\\ 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-0.6 & 2.0 & -1.0 & 0.5 & 0.7\\ -0.3 & 0.8 & -0.3 & 0.4 & 0.3\\ -1.1 & 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.5\\ 0.5 & 0.4 & -0.4 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix}$$

❑

Ejercicio de práctica

Interprete el significado de los valores en la matriz de diferencia **P** × **E**.

Multiplicación escalar

Un ***escalar*** es un número real. La ***multiplicación escalar*** de una matriz es la multiplicación de una matriz escalar. Se encuentra el producto multiplicando cada elemento de la matriz escalar. Por ejemplo, si k es un escalar y **A** la siguiente matriz (3 × 2), entonces

$$k\mathbf{A}=k\cdot\begin{pmatrix}5 & 3\\ -2 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5k & 3k\\ -2k & k\\ 0 & 4k\end{pmatrix}$$

Ejemplo 7

(Pronósticos de energía) Una fundación de investigación de política privada proyecta que el consumo de energía aumentará 20% en cada región y por cada fuente de energía entre 1987 y 1992. Si el consumo se incrementa 20% en cada región y por cada fuente de energía, el consumo en 1992 será igual a 120% del consumo de 1987. Por consiguiente, se puede determinar el consumo proyectado en 1992 mediante la multiplicación escalar 1.2**E**, o bien

$$\mathbf{R}=1.2\begin{pmatrix}6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5\\ 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2\\ 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4\\ 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7.80 & 3.36 & 3.60 & 0.24 & 0.60\\ 3.84 & 1.32 & 0.60 & 0.60 & 0.24\\ 4.08 & 2.40 & 1.32 & 0.12 & 0.48\\ 6.50 & 1.80 & 3.96 & 0.72 & 0.24\end{pmatrix}$$

❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 7, ¿qué multiplicación escalar pronosticaría una reducción de 10% en el consumo de energía en general? *Respuesta*: **R** = 0.9**E**.

El producto interno

Definición: Producto interno

Suponga que $\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$; entonces el ***producto interno***, expresado como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

Con base en esta definición, cabe destacar tres puntos:

1. *El producto interno se define sólo si los vectores fila y columna contienen el mismo número de elementos.*
2. *El producto interno resulta cuando se multiplica un vector fila por un vector columna y el producto resultante es una cantidad escalar.*
3. *Se calcula el producto interno al multiplicar los elementos correspondientes en los dos vectores y sumar algebraicamente.*

Considere la multiplicación de los siguientes vectores:

$$\mathbf{AB} = (5 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el producto interno se multiplica el primer elemento del vector fila por el primer elemento del vector columna; se suma el producto resultante al producto del elemento 2 del vector fila y el elemento 2 del vector columna. Para los vectores indicados, se calcula el producto interno así: $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, o bien:

$$(5 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = (5)(4) + (-2)(6) = 8$$

Ejemplo 8 Dados los vectores fila y columna

$$\mathbf{M} = (5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

se calcula el producto interno así

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{N} = (5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= (5)(-2) + (-2)(-4) + (0)(10) + (1)(20) + (3)(6) = 36$$ ❑

Ejercicio de práctica

Dados $\mathbf{S} = (-5 \quad 3 \quad 0 \quad 2)$ y $\mathbf{V} = (3 \quad -1 \quad 4 \quad 2)$, encuentre el producto interno $\mathbf{SV}^{\mathrm{T}}$.
Respuesta: -14.

Multiplicación de matrices

Suponga que una matriz **A** que tiene una dimensión $m_A \times n_A$ se tiene que multiplicar por una matriz **B** que tiene una dimensión $m_B \times n_B$.

Propiedades de multiplicación de matrices

I *El producto matricial **AB** está definido si y sólo si el número de columnas de A equivale al número de filas de **B**, o si* $n_A = m_B$.

II *Si se puede realizar la multiplicación (es decir,* $n_A = m_B$*), el producto resultante será una matriz que tiene una dimensión* $m_A \times n_B$.

La primera propiedad de la multiplicación establece la *condición necesaria y suficiente* para la multiplicación de matrices. Si $n_A \neq m_B$, las matrices no pueden ser multiplicadas.

A . **B**
$(m_A \times \boldsymbol{n_A})$ $\quad$ $(\boldsymbol{m_B} \times n_B)$ $\quad$ Prueba para la condición necesaria y suficiente
$\boldsymbol{n_A} \overset{?}{=} \boldsymbol{m_B}$

La propiedad II define la dimensión de la matriz que resulta de un producto de matrices.

A . **B** = **C**
$(\boldsymbol{m_A} \times n_A)$ $\quad$ $(m_B \times \boldsymbol{n_B})$ $\quad$ $(\boldsymbol{m_A} \times \boldsymbol{n_B})$ $\quad$ Dimensión de la matriz resultante
✓ $n_A = m_B$

Para determinar los elementos de la matriz que resulta en un producto de matrices, se puede utilizar la siguiente regla de cálculo.

Regla de cálculo

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, un elemento c_{ij} de la matriz que resulta del producto es igual al *producto interno* de la fila i de la matriz $\mathbf{A}$ y la columna j de la matriz $\mathbf{B}$. (Véase la figura 9.1.)

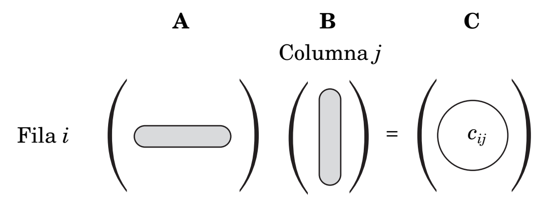


Figura 9.1 Multiplicación de matrices: cálculo de c_{ij} usando el producto interno.

Ejemplo 9 Para encontrar el producto matricial $\mathbf{AB}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

primero se revisa para determinar si la multiplicación es posible. $\mathbf{A}$ es una matriz (2×2) y $\mathbf{B}$ es una matriz (2×1).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \cdot & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ (2 \times \mathbf{2}) & (\mathbf{2} \times 1) = & (2 \times 1) \end{array}$$

$$\underbrace{\mathbf{2} \quad \mathbf{2}}_{=}$$

Así, el producto está definido porque el número de columnas de $\mathbf{A}$ equivale al número de filas de $\mathbf{B}$. La matriz que resulta del producto tendrá una dimensión (2×1) y tendrá la forma general

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

Para encontrar c_{11}, se calcula el producto interno de la fila 1 de $\mathbf{A}$ y la columna 1 de $\mathbf{B}$, o bien:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}$$

De igual forma, c_{21} se encuentra calculando el producto interno entre la fila 2 de $\mathbf{A}$ y la columna 1 de $\mathbf{B}$, o

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

❑

NOTA Como primer intento para calcular el producto de matrices, el lector puede encontrar útil escribir la forma general de la matriz que resulta del producto de matrices. Se hizo esto al establecer primero la forma general de **C** como $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. Con los elementos identificados de esta manera, los subíndices de cada elemento indican cómo se puede calcular cada elemento.

Ejemplo 10 Determine el producto matricial **BA** para las matrices del ejemplo 9.

SOLUCIÓN

El producto **BA** implica multiplicar una matriz (2 × 1) por una matriz (2 × 2), o bien:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{B} \quad . & \mathbf{A} \\ (2 \times 1) & (2 \times 2) \\ \quad\;\; | & | \quad\;\; \\ \quad\;\; 1 & \neq \; 2 \quad\;\; \end{array}$$

Puesto que el número de columnas de **B** no es igual que el número de filas de **A**, el producto **BA** no está definido. ❑

NOTA Este ejemplo ilustra que la propiedad conmutativa que se aplica en la multiplicación de números reales *no es necesariamente válida* en el caso de la multiplicación de matrices. *No se puede* establecer automáticamente que **AB** = **BA** para dos matrices cualesquiera **A** y **B** .

Ejemplo 11 Encuentre, si es posible, el producto **PI** = **T**, donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

P es una matriz (4 × 3) e **I** es una matriz identidad (3 × 3). Ya que el número de columnas de **P** equivale al número de filas de **I**, se puede realizar la multiplicación y la matriz de producto **T** tendrá una dimensión 4 × 3. Por lo tanto,

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P} & \cdot & \mathbf{I} & = & \mathbf{T} \\ (4 \times 3) & & (3 \times 3) & & (4 \times 3) \\ & = & & & \end{array}$$

T tendrá la forma general

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \end{pmatrix}$$

Algunos elementos muestra se calculan en las siguientes operaciones:

$$t_{11} = (1 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(1) + (0)(0) + (-1)(0) = 1$$

$$t_{12} = (1 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(1) + (-1)(0) = 0$$

$$t_{13} = (1 \quad 0 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(0) + (-1)(1) = -1$$

Verifique que la matriz **T** que resulta del producto de matrices es:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

❑

NOTA Este ejemplo ilustra la propiedad antes mencionada con respecto de las matrices identidad. Esto es, si se multiplica una matriz identidad por otra matriz, el producto será la otra matriz. En este ejemplo, **PI** = **T**. Pero **P** = **T**; por ello, **PI** = **P**.

Ejercicio de práctica

Dadas $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, encuentre el producto **AB**. *Respuesta*: $\begin{pmatrix} -19 & -6 \\ 39 & 32 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 12

(Calificaciones promedio en el curso) La profesora que aplicó las tres pruebas a cinco estudiantes está preparando los promedios del curso. Ha decidido ponderar las dos primeras pruebas en 30% cada una y la tercera en 40%. La profesora quiere calcular los promedios finales para los cinco estudiantes usando la multiplicación de matrices. La matriz de calificaciones es

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix}$$

y los valores ponderados del examen se ponen en el vector fila

$$\mathbf{W} = (0.30 \quad 0.30 \quad 0.40)$$

La profesora necesita multiplicar estas matrices de forma tal que la primera calificación conseguida por *cada* estudiante se multiplique por 0.30, la segunda calificación obtenida por 0.30 y la última calificación por 0.40. El lector debe verificar que los productos **GW** y **WG** no estén definidos. No obstante, si se hubiera establecido **W** como un vector columna, el producto matricial **GW** llevaría al resultado deseado.

Se puede transformar **W** en un vector columna con sólo obtener su transpuesta. El producto $\mathbf{GW}^T$ está definido, conduce a una matriz resultante de orden (5×1), y de modo más importante, realiza los cálculos deseados.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{G} & \cdot & \mathbf{W}^T & = & \mathbf{A} \\ (5 \times 3) & & (3 \times 1) & & (5 \times 1) \end{array}$$

$$=$$

Los promedios finales se calculan así:

$$\begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75(0.3) + 82(0.3) + 86(0.4) \\ 91(0.3) + 95(0.3) + 100(0.4) \\ 65(0.3) + 70(0.3) + 68(0.4) \\ 59(0.3) + 80(0.3) + 99(0.4) \\ 75(0.3) + 76(0.3) + 74(0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81.5 \\ 95.8 \\ 67.7 \\ 81.3 \\ 74.9 \end{pmatrix}$$

Los promedios son 81.5, 95.8, 67.7, 81.3 y 74.9, respectivamente, para los cinco estudiantes. ❑

Ejercicio de práctica

Calcule el producto $\mathbf{WG}^T$. ¿No da esto el mismo resultado que $\mathbf{GW}^T$?

Representación de una ecuación

Una ecuación se puede representar usando el producto interno. La expresión

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3$$

se puede representar por medio del producto interno

$$(3 \quad 5 \quad -4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde el vector fila contiene los coeficientes de cada variable en la expresión y el vector columna contiene las variables. Multiplique los dos vectores para verificar que el producto interno dé como resultado la expresión original.

Para representar la *ecuación*

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 25$$

se puede igualar el producto interno con una matriz (1×1) que contiene la constante del lado derecho, o sea

$$(3 \quad 5 \quad -4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (25)$$

Recuerde que para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión. El producto interno siempre da como resultado una matriz (1×1), que en este caso contiene un elemento: la expresión $3x_1 + 5x_2 - 4x_3$.

Una ecuación lineal de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ se puede representar en forma matricial como sigue:

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \qquad \textbf{(9.1)}$$

Representación de sistemas de ecuaciones

Aunque sea posible representar las ecuaciones individuales usando el producto interno, se puede representar un sistema de ecuaciones utilizando una multiplicación de matrices. El sistema:

$$5x_1 + 3x_2 = 15$$
$$4x_1 - 2x_2 = 12$$

puede representarse así:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Si realizamos la multiplicación de matrices en el lado izquierdo de la ecuación matricial, el resultado es

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Para que estas dos matrices (2×1) sean iguales, los elementos correspondientes deben ser iguales (esto es, $5x_1 + 3x_2 = 15$ y $4x_1 - 2x_2 = 12$, *la información comunicada por el par original de ecuaciones*).

Un sistema de ecuaciones $(m \times n)$ que tiene la forma

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

puede representarse mediante la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde **A** es una matriz $(m \times n)$ que contiene los coeficientes de las variables en el lado izquierdo del conjunto de ecuaciones, **X** es un vector columna con n componentes que contiene las n variables y **B** es un vector columna con m componentes que contiene las constantes del lado derecho para las m ecuaciones. Esta representación tiene este aspecto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix} \qquad \textbf{(9.2)}$$

Ejemplo 13 Se puede representar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 3x_4 + x_5 &= 100 \\ x_1 \qquad - 3x_3 + \;\; x_4 \qquad &= \;\; 60 \\ 4x_2 - \;\; x_3 + 2x_4 + x_5 &= 125 \end{aligned}$$

en la forma matricial **AX** = **B** mostrada a continuación

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Verifique siempre que esta representación sea válida y que se deben incluir ceros en la matriz **A** cuando una variable no aparece en una ecuación particular.

Ejemplo 14 La representación matricial de ecuaciones no se limita a las ecuaciones lineales. La ecuación cuadrática

$$10x^2 - 4x + 50 = 0$$

se puede representar por medio de la ecuación matricial equivalente

$$(10 \quad -4 \quad 50) \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

❑

Sección 9.3 Ejercicios de seguimiento

Realice las siguientes operaciones matriciales siempre y cuando sea posible.

1. $-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 21 & -8 \end{pmatrix}$

3. $-3\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

4. $3k\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & 2a \end{pmatrix} - 2k\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$

5. $5\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 20 & -25 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

7. $(7 \quad -3)\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

8. $(1 \quad -2 \quad -3)\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. $(3 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

10. $(18 \quad -4 \quad -6)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. $(a \quad b)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

12. $(a_1 \quad a_2 \quad a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

13. $(-4 \quad 2 \quad -8 \quad 4)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

14. $(1 \quad -8 \quad 6 \quad -5 \quad -2)\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

15. $(a \quad b \quad c \quad d)\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$

16. $(1 \quad 0 \quad -5 \quad 0 \quad 8)\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

19. $(20 \quad -8)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 4 & 0 \\ -2 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 20 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

24. $(1 \quad 8 \quad -2)\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 3 & -4 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 3 & 12 & 4 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \quad -2 \quad 3)$

33. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 0 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \\ i & j \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Represente los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial:

37. $\begin{aligned} x - 3y &= 15 \\ 2x + 3y &= -10 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 2x &= 4 \\ 3x + 4y &= 15 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 12 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 15 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 &= 48 \\ 2x_1 - 4x_3 &= 25 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= c \\ dx_1 + ex_2 &= f \\ gx_1 + hx_2 &= i \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 &= f \\ gx_1 \qquad - hx_3 \qquad + ix_5 &= j \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} a_1x^2 + a_2x + a_3 &= b_1 \\ a_4x^2 + a_5x + a_6 &= b_2 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} &= b_1 \\ a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23} &= b_2 \\ a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33} &= b_3 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} 5x^3 - 2x^2 + x &= 100 \\ 3x^3 \qquad &= -18 \\ 5x^2 \qquad &= 125 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned}$

47. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, verifique que *a*) **A(BC)** = **(AB)C** y *b*) **A(B + C)** = **AB** + **AC**.

9.4 El determinante

Un concepto importante en el álgebra matricial es el del ***determinante***. *Si una matriz es cuadrada, los elementos de la matriz se pueden combinar para calcular un número de valor real llamado determinante.* El concepto del determinante es de particular utilidad al resolver ecuaciones simultáneas.

El determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

se puede denotar mediante el símbolo $\boldsymbol{\Delta}$ o poniendo líneas verticales en torno a los elementos de la matriz. El determinante de **A** se puede expresar como

$$\boldsymbol{\Delta} \qquad \text{o} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

De igual modo, se puede representar el determinante escribiendo líneas verticales alrededor del nombre de la matriz. Por lo tanto, es posible representar el determinante de **A** como

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Hay diferentes maneras de encontrar el valor de un determinante. Primero se analizarán técnicas específicas para manejar matrices (1 × 1), (2 × 2) y (3 × 3), y luego se seguirá con el ***procedimiento de cofactores*** más general.

El determinante de una matriz de orden (1 × 1)

El determinante de una matriz de orden (1 × 1) simplemente es el valor del único elemento contenido en la matriz. Si $\mathbf{A} = (5)$, $\mathbf{\Delta} = 5$. Si $\mathbf{M} = (-10)$, $\mathbf{\Delta} = -10$.

El determinante de una matriz de orden (2 × 2)

Dada una matriz (2 × 2) que tiene la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{\Delta} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad \textbf{(9.3)}$$

El cálculo implica una multiplicación cruzada de los elementos en las dos diagonales, como se indica a continuación:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & \times \\ & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & a_{12} \\ \times & \\ a_{21} & \end{pmatrix}$$

Ejemplo 15 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= (1)(4) - (3)(-2) \\ &= 4 + 6 = 10 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. *Respuesta*: $\Delta = 0$.

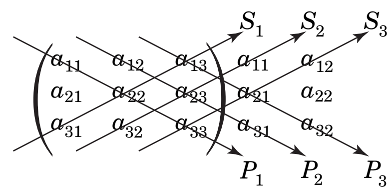
El determinante de una matriz de orden (3 × 3)

Dada la matriz (3 × 3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se puede encontrar el determinante mediante el siguiente proceso:

1. *Agregue las dos primeras columnas de la matriz al lado derecho de la matriz original.*
2. *Localice los elementos en las tres diagonales primarias (P_1, P_2, P_3) y los de las tres diagonales secundarias (S_1, S_2, S_3).*



3. *Multiplique los elementos de cada diagonal primaria y de cada diagonal secundaria.*
4. *El determinante equivale a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos la suma de los productos de las tres diagonales secundarias.*

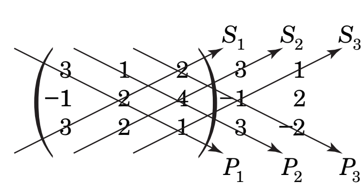
Algebraicamente, el determinante se calcula así:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{\Delta} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13}\\ - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{33}\,a_{21}\,a_{12}\end{aligned}} \tag{9.4}$$

Ejemplo 16 Para encontrar el determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

se añaden las dos primeras columnas a la derecha de la matriz original (3×3):



Se identifican las tres diagonales principales y secundarias y el determinante se calcula así:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta} &= [(3)(2)(1) + (1)(4)(3) + (2)(-1)(-2)] - [(3)(2)(2) + (-2)(4)(3)\\ &\quad + (1)(-1)(1)]\\ &= (6 + 12 + 4) - (12 - 24 - 1) = 22 - (-13) = 35\end{aligned}$$

❑