UN PRIMER CURSO DE TEORÍA DE JUEGOS

GIBBONS

ANTONI BOSCH EDITOR

Robert Gibbons es profesor de la Johnson
Graduate School of Management de la
Universidad de Cornell

UN PRIMER CURSO
DE TEORÍA DE JUEGOS

519.3
GIBBp
J. 6

1-03406-E3
cuipos

ROBERT GIBBONS
Universidad de Cornell

UN PRIMER CURSO DE TEORÍA DE JUEGOS

Traducción de
Paloma Calvo
y Xavier Vilà
Universidad de Northwestern

Antoni Bosch editor

Publicado por Antoni Bosch, editor
Manuel Girona, 61 – 08034 Barcelona
Tel. (93) 205 26 06 – Fax (93) 280 48 02

Título original de la obra:
A Primer in Game Theory

ISBN: 84-85855-69-8
Depósito legal: B. 30.801-1993

Diseño de la cubierta: Enric Satué

Composición: J. A. Alemany
Impresión: Litografía Rubio, S.A.

Primera edición: Octubre de 1993

CONTENIDO

Prefacio IX

1 Juegos estáticos con información completa 1
1.1 Teoría básica: Juegos en forma normal y equilibrio de Nash 2
1.1.A Representación de los juegos en forma normal 2
1.1.B Eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas 4
1.1.C Fundamentación y definición del equilibrio de Nash 8
1.2 Aplicaciones 15
1.2.A Modelo de duopolio de Cournot 15
1.2.B Modelo de duopolio de Bertrand 21
1.2.C Arbitraje de oferta final 23
1.2.D El problema de los ejidos 27
1.3 Teoría avanzada: Estrategias mixtas y existencia de equilibrio 29
1.3.A Estrategias mixtas 29
1.3.B Existencia del equilibrio de Nash 33
1.4 Lecturas adicionales 47
1.5 Ejercicios 48
1.6 Referencias 51

2 Juegos dinámicos con información completa 53
2.1 Juegos dinámicos con información completa y perfecta 55
2.1.A Teoría: Inducción hacia atrás 55
2.1.B El modelo de duopolio de Stackelberg 59
2.1.C Salarios y nivel de empleo en una empresa con fuerte implantación salarial 62
2.1.D Negociación secuencial 66
2.2 Juegos en dos etapas con información completa pero imperfecta 69

2.2.A Teoría: Perfección en subjuegos 69
2.2.B Pánico bancario 71
2.2.C Aranceles y competencia internacional imperfecta 73
2.2.D Torneos 77
2.3 Juegos repetidos 80
2.3.A Teoría: Juegos repetidos en dos etapas 80
2.3.B Teoría: Juegos repetidos infinitamente 87
2.3.C Colusión entre duopolistas de Cournot 101
2.3.D Salarios de eficiencia 106
2.3.E Política monetaria estable en el tiempo 112
2.4 Juegos dinámicos con información completa pero imperfecta 115
2.4.A Representación de los juegos en forma extensiva 115
2.4.B Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos 122
2.5 Lecturas adicionales 129
2.6 Ejercicios 130
2.7 Referencias 139

3 Juegos estáticos con información incompleta 143
3.1 Teoría: juegos bayesianos estáticos y equilibrio bayesiano de Nash 144
3.1.A Un ejemplo: Competencia a la Cournot bajo información asimétrica 144
3.1.B Representación en forma normal de juegos bayesianos estáticos 146
3.1.C Definición del equilibrio bayesiano de Nash 150
3.2 Aplicaciones 152
3.2.A Revisión de las estrategias mixtas 152
3.2.B Una subasta 155
3.2.C Una subasta doble 159
3.3 El principio de revelación 164
3.4 Lecturas adicionales 169
3.5 Ejercicios 169
3.6 Referencias 172

4 Juegos dinámicos con información incompleta 175
4.1 Introducción al equilibrio bayesiano perfecto 177
4.2 Juegos de señalización 185
4.2.A Equilibrio bayesiano perfecto en juegos de señalización 185

4.2.B Señalización en el mercado de trabajo 192
4.2.C Inversión empresarial y estructura de capital 207
4.2.D Política monetaria 210
4.3 Otras aplicaciones del equilibrio bayesiano perfecto 213
4.3.A Juegos con parloteo (*cheap-talk games*) 213
4.3.B Negociación sucesiva bajo información asimétrica 221
4.3.C La reputación en el dilema de los presos repetido finitamente 227
4.4 Refinamientos del equilibrio bayesiano perfecto 236
4.5 Lecturas adicionales 248
4.6 Ejercicios 249
4.7 Referencias 257

Índice analítico 261

PREFACIO

La teoría de juegos es el estudio de problemas de decisión multipersonales. Tales problemas se plantean frecuentemente en economía. Como es bien sabido, por ejemplo, en situaciones de oligopolio se dan típicamente problemas de este tipo (cada empresa debe tener en cuenta lo que harán las demás). Pero muchas otras aplicaciones de teoría de juegos surgen en campos ajenos a la organización industrial. A nivel micro económico, muchos modelos de intercambio (como los de negociación y de subasta) utilizan teoría de juegos. A un nivel de agregación intermedio, y en el campo de la economía laboral o de la economía financiera se utiliza la teoría de juegos en modelos de comportamiento de las empresas en los mercados de factores, o para dilucidar problemas de decisión multipersonales dentro de ellas: varios trabajadores compitiendo por un ascenso, varios departamentos compitiendo por unos mismos recursos. Finalmente, al nivel más alto de agregación, en el campo de la economía internacional, se utiliza en modelos en los que los países compiten (o coluden) en sus decisiones arancelarias y, en general, en una política económica exterior; o en macroeconomía, para analizar los resultados de la política monetaria cuando el gobierno y los agentes que determinan los salarios o los precios se comportan estratégicamente.

Este libro está concebido para presentar la teoría de juegos a quienes más tarde construirán (o, al menos, consumirán) los modelos de la teoría de juegos en los ámbitos aplicados de la economía. Se han procurado resaltar en él las aplicaciones de la teoría, tanto al menos como la propia teoría, por tres razones. En primer lugar, porque las aplicaciones ayudan a enseñar la teoría. En segundo lugar, porque las aplicaciones ilustran el proceso de construcción de modelos; es decir, el proceso de traducción de la descripción informal de una determinada situación a un problema formal de teoría de juegos para ser analizado. En tercer lugar, porque las diversas aplicaciones permiten comprobar que problemas similares surgen en áreas diferentes del análisis económico, y que los mismos instrumentos de teoría de juegos pueden aplicarse en cada situación. Para subrayar el amplio alcance potencial de los juegos los ejemplos habituales de organización industrial han sido sustituidos en gran medida por aplicaciones en el ámbito de la economia laboral, de la macroeconomía y de otros campos aplicados del análisis económico.[1]

Discutiremos cuatro tipos de juegos: juegos estáticos con información completa, juegos dinámicos con información completa, juegos estáticos con información incompleta y juegos dinámicos con información incompleta. (Un juego tiene información incompleta si un jugador no conoce las ganancias de otro jugador, como ocurre en una subasta cuando uno de los licitadores no sabe cuánto está dispuesto a pagar otro licitador por el bien subastado.) Correspondiendo a estas cuatro clases de juegos habrá cuatro nociones de equilibrio: equilibrio de Nash, equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, equilibrio bayesiano de Nash y equilibrio bayesiano perfecto.

Existen dos maneras (relacionadas) de entender estos conceptos de equilibrio. Primero, se pueden entender como sucesiones de conceptos de equilibrio cada vez más poderosos, donde las definiciones más poderosas (es decir, más restrictivas) constituyen intentos de eliminar equilibrios poco plausibles permitidos por nociones de equilibrio más débiles. Veremos, por ejemplo, que el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es más poderoso que el equilibrio de Nash, y que el equilibrio bayesiano perfecto es a su vez más poderoso que el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Segundo, puede afirmarse que el concepto de equilibrio relevante es siempre el equilibrio bayesiano perfecto (o quizás un concepto de solución aún más poderoso), aunque éste es equivalente al equilibrio de Nash en juegos estáticos con información completa, equivalente a la perfección en subjuegos en juegos dinámicos con información completa (y perfecta) y equivalente al equilibrio bayesiano de Nash en juegos estáticos con información incompleta.

Este libro puede utilizarse de dos formas. A los estudiantes de economía de primer año de doctorado, muchas de las aplicaciones les serán ya familiares, por lo que la parte de teoría de juegos se puede cubrir en medio semestre, dejando muchas de las aplicaciones para ser estudiadas fuera de clase. A los estudiantes de licenciatura, conviene presentarles la teoría un poco más despacio, y cubrir en clase virtualmente todas las aplicaciones. El prerrequisito matemático fundamental es el cálculo diferencial en una variable; los rudimentos de probabilidad y análisis se introducen a medida que se necesitan.

1 Una buena fuente de aplicaciones de teoría de juegos en el ámbito de la organización industrial es *Teoría de la organización industrial*, de Tirole (Ariel, 1990).

Aprendí teoría de juegos con David Kreps, John Roberts y Bob Wilson durante mis estudios de doctorado, y con Adam Brandemburger, Drew Fudenberg y Jean Tirole más adelante. A ellos debo la parte teórica de este libro. El énfasis en las aplicaciones y otros aspectos del estilo pedagógico del libro, en cambio, se los debo en gran parte a los estudiantes del departamento de economía del M.I.T. quienes, de 1985 a 1990, inspiraron y moldearon los cursos que han culminado en este libro. Estoy muy agradecido a todos estos amigos por las ideas que han compartido conmigo y el estímulo que siempre me han otorgado, así como por los numerosos comentarios útiles al borrador del libro que he recibido de Joe Farrell, Milt Harris, George Mailath, Matthew Rabin, Andy Weiss y varios críticos anónimos. Finalmente, me complace reconocer los consejos y apoyo que he recibido de Jack Repcheck de Princeton University Press y la ayuda financiera de una beca Olin en economía del National Bureau of Economic Research.

1. Juegos estáticos con información completa

En este capítulo consideramos juegos simples de la siguiente forma: primero los jugadores forman decisiones simultáneamente; a continuación reciben sus ganancias, que dependen de la combinación de acciones que acaban de elegir. Dentro de la clase de estos juegos estáticos (o de decisión simultánea), restringimos nuestra atención a los juegos con *información completa*. Es decir, la función de ganancias de cada jugador (la función que determina la ganancia de cada jugador a partir de la combinación de acciones elegidas por los jugadores) es conocida por los jugadores. Estudiamos los juegos dinámicos (o de toma de decisiones sucesivas) en los capítulos 2 y 4, y los juegos con información incompleta (juegos en los cuales algún jugador no está seguro de la función de ganancias de otro jugador, como ocurre en una subasta en la cual lo que cada licitador está dispuesto a pagar por el bien subastado es desconocido por los otros licitadores) en los capítulos 3 y 4.

En la sección 1.1 entramos en las dos cuestiones básicas de la teoría de juegos: cómo describir un juego y cómo resolver el problema de teoría de juegos resultante. Con este fin describimos los instrumentos que utilizaremos para analizar los juegos estáticos con información completa, y sentaremos las bases de la teoría que utilizaremos para analizar juegos más ricos en capítulos posteriores. Definimos también la *representación en forma normal* de un juego y la noción de *estrategia estrictamente dominada*. Demostramos que algunos juegos pueden resolverse mediante la aplicación de la idea de que los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, pero también que en otros juegos este enfoque da lugar a predicciones muy imprecisas sobre el desarrollo del juego (algunas veces tan imprecisa como la afirmación de que "cualquier cosa puede ocurrir"). Después, definimos el *equilibrio de Nash*, un concepto de solución que da pie a predicciones mucho más precisas en una clase de juegos muy amplia.

En la sección 1.2, utilizando los instrumentos desarrollados en la sección previa, analizamos cuatro aplicaciones: el modelo de competencia imperfecta de Cournot (1838), el modelo de competencia imperfecta de Bertrand (1883), el modelo de arbitraje de oferta final de Farber (1980) y el problema de los ejidos (discutido por Hume [1739] y otros). En cada aplicación, en primer lugar traducimos la descripción informal del problema a una representación en la forma normal del juego y después hallamos su equilibrio de Nash. (Cada una de estas aplicaciones tiene un único equilibrio de Nash, pero discutimos ejemplos en los cuales esto no ocurre.)

En la sección 1.3 volvemos a la teoría. En primer lugar definimos la noción de *estrategia mixta*, que interpretamos en términos de la falta de certeza de un jugador con respecto a lo que otro jugador hará. Seguidamente, enunciamos y discutimos el teorema de Nash (1950), el cual garantiza que un equilibrio de Nash (que puede incluir estrategias mixtas) existe en una amplia clase de juegos. Puesto que presentamos primero la teoría básica en la sección 1.1, las aplicaciones en la sección 1.2 y, finalmente, más teoría en la sección 1.3, resulta evidente que el conocimiento de la teoría incluida en la sección 1.3 no constituye un requisito para entender las aplicaciones de la sección 1.2. Por otra parte, la idea de estrategia mixta y la existencia de equilibrio aparecen (ocasionalmente) en capítulos posteriores.

Cada capítulo concluye con ejercicios, sugerencias de lectura adicional y referencias.

1.1 Teoría básica: Juegos en forma normal y equilibrio de Nash

1.1.A Representación de los juegos en forma normal

En la representación de un juego en forma normal cada jugador elige de forma simultánea una estrategia, y la combinación de las estrategias elegidas por los jugadores determina la ganancia de cada jugador. Vamos a ilustrar la representación en forma normal con un ejemplo clásico, *el del dilema de los presos*. Dos sospechosos son arrestados y acusados de un delito. La policía no tiene evidencia suficiente para condenar a los sospechosos, a menos que uno confiese. La policía encierra a los sospechosos en celdas separadas y les explica las consecuencias derivadas de las decisiones que formen. Si ninguno confiesa, ambos serán condenados por un delito menor y sentenciados a un mes de cárcel. Si ambos confiesan,

serán sentenciados a seis meses de cárcel. Finalmente, si uno confiesa y el otro no, el que confiesa será puesto en libertad inmediatamente y el otro será sentenciado a nueve meses en prisión, seis por el delito y tres más por obstrucción a la justicia.

El problema de los presos puede representarse mediante la siguiente matriz binaria. (Como matriz, una matriz binaria puede tener un número arbitrario de filas y columnas; binaria se refiere al hecho de que en un juego de dos jugadores hay dos números en cada casilla, las ganancias de los dos jugadores.)

		Preso 2	
		Callarse	Confesar
Preso 1	Callarse	−1, −1	−9, 0
	Confesar	0, −9	−6, −6

El dilema de los presos

En este juego, cada jugador cuenta con dos estrategias posibles: confesar y no confesar. Las ganancias de los dos jugadores cuando eligen un par concreto de estrategias aparecen en la casilla correspondiente de la matriz binaria. Por convención, el pago al llamado jugador-fila (aquí el preso 1) es la primera ganancia, seguida por la ganancia del jugador-columna (aquí el preso 2). Por eso, si por ejemplo el preso 1 elige callar y el preso 2 elige confesar, el preso 1 recibe una ganancia de −9 (que representa nueve meses en prisión) y el preso 2 recibe una ganancia de 0 (que representa la inmediata puesta en libertad).

Ahora abordamos el caso general. La *representación en forma normal* de un juego especifica: (1) los jugadores en el juego, (2) las estrategias de que dispone cada jugador y (3) la ganancia de cada jugador en cada combinación posible de estrategias. A menudo discutiremos juegos con un número n de jugadores, en los cuales los jugadores están numerados de 1 a n y un jugador arbitrario es denominado jugador i. Sea S_i el conjunto de estrategias con que cuenta el jugador i (llamado *espacio de estrategias de i*), y sea s_i un elemento arbitrario de este conjunto. (Ocasionalmente escribiremos $s_i \in S_i$ para indicar que la estrategia s_i es un elemento del conjunto S_i.) Sea $(s_1, \ldots, s_n)$ una combinación de estrategias, una para cada jugador, y sea u_i la función de ganancias del jugador i: $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ es la ganancia del jugador i si los jugadores eligen las estrategias $(s_1, \ldots, s_n)$. Compilando toda esta información tenemos:

Definición. *La **representación en forma normal** de un juego con n jugadores especifica los espacios de estrategias de los jugadores $S_1, \ldots, S_n$ y sus funciones de ganancias $u_1, \ldots, u_n$. Denotamos este juego con $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$.*

Aunque hemos indicado que en un juego en forma normal los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea, esto no significa que las partes *actúen* necesariamente de forma simultánea. Es suficiente que cada parte elija la acción a seguir sin conocer las decisiones de los demás, como sería aquí el caso si los presos tomasen una decisión en momentos arbitrarios en sus celdas separadas. Además, aunque en este capítulo utilizamos juegos en forma normal para representar solamente juegos estáticos en los cuales los jugadores actúan todos sin conocer las decisiones de los demás jugadores, veremos en el capítulo 2 que las representaciones en forma normal pueden darse en juegos con tomas de decisión sucesivas, pero también que una alternativa, la representación *en forma extensiva* del juego, es a menudo un marco de trabajo más conveniente para analizar los aspectos dinámicos de los juegos.

1.1.B Eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas

Después de describir un modo de representar un juego, ahora vamos a esbozar una forma de resolver un problema de teoría de juegos. Empezamos con el dilema de los presos, porque es fácil de resolver utilizando únicamente la idea de que un jugador racional no utilizará una estrategia estrictamente dominada.

En el dilema de los presos, si un sospechoso va a confesar, sería mejor para el otro confesar y con ello ir a la cárcel seis meses, en lugar de callarse y pasar nueve meses en prisión. Del mismo modo, si un sospechoso va a callarse, para el otro sería mejor confesar y con ello ser puesto en libertad inmediatamente en lugar de callarse y permanecer en prisión durante un mes. Así, para el preso i, la estrategia de callarse está dominada por la de confesar: para cada estrategia que el preso j puede elegir, la ganancia del prisionero i es menor si se calla que si confiesa. (Lo mismo ocurriría en cualquier matriz binaria en la cual las ganancias 0, -1, -6 y -9 fueran reemplazadas por las ganancias T,R,P e I respectivamente,

siempre que $T > R > P > I$, para plasmar las ideas de ganancias de tentación, recompensa, penalización e ingenuidad. De forma más general:

Definición. *En el juego en forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, sean s_i' y s_i'' posibles estrategias del jugador i (por ejemplo, s_i' y s_i'' son elementos de S_i). La estrategia s_i' está **estrictamente dominada** por la estrategia s_i'' si para cada combinación posible de las estrategias de los restantes jugadores la ganancia de i por utilizar s_i' es estrictamente menor que la ganancia de i por utilizar s_i'':*

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'', s_{i+1}, \ldots, s_n) \qquad (DE)$$

para cada $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ que puede ser construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores $S_1, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_n$.

Los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, puesto que bajo ninguna conjetura que un jugador pudiera formarse sobre las estrategias que elegirán los demás jugadores sería óptimo utilizar tales estrategias.[1] Así, en el dilema de los presos, un jugador racional elegirá confesar, por lo que (confesar, confesar) será el resultado al que llegan dos jugadores racionales, incluso cuando (confesar, confesar) supone unas ganancias peores para ambos jugadores que (callar, callar). Como el dilema de los presos tiene múltiples aplicaciones (que incluyen la carrera de armamentos y el problema del polizón en la provisión de bienes públicos) trataremos variantes del juego en los capítulos 2 y 4. Por ahora nos centraremos más bien en si la idea de que jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas puede conducir a la solución de otros juegos.

Consideremos el juego abstracto de la figura 1.1.1.[2] El jugador 1 tiene dos estrategias y el jugador 2 tiene 3: S_1 = {alta, baja} y S_2 = {izquierda, centro, derecha}. Para el jugador 1, ni alta ni baja están estrictamente

[1] Una cuestión complementaria también tiene interés: si no existe una conjetura que el jugador i pueda formarse sobre las estrategias de los demás jugadores, que haga óptimo elegir la estrategia s_i, ¿podemos concluir que debe existir otra estrategia que domine estrictamente a s_i? La respuesta es afirmativa, siempre que adoptemos definiciones adecuadas de "conjetura" y de "otra estrategia", términos que incluyen la idea de estrategias mixtas que introduciremos en la sección 1.3.A.

[2] La mayor parte de este libro considera aplicaciones económicas más que ejemplos abstractos, tanto porque las aplicaciones son de interés por sí mismas como porque, para muchos lectores, las aplicaciones son a menudo un modo útil de explicar la teoría subyacente. Sin embargo, cuando introduzcamos algunas ideas teóricas básicas, recurriremos a ejemplos abstractos sin una interpretación económica directa.

dominadas: alta es mejor que baja si 2 elige izquierda (porque 1 es mayor que 0), pero baja es mejor que alta si 2 elige derecha (porque 2 es mayor que cero).

Jugador 2

Jugador1		Izquierda	Centro	Derecha
	Alta	1,0	1,2	0,1
	Baja	0,3	0,1	2,0

Figura 1.1.1

Sin embargo, para el jugador 2, derecha está estrictamente dominada por centro (porque 2 es mayor que 1 y 1 es mayor que 0), por lo que un jugador racional 2 no elegirá derecha. Así, si el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, puede eliminar derecha del espacio de estrategias del jugador 2. Esto es, si el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, puede comportarse en el juego de la figura 1.1.1 como si estuviera en el juego de la figura 1.1.2.

Jugador 2

Jugador 1		Izquierda	Centro
	Alta	1,0	1,2
	Baja	0,3	0,1

Figura 1.1.2

En la figura 1.1.2, baja está ahora estrictamente dominada por alta para el jugador 1, así que si el jugador 1 es racional (y el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional, por lo que se aplica el juego de la figura 1.1.2) no elegirá baja. Por eso, si el jugador 2 sabe que el jugador 1 es racional, *y* el jugador 2 sabe que el jugador 1 sabe que el jugador 2 es racional (por lo que el jugador 2 sabe que se aplica la figura 1.1.2), el jugador 2 puede eliminar baja del espacio de estrategias del jugador 1, quedando el juego como indica la figura 1.1.3. Pero ahora, izquierda está estrictamente dominada por centro para el jugador 2, quedando (alta, centro) como el resultado del juego.

Jugador 2

Jugador 1		Izquierda	Centro
	Alta	1,0	1,2

Figura 1.1.3

Este proceso se denomina *eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas*. Aunque está basado en la atractiva idea de que los jugadores racionales no utilizan estrategias estrictamente dominadas, el proceso presenta dos inconvenientes. En primer lugar, cada paso requiere un supuesto adicional sobre lo que los jugadores saben acerca de la racionalidad del otro. Si queremos ser capaces de aplicar el proceso para un número arbitrario de pasos, necesitamos suponer que es *información del dominio público* que los jugadores son racionales. Esto es, necesitamos suponer no sólo que todos los jugadores son racionales, sino también que todos los jugadores saben que todos los jugadores son racionales, y que todos los jugadores saben que todos los jugadores saben que todos los jugadores son racionales, y así *ad infinitum* (véase la definición formal de información del dominio público en Aumann [1976]).

La segunda desventaja de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas es que el proceso conduce a menudo a una predicción imprecisa sobre el desarrollo del juego. Por ejemplo, consideremos el juego de la figura 1.1.4. En este juego no hay estrategias estrictamente dominadas para ser eliminadas. (Puesto que no hemos fundamentado este juego en absoluto, al lector puede parecerle arbitrario o incluso patológico. Para una aplicación económica en el mismo sentido, véase el caso de tres o más empresas en el modelo de Cournot incluido en la sección 1.2.A.) Puesto que todas las estrategias en el juego sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, el proceso no permite ninguna predicción sobre el desarrollo del juego.

	I	C	D
A	0,4	4,0	5,3
M	4,0	0,4	5,3
B	3,5	3,5	6,6

Figura 1.1.4

A continuación abordamos el equilibrio de Nash, un concepto de solución que da lugar a predicciones mucho más precisas en una clase de juegos muy amplia. Demostramos que el equilibrio de Nash es un concepto de solución más poderoso que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, en el sentido de que las estrategias de los jugadores en un equilibrio de Nash siempre sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas, cosa que no ocurre a la inversa. En los capítulos siguientes argumentaremos que, en juegos más ricos, incluso el equilibrio de Nash da lugar a predicciones demasiado imprecisas sobre el desarrollo del juego, por lo que definiremos nociones de equilibrio aún más poderosas, más adecuadas para estos casos.

1.1.C Fundamentación y definición del equilibrio de Nash

Una manera de fundamentar la definición del equilibrio de Nash es el argumento de que si la teoría de juegos ofrece una solución única a un determinado problema, esta solución debe ser un equilibrio de Nash en el siguiente sentido: Supongamos que la teoría de juegos hace una única predicción sobre las estrategias elegidas por los jugadores. Para que esta predicción sea correcta es necesario que cada jugador esté dispuesto a elegir la estrategia predicha por la teoría. Por ello, la estrategia predicha de cada jugador debe ser la mejor respuesta de cada jugador a las estrategias predichas de los otros jugadores. Tal predicción puede denominarse *estratégicamente estable* o *self-enforcing*, puesto que ningún jugador va a querer desviarse de la estrategia predicha para él. Llamaremos a tal predicción equilibrio de Nash:

Definición. *En el juego en forma normal de n jugadores, $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, las estrategias $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ forman un* ***equilibrio de Nash*** *si, para cada jugador i, s_i^* es la mejor respuesta del jugador i (o al menos una de ellas) a las estrategias de los otros $n-1$ jugadores, $(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$:*

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \qquad \text{(EN)}$$

para cada posible estrategia s_i en S_i; esto es, s_i^* es una solución de

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Para relacionar esta definición con su fundamentación anterior, supongamos que la teoría de juegos ofrece las estrategias $(s_1', \ldots, s_n')$ como la solución al juego en forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$. Decir que $(s_1', \ldots, s_n')$ no constituyen un equilibrio de Nash de G es equivalente a decir que existe algún jugador i tal que s_i' *no* es la mejor respuesta a $(s_1', \ldots, s_{i-1}', s_{i+1}', \ldots, s_n')$. Esto es, existe alguna s_i'' en S_i tal que

$$u_i(s_1', \ldots, s_{i-1}', s_i', s_{i+1}', \ldots, s_n') < u_i(s_1', \ldots, s_{i-1}', s_i'', s_{i+1}', \ldots, s_n').$$

Así, si la teoría ofrece las estrategias $(s_1', \ldots, s_n')$ como la solución pero estas estrategias no constituyen un equilibrio de Nash, al menos un jugador tendrá un incentivo para desviarse de la predicción de la teoría, con lo que la teoría quedará desmentida por el desarrollo concreto del juego. Otra fundamentación muy parecida del equilibrio de Nash incorpora la idea de convenio: si surge un acuerdo sobre cómo comportarse en un determinado juego, las estrategias fijadas por el convenio deben formar un equilibrio de Nash; si no, habrá al menos un jugador que no se regirá por el convenio.

Para concretar, vamos a resolver unos cuantos ejemplos. Consideremos los tres juegos en forma normal ya descritos: el dilema de los presos y los de las figuras 1.1.1. y 1.1.4. Una forma torpe de hallar los equilibrios de Nash en un juego consiste simplemente en comprobar si cada combinación posible de estrategias satisface la condición (EN) en la definición.[3] En un juego de dos jugadores, esta forma de hallar los equilibrios comienza del modo siguiente: para cada jugador y para cada estrategia posible con la que cuenta cada jugador se determina la mejor respuesta del otro jugador a esa estrategia. En la figura 1.1.5 se representa esto en el caso del juego definido en 1.1.4, subrayando la ganancia de la mejor respuesta del jugador j a cada una de las posibles estrategias del jugador i. Si el jugador columna fuera a jugar I, por ejemplo, la mejor respuesta del jugador fila sería M, puesto que 4 es mayor que 3 y que 0; por ello, la ganancia que 4 le proporciona al jugador fila en la casilla (M,I) de la matriz binaria está subrayada.

[3] En la sección 1.3.A vamos a distinguir entre estrategias puras y mixtas. Después vamos a ver que la definición dada aquí describe equilibrios de Nash en *estrategias puras*, pero que también puede haber equilibrios de Nash en *estrategias mixtas*. A menos que se señale explícitamente de otro modo, todas las referencias a los equilibrios de Nash en esta sección se refieren a equilibrios de Nash en estrategias puras.

Un par de estrategias satisface la condición (EN) si la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a la del otro, es decir, si ambas ganancias están subrayadas en la casilla correspondiente de la matriz binaria. Por ello (B,D) es el único par de estrategias que satisface (EN). Lo mismo ocurre para (confesar, confesar) en el dilema de los presos y para (alta, centro) en la figura 1.1.1. Estos pares de estrategias son los únicos equilibrios de Nash de estos juegos.[4]

	I	C	D
A	$0,\underline{4}$	$\underline{4},0$	$5,3$
M	$\underline{4},0$	$0,\underline{4}$	$5,3$
B	$3,5$	$3,5$	$\underline{6},\underline{6}$

Figura 1.1.5

A continuación tratamos la relación entre el equilibrio de Nash y la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas. Recordemos que las estrategias de equilibrio de Nash en el dilema de los presos y en la figura 1.1.1 —(confesar, confesar) y (alta, centro) respectivamente— son las únicas estrategias que sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas. Este resultado puede generalizarse: si la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas elimina todas las estrategias menos las estrategias $(s_1^*,\ldots,s_n^*)$, estas estrategias constituyen el único equilibrio de Nash del juego. (Véase el apéndice para una demostración de esta afirmación.) Sin embargo, puesto que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas con frecuencia *no* elimina más que una combinación de estrategias, es del máximo interés el hecho de que el equilibrio de Nash sea un concepto de solución más poderoso que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas en el siguiente sentido: si las estrategias $s_1^*,\ldots,s_n^*$ constituyen un equilibrio de Nash, sobreviven a la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas (véase apéndice para una demostración), pero pueden existir estrategias que sobrevivan a la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas pero que no formen parte de ningún

[4] Esta afirmación es correcta incluso si no limitamos nuestra atención al equilibrio de Nash en estrategias puras, puesto que en estos juegos no existen equilibrios de Nash en estrategias mixtas. Véase el ejercicio 1.10.

equilibrio de Nash. Para ver esto último recordemos que en la figura 1.1.4, el equilibrio de Nash ofrece una única predicción (B,D), mientras que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas ofrece una predicción con el mayor grado de imprecisión posible: no se elimina ninguna estrategia; puede ocurrir cualquier cosa.

Tras demostrar que el equilibrio de Nash es un concepto de solución más poderoso que la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas tenemos que preguntarnos si el equilibrio de Nash no es un concepto de solución demasiado poderoso. Esto es ¿podemos estar seguros de que el equilibrio de Nash existe? Nash (1950) demostró que en cualquier juego finito (por ejemplo, un juego en el cual el número n de jugadores y los conjuntos de estrategias $S_1,\ldots,S_n$ son todos finitos) existe al menos un equilibrio de Nash. (Este equilibrio puede incluir estrategias mixtas, que discutiremos en la sección 1.3.A. Para un enunciado preciso del teorema de Nash véase la sección 1.3.B.) Cournot (1838) propuso la misma noción de equilibrio en el contexto de un modelo particular de duopolio y demostró (por construcción) que existe un equilibrio en este modelo; véase la sección 1.2.A. En cada aplicación analizada en este libro, seguiremos el ejemplo de Cournot: demostraremos que existe un equilibrio de Nash (o más poderoso) mediante la construcción de uno. En algunas secciones teóricas, no obstante, utilizaremos el teorema de Nash (o su análogo para conceptos de equilibrio más poderosos) y simplemente diremos que existe un equilibrio.

Concluimos esta sección con otro ejemplo clásico, *la batalla de los sexos*. Este ejemplo muestra que un juego puede tener múltiples equilibrios de Nash, y también será útil en las discusiones sobre estrategias mixtas de las secciones 1.3.B y 3.2.A. En la exposición tradicional del juego (que, quede claro, data de los años cincuenta), un hombre y una mujer están tratando de decidir qué harán esta noche; nosotros analizamos una versión del juego que no tiene en cuenta el sexo de los participantes.[5] En lugares de trabajo separados, Pat y Chris deben elegir entre ir a la ópera o a un combate de boxeo. Ambos(as) jugadores(as) preferirían pasar la noche juntos(as), pero Pat preferiría estar juntos(as) en el boxeo, mientras que Chris preferiría estar juntos(as) en la ópera, tal como representamos en la matriz binaria que sigue:

[5] En inglés, los diminutivos Pat y Chris pueden referirse tanto a nombres masculinos (Patrick y Christopher) como femeninos (Patricia y Christina). (N. de los T.)

COURNOT, A. 1838. *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. Edición inglesa: *Researches into the Mathematical Principles of theory of Wealth*. Publicado por N. Bacon. New York: Macmillan, 1897.

DASGUPTA, P., y E. MASKIN, 1986. "The Existence of Equilibrium in Discontinuous Economic Games, I: Theory." *Review of Economic Studies* 53:1-26.

FARBER, H., 1980, "An Analysis of Final-Offer Arbitration."*Journal of Conflict Resolution* 35:683-705.

FRIEDMAN, J. 1971. "A Noncooperative Equilibrium for Supergames." *Review of Economic Studies* 28:1-12.

GIBBONS, R. 1988. "Learning in Equilibrium Models of Arbitration." *American Economic Review* 78:896-912.

HARDIN, G. 1968. "The Tragedy of the Commons." *Science* 162:1243-48.

HARSANYI, J. 1973. "Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points." *International Journal of Game Theory* 2:1-23.

HOTELLING, H. 1929. "Stability in Competition." *Economic Journal* 39:41-57.

HUME, D. 1739. *A Treatise of Human Nature*. Reedición. Londres: J. M. Dent. 1952.

KAKUTANI, S. 1941. "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem." *Duke Mathematical Journal* 8:457-59.

KREPS, D., y J. SCHEINKMAN. 1983. "Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes." *Bell Journal of Economics* 4:326-37.

MONTGOMERY, J. 1991. "Equilibrium Wage Dispersion and Interindustry Wage Differentials." *Quarterly Journal of Economics* 106:163-79.

NASH, J. 1950. "Equilibrium Points in n-Person Games." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 36:48-49.

PEARCE, D. 1984. "Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection." *Econometrica* 52:1029-50.

STACKELBERG, H. VON. 1934. *Marktform und Gleichgewicht*. Viena: Julius Springer.

2. JUEGOS DINÁMICOS CON INFORMACIÓN COMPLETA

En este capítulo presentamos los juegos dinámicos. De nuevo, limitamos nuestra atención a los juegos con información completa (es decir, juegos en los que las funciones de ganancias de los jugadores son información del dominio público); véase una introducción a los juegos con información incompleta en el capítulo 3. En la sección 2.1 analizamos los juegos dinámicos no sólo con información completa, sino también con *información perfecta*, lo que significa que en cada momento del juego, el jugador a quien le corresponde decidir conoce la historia completa de todas las decisiones tomadas hasta ese momento. En las secciones 2.2 a 2.4, consideramos los juegos con información completa pero imperfecta: en algún momento del juego el jugador a quien le corresponde decidir no conoce toda la historia del juego.

El tema central en todo juego dinámico es el de la credibilidad. Como ejemplo de una amenaza que no resulta creíble, consideremos el siguiente juego de dos tiradas. Primero, el jugador 1 escoge entre dar 1.000 pesetas al jugador 2 o no darle nada. En segundo lugar, el jugador 2 observa la decisión del jugador 1 y decide si hacer estallar o no una granada que los matará a los dos. Supongamos que el jugador 2 amenaza con hacer estallar la granada a no ser que el jugador 1 le page las 1.000 pesetas. Si el jugador 1 cree que puede cumplirse la amenaza, su mejor respuesta es la de pagar las 1.000 pesetas. Pero el jugador 1 no debería creerse una amenaza semejante: si al jugador 2 se le diera la oportunidad de ejecutar dicha amenaza, escogería no hacerlo. Por tanto, el jugador 1 no debería pagar nada al jugador 2.[1]

En la sección 2.1 analizamos los siguientes casos de juegos dinámicos con información completa y perfecta: el jugador 1 decide primero, acto seguido el jugador 2 observa la decisión del jugador 1 y finalmente el juga-

[1] El jugador 1 podría preguntarse si un oponente que amenaza con hacer explotar una granada está loco. Este tipo de dudas se modelan como información incompleta, porque el jugador 1 no está seguro de la función de ganancias del jugador 2 (véase capítulo 3).

dor 2 toma su decisión con lo que concluye el juego. El juego de la granada pertenece a esta clase, como el modelo de duopolio de Stackelberg (1934) y el modelo de Leontief, (1946) de determinación de salarios y nivel de empleo en una empresa con fuerte implantación de un sindicato. Definimos el *resultado por inducción hacia atrás* y consideramos brevemente su relación con el equilibrio de Nash (posponiendo la discusión de esta relación hasta la sección 2.4). Resolvemos los modelos de Stackelberg y Leontief, utilizando este criterio. Derivamos también un resultado análogo para el modelo de negociación de Rubinstein (1982), aun cuando ese juego tiene una sucesión potencialmente infinita de tiradas y, por tanto, no pertenece a la clase de juegos considerada.

En la sección 2.2 ampliamos la clase de juegos analizada en la sección anterior: primero ambos jugadores 1 y 2 deciden simultáneamente, acto seguido los jugadores 3 y 4 observan las decisiones de 1 y 2 y finalmente, los jugadores 3 y 4 deciden simultáneamente con lo que concluye el juego. Como ya se explicará en la sección 2.4, la simultaneidad de las decisiones significa en este contexto que estos juegos son de información imperfecta. Definimos el *resultado perfecto en subjuegos* de tales juegos, que es la extensión natural de la inducción hacia atrás. Resolvemos los modelos de Diamond y Dybvig (1983) de pánico bancario, un modelo de aranceles y de competencia internacional imperfecta y el modelo de los torneos de Lazear y Rosen (1981), utilizando este criterio.

En la sección 2.3 estudiamos los *juegos repetidos*, en los cuales un grupo determinado de participantes juegan repetidamente un determinado juego, habiendo observado los resultados de las anteriores rondas del juego antes de iniciar la siguiente. El tema del análisis es que las amenazas y las promesas (creíbles) sobre el comportamiento futuro pueden afectar el comportamiento presente. Definimos el *equilibrio de Nash perfecto en subjuegos* para juegos repetidos y lo relacionamos con los resultados de la inducción hacia atrás y de la perfección en subjuegos definidos en las secciones 2.1 y 2.2. Enunciamos y demostramos el teorema de tradición oral para juegos repetidos infinitamente y analizamos el modelo de Friedman (1971) de colusión entre duopolistas de Cournot, el de Shapiro y Stiglitz (1984) de salarios de eficiencia y el de política monetaria de Barro y Gordon (1983).

En la sección 2.4 presentamos las herramientas necesarias para analizar en general un juego dinámico con información completa, ya sea con información perfecta o imperfecta. Definimos la representación de un juego en *forma extensiva* y la relacionamos con la representación en forma

normal presentada en el capítulo 1. Definimos también el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para juegos en general. La cuestión principal (tanto de esta sección como del capítulo en su conjunto) es que un juego dinámico con información completa puede tener muchos equilibrios de Nash, pero algunos de ellos pueden incluir amenazas o promesas que no son creíbles. Los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos son aquellos que pasan la prueba de credibilidad.

2.1 Juegos dinámicos con información completa y perfecta

2.1.A Teoría: inducción hacia atrás

El juego de la granada es un representante de la siguiente clase de juegos sencillos con información completa y perfecta:

1. El jugador 1 escoge una acción a_1 del conjunto factible A_1.
2. El jugador 2 observa a_1 y escoge una acción a_2 del conjunto factible A_2.
3. Las ganancias son $u_1(a_1,a_2)$ y $u_2(a_1,a_2)$.

Muchos problemas económicos se ajustan a esta descripción.[2] Dos ejemplos (que más adelante discutiremos con mayor detalle) son el modelo de duopolio de Stackelberg y el modelo de Leontief, de salarios y nivel de empleo en una empresa con fuerte implantación de un sindicato. Otros problemas económicos pueden modelarse si permitimos una sucesión de movimientos más amplia, ya sea añadiendo más jugadores o permitiendo que los jugadores tiren más de una vez. (El modelo de negociación de Rubinstein discutido en la sección 2.1.D es un ejemplo de este último caso.) Las características clave de un juego dinámico con información completa y perfecta son que (1) las decisones se toman de manera sucesiva, (2) todas las decisiones anteriores son conocidas antes de tomar la decisión

[2] Se podría permitir que el conjunto factible del jugador 2, A_2, dependiera de la acción del jugador 1, a_1. Tal dependencia podría denotarse con $A_2(a_1)$ o podría incorporarse en la función de ganancias del jugador 2 estableciendo que $u_2(a_1,a_2) = -\infty$ para valores de a_2 que no son factibles dado a_1. Algunos movimientos del jugador 1 podrían incluso poner fin al juego sin dar la oportunidad de mover al jugador 2; para tales valores de a_1, el conjunto de acciones factibles $A_2(a_1)$ contiene un único elemento, de forma que el jugador 2 no tiene elección posible.

siguiente y (3) las ganancias de los jugadores para cada combinación posible de jugadas son información del dominio público.

Resolvemos un juego por inducción hacia atrás de la siguiente forma: cuando al jugador 2 le corresponda decidir en la segunda etapa del juego, se enfrentará al siguiente problema, dada la acción a_1 previamente adoptada por el jugador 1:

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1,a_2).$$

Supongamos que para cada a_1 en A_1, el problema de optimización del jugador 2 tiene una única solución que podemos denotar con $R_2(a_1)$. Ésta es la *reacción* (o mejor respuesta) a la acción del jugador 1. Dado que el jugador 1 puede resolver el problema de maximización del jugador 2 tanto como el propio jugador 2, el jugador 1 debería prever la reacción del jugador 2 a cada acción a_1 que 1 pudiera tomar, de forma que el problema de 1 en la primera etapa se concreta en

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1 \left(a_1,R_2(a_1)\right).$$

Supongamos que este problema de optimización del jugador 1 tiene también una solución única que podemos denominar a_1^*. Llamaremos a $(a_1^*,R_2(a_1^*))$ el *resultado por inducción hacia atrás* de este juego. El resultado por inducción hacia atrás ignora las amenazas no creíbles: el jugador 1 prevé que el jugador 2 responderá óptimamente a cualquier acción que 1 pueda escoger jugando $R_2(a_1)$; el jugador 1 ignora las amenazas por parte del jugador 2 que no favorezcan a 2 cuando el juego llegue a su segunda etapa.

Recordemos que en el capítulo 1 usamos la representación en forma normal para estudiar juegos estáticos con información completa y nos concentramos en la noción del equilibrio de Nash como concepto para solucionar tales juegos. Sin embargo, en la discusión sobre juegos dinámicos de esta sección no hemos hecho mención alguna ni de la representación en forma normal ni del equilibrio de Nash. Al contrario, hemos dado una descripción verbal de un juego en (1)–(3) y hemos definido el resultado por inducción hacia atrás como solución del juego. En la sección 2.4.A veremos que la descripción verbal en (1)–(3) es la representación en forma extensiva del juego. En esta sección estableceremos la relación entre las representaciones en forma extensiva y normal, y veremos que para juegos dinámicos la representación en forma extensiva es a menudo más conveniente. En la sección 2.4.B definiremos el equilibrio perfecto de Nash

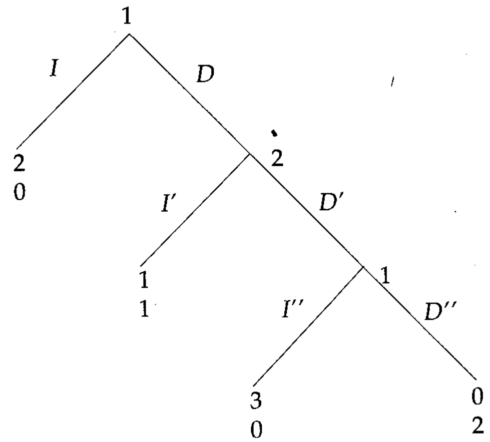
en subjuegos: un equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos si ignora las amenazas que no son creíbles en un sentido que definiremos con más precisión. Veremos que pueden existir múltiples equilibrios de Nash en un juego de la clase definida por (1)–(3), pero que el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es el equilibrio asociado con el resultado obtenido por inducción hacia atrás. Éste es un ejemplo de la observación, hecha en la sección 1.1.C, de que algunos juegos tienen múltiples equilibrios de Nash pero tienen un equilibrio que destaca como la solución más llamativa del juego.

Concluimos esta sección explorando los supuestos de racionalidad inherentes en los argumentos de inducción hacia atrás. Consideremos para ello el siguiente juego de tres etapas en el que el jugador 1 decide dos veces:

1. El jugador 1 escoge I o D donde I finaliza el juego con ganancias de 2 para el jugador 1 y 0 para el jugador 2.
2. El jugador 2 observa la elección de 1. Si 1 escoge D entonces 2 escoge I' o D', donde I' finaliza el juego con ganancias de 1 para ambos jugadores.
3. El jugador 1 observa la elección de 2 (y recuerda su propia decisión en la primera etapa). Si las decisiones anteriores fueron D y D' entonces 1 escoge I'' o D'' finalizando ambas el juego, I'' con ganancias de 3 para el jugador 1 y 0 para el jugador 2 y D'' con ganancias de 0 y 2 respectivamente.

Esta descripción verbal puede traducirse al siguiente juego en forma de árbol. (Ésta es la representación en forma extensiva que definiremos de forma más general en la sección 2.4.) La ganancia superior en el par de ganancias que aparecen en el extremo de cada rama del árbol es la ganancia del jugador 1; la inferior es la del jugador 2.

Para calcular el resultado por inducción hacia atrás de este juego empezamos por la tercera etapa (es decir, la segunda decisión del jugador 1). Aquí el jugador 1 se enfrenta a una elección entre una ganancia de 3 por medio de I'' o una ganancia de 0 a través de D'', de forma que I'' es óptimo. Por tanto, en la segunda etapa, el jugador 2 prevé que si el juego llega a su tercera etapa el jugador 1 escogerá I'', lo que le proporcionaría una ganancia de 0. Por tanto, en la segunda etapa la decisión del jugador 2 es entre una ganancia de 1 por medio de I' o una ganancia de 0 a través de D', de forma que I' es óptimo. Consecuentemente, en la primera etapa el jugador 1 prevé que si el juego llega a la segunda etapa el jugador 2 elegirá I', lo que le proporcionará una ganancia de 1. La elección del jugador 1 en la primera etapa es, por tanto, entre una ganancia de 2 por medio de I o una ganancia de 1 a través de D, de forma que I es óptimo.



Este argumento establece que el resultado por inducción hacia atrás es que el jugador 1 escoge I en la primera etapa y se acaba el juego. Aun cuando el uso de la inducción hacia atrás establece que el juego se acaba en la primera etapa, una parte importante del argumento trata de lo que ocurriría si el juego no se acabase en esta primera etapa. En la segunda etapa, por ejemplo, cuando el jugador 2 prevé que si el juego llega a la tercera etapa el jugador 1 elegirá I'', 2 está suponiendo que 1 es racional. Este supuesto puede parecer inconsistente con el hecho de que 2 tiene la oportunidad de decidir en la segunda etapa sólo si 1 se desvía del resultado obtenido por inducción hacia atrás. Es decir, puede parecer que si 1 juega D en la primera etapa, 2 no puede suponer en la segunda etapa que 1 sea racional, pero esto no es así: si 1 juega D, en la primera etapa está claro que no puede ser información del dominio público que los dos jugadores sean racionales, pero existen razones para que 1 escogiera D que no contradicen el supuesto de 2 de que 1 es racional.[3] Una posibilidad es que sea información del dominio público que el jugador 1 es racional

[3] Recordemos de la discusión sobre la eliminación iterativa de las estrategias estrictamente dominadas (en la sección 1.1.B), que es información del dominio público que los jugadores son racionales si todos los jugadores son racionales, y si todos los jugadores saben que todos los jugadores son racionales y si todos los jugadores saben que todos los jugadores saben que todos los jugadores son racionales, etc, *ad infinitum*.

pero no que el jugador 2 lo sea: si 1 piensa que 2 podría no ser racional, 1 podría escoger D en la primera etapa confiando en que 2 eligiera D' en la segunda, dando con ello la oportunidad a 1 de jugar I'' en la tercera etapa. Otra posibilidad es que sea información del dominio público que el jugador 2 es racional pero no que el jugador 1 sea racional: si 1 es racional pero piensa que 2 cree que 1 podría no ser racional, 1 podría escoger D en la primera etapa confiando en que 2 pensara que 1 no es racional y, por tanto, jugara D' con la esperanza de que 1 jugara D'' en la tercera etapa. El uso de la inducción hacia atrás presupone que la elección de D por parte de 1 pueda explicarse siguiendo este razonamiento. Para algunos juegos, sin embargo, podría ser más razonable suponer que 1 jugó D porque 1 es, efectivamente, irracional. En tales juegos, el uso de la inducción hacia atrás pierde mucho de su atractivo como predicción del juego, tal como le pasa al equilibrio de Nash en juegos en los que la teoría de juegos no proporciona una solución única y no cabe esperar acuerdo alguno entre los jugadores.

2.1.B El modelo de duopolio de Stackelberg

Stackelberg (1934) propuso un modelo dinámico de duopolio en el cual una empresa dominante (o líder) decide primero y una empresa subordinada (o seguidora) decide en segundo lugar. En algunos momentos de la historia de la industria automovilística estadounidense, por ejemplo, General Motors parece haber jugado este papel de líder. Es inmediato ampliar esta descripción al caso en que haya más de una empresa seguidora, como Ford, Chrysler y otras. Siguiendo a Stackelberg, desarrollaremos el modelo bajo el supuesto de que las empresas escogen cantidades, como en el modelo de Cournot (donde las empresas deciden simultáneamente en vez de sucesivamente como aquí). Dejamos como ejercicio el desarrollo de un modelo de tomas de decisiones sucesivas en el que las empresas escogen los precios tal como lo hacen (simultáneamente) en el modelo de Bertrand.

El desarrollo temporal del juego es el siguiente: (1) La empresa 1 escoge una cantidad $q_1 \geq 0$; (2) la empresa 2 observa q_1 y escoge entonces una cantidad $q_2 \geq 0$; (3) las ganancias de la empresa i vienen dadas por la función de beneficio

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c],$$

donde $P(Q) = a - Q$ es el precio de equilibrio de mercado cuando la cantidad agregada es $Q = q_1 + q_2$, y c es el coste marginal constante de producción (siendo cero los costes fijos).

Para hallar el resultado por inducción hacia atrás de este juego, calculamos en primer lugar la reacción de la empresa 2 a una cantidad arbitrariamente fijada por la empresa 1. $R_2(q_1)$ es una solución de

$$\max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2 \geq 0} q_2[a - q_1 - q_2 - c],$$

lo que resulta en

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2},$$

siempre que $q_1 < a - c$. La misma ecuación para $R_2(q_1)$ apareció en nuestro análisis del juego de Cournot con decisiones simultáneas en la sección 1.2.A. La diferencia es que aquí $R_2(q_1)$ es realmente la reacción por parte de la empresa 2 a la cantidad observada que fija la empresa 1, mientras que en el análisis de Cournot $R_2(q_1)$ es la mejor respuesta de la empresa 2 a una cantidad hipotética que será simultáneamente escogida por la empresa 1.

Dado que la empresa 1 puede resolver el problema de la empresa 2 tanto como la propia empresa 2, la empresa 1 debería prever que la elección de la cantidad q_1 coincidirá con la reacción $R_2(q_1)$. Por tanto, el problema de la empresa 1 en la primera etapa del juego se concreta en

$$\begin{aligned}\max_{q_1 \geq 0} \pi_1 \left(q_1, R_2(q_1)\right) &= \max_{q_1 \geq 0} q_1[a - q_1 - R_2(q_1) - c] \\ &= \max_{q_1 \geq 0} q_1 \frac{a - q_1 - c}{2},\end{aligned}$$

lo que resulta en

$$q_1^* = \frac{a - c}{2} \quad \text{y} \quad R_2(q_1^*) = \frac{a - c}{4}$$

que es el resultado por inducción hacia atrás del juego del duopolio de Stackelberg.[4]

[4] De la misma forma que el "equilibrio de Cournot" y el "equilibrio de Bertrand" se refieren típicamente al equilibrio de Nash de los juegos de Cournot y Bertrand, la mención del "equilibrio de Stackelberg" significa a menudo que el juego es de decisiones sucesivas en vez de simultáneas. Sin embargo, como se ha constatado en la sección anterior, los juegos con decisiones sucesivas poseen a menudo múltiples equilibrios de Nash, de los cuales sólo uno está asociado con el resultado obtenido por inducción hacia atrás del juego. Por tanto, el "equilibrio de Stackelberg" puede referirse tanto a la naturaleza secuencial del juego como al uso de un criterio de solución más poderoso que el mero equilibrio de Nash.

Recordemos que en el equilibrio de Nash del juego de Cournot del capítulo 1, cada empresa produce $(a-c)/3$. Por tanto, la cantidad agregada obtenida por inducción hacia atrás en el juego de Stackelberg, $3(a - c)/4$, es mayor que la cantidad agregada en el equilibrio de Nash del juego de Cournot, $2(a - c)/3$, de forma que el precio de equilibrio de mercado es inferior en el juego de Stackelberg. Sin embargo, en el juego de Stackelberg la empresa 1 podía haber escogido la cantidad correspondiente al juego de Cournot, $(a - c)/3$, en cuyo caso la empresa 2 habría respondido con su cantidad de Cournot. Por tanto, en el juego de Stackelberg, la empresa 1 podría haber alcanzado el nivel de beneficios de Cournot, pero escogió no hacerlo, por lo que los beneficios de la empresa 1 en el juego de Stackelberg deben ser mayores que sus beneficios en el juego de Cournot. Pero el precio de equilibrio es inferior en el juego de Stackelberg, de forma que los beneficios agregados son menores. Por tanto, el hecho de que la empresa 1 esté mejor implica que la empresa 2 está peor en el juego de Stackelberg que en el juego de Cournot.

La observación de que la empresa 2 se encuentra en peor situación en el juego de Stackelberg que en el juego de Cournot ilustra una diferencia importante que existe entre los problemas de decisión uni o multipersonales. En la teoría de la decisión con un único agente, el tener más información nunca puede hacer que el agente decisor esté peor. En teoría de juegos, sin embargo, tener más información (o más precisamente, que otros jugadores sepan que uno tiene más información) *puede* hacer que un jugador esté peor.

En el juego de Stackelberg, la información en cuestión es la cantidad de la empresa 1: la empresa 2 conoce q_1 y (tan importante como esto) la empresa 1 sabe que la empresa 2 conoce q_1. Para ver el efecto que esta información tiene, consideremos un juego de decisión sucesiva algo distinto, en el que la empresa 1 escoge q_1, después de lo cual la empresa 2 escoge q_2, pero lo hace sin haber observado q_1. Si la empresa 2 cree que la empresa 1 ha escogido su cantidad de Stackelberg $q_1^* = (a - c)/2$, la mejor respuesta para la empresa 2 es de nuevo $R_2(q_1^*) = (a-c)/4$. Pero si la empresa 1 prevé que la empresa 2 creerá que ello vaya a ser así y, por tanto, escoja esta cantidad, la empresa 1 prefiere escoger su mejor respuesta a $(a - c)/4$ (es decir, $3(a - c)/8$) en lugar de su cantidad de Stackelberg $(a - c)/2$. Por todo ello, la empresa 2 no debe confiar en que la empresa 1 escoja su cantidad de Stackelberg. Más bien, el único equilibrio de Nash de este juego secuencial es que ambas empresas escojan la cantidad $(a - c)/3$, precisamente el equilibrio de Nash del juego de Cournot, en el que las dos empresas deciden simultáneamente.[5] Por lo tanto, que la empresa 1 sepa que la empresa 2 conoce q_1 va en contra de la empresa 2.

2.1.C Salarios y nivel de empleo en una empresa con fuerte implantación sindical

En el modelo de Leontief, (1946) de relación entre una empresa y un único sindicato (es decir, un sindicato que tiene el poder de monopolio de ofrecer la fuerza de trabajo a la empresa), el sindicato tiene poder exclusivo sobre los salarios, pero la empresa tiene el control exclusivo del nivel de empleo. (Conclusiones cualitativamente similares emergen en un modelo más realista en el cual la empresa y el sindicato negocian los salarios, pero la empresa retiene el poder exclusivo sobre el nivel de empleo.) La función de utilidad del sindicato es $U(w,L)$, donde w es el salario que el sindicato pide a la empresa y L es el nivel de empleo. Supongamos que $U(w,L)$ es creciente en los dos argumentos w y L. La función de beneficios de la empresa es $\pi(w,L) = R(L) - wL$, donde $R(L)$ son los ingresos que la empresa obtiene si emplea L trabajadores (y toma de forma óptima las correspondientes decisiones de producción y de estrategia de mercado). Supongamos que $R(L)$ es creciente y cóncava.

Supongamos que el desarrollo temporal del juego es: (1) el sindicato efectúa una demanda salarial, w; (2) la empresa observa (y acepta) w y escoge entonces el nivel de empleo, L; (3) las ganancias son $U(w,L)$ y $\pi(w,L)$. Podemos decir bastantes cosas sobre el resultado por inducción hacia atrás de este juego, aun sin haber supuesto ninguna forma funcional concreta de $U(w,L)$ y $R(L)$, pero no podemos calcular el resultado explícitamente.

En primer lugar caracterizamos la mejor respuesta de la empresa en la etapa (2), $L^*(w)$, a una demanda salarial arbitraria por parte del sindicato en la etapa (1), w. Dado w, la empresa escoge el nivel $L^*(w)$ que soluciona

$$\max_{L\geq 0} \pi(w,L) = \max_{L\geq 0} R(L) - wL,$$

[5] Esto es un ejemplo de la afirmación hecha en la sección 1.1.A: en un juego en forma normal los jugadores escogen sus estrategias simultáneamente, pero ello no implica necesariamente que *actúen* simultáneamente; es suficiente con que cada uno tome su decisión sin conocer las decisiones de los demás. Véase la sección 2.4.A para más discusión sobre esta cuestión.

cuya condición de primer orden es

$$R'(L) - w = 0.$$

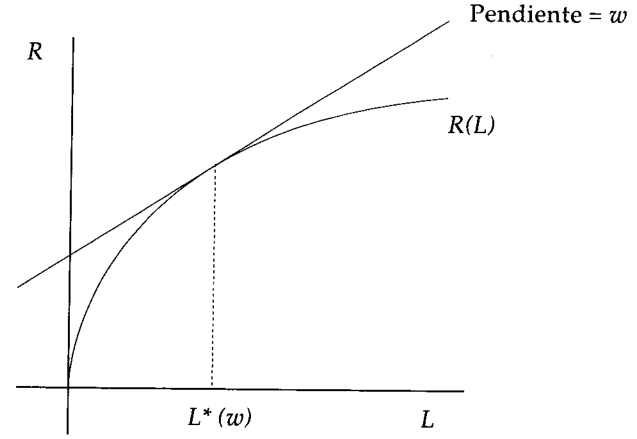
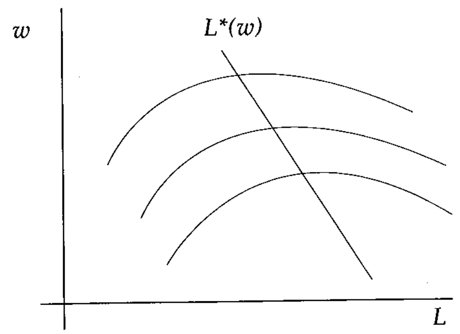


Figura 2.1.1

Para garantizar que la condición de primer orden $R'(L) - w = 0$ tenga solución, suponemos que $R'(0) = \infty$ y que $R'(\infty) = 0$, tal como indica la figura 2.1.1.

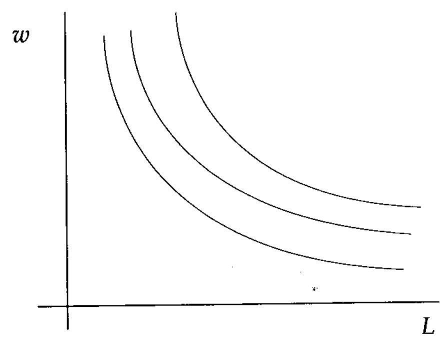
La figura 2.1.2 representa $L^*(w)$ en función de w (pero utiliza los ejes de forma que faciliten la comparación con gráficos posteriores) e indica que $L^*(w)$ corta cada una de las curvas de isobeneficio de la empresa en su punto máximo.[6] Manteniendo L constante, la empresa está tanto mejor cuanto menor sea w, de forma que las curvas isobeneficio inferiores representan niveles de beneficio más altos. La figura 2.1.3 representa las curvas de indiferencia del sindicato. Manteniendo L constante, el sindicato está tanto mejor cuanto más alto sea w, de forma que las curvas de indiferencia más altas corresponden a niveles de utilidad mayores del sindicato.

[6] Esta última propiedad es simplemente otra manera de decir que $L^*(w)$ maximiza $\pi(L,w)$ dado w. Si el sindicato pide w', por ejemplo, la elección de L por parte de la empresa se concreta en la elección de un punto en la recta horizontal $w = w'$. El máximo nivel de beneficio posible se alcanza escogiendo L de forma que la curva de isobeneficio que pasa por (L,w') sea tangente a la restricción $w = w'$.



Curvas de isobeneficio de la empresa

Figura 2.1.2



Curvas de indiferencia del sindicato

Figura 2.1.3

Consideremos ahora el problema del sindicato en la etapa (1). Dado que el sindicato puede resolver el problema de la empresa en la segunda etapa, tanto como la propia empresa, el sindicato debería prever que la reacción por parte de la empresa a su demanda salarial w será escoger el nivel de empleo $L^*(w)$. Por tanto, el problema del sindicato en la primera etapa se concreta en

$$\max_{w\geq 0} U\left(w,L^*(w)\right).$$

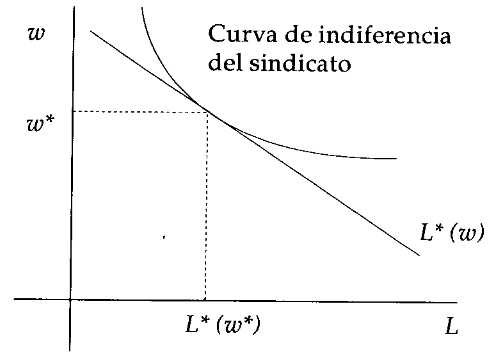


Figura 2.1.4.

En términos de las curvas de indiferencia representadas en la figura 2.1.3, al sindicato le gustaría escoger la demanda salarial w que proporcione un resultado $(w,L^*(w))$ que esté en la curva de indiferencia más alta posible. La solución al problema del sindicato es w^*, la demanda salarial que hace que la curva de indiferencia del sindicato que pasa por el punto $(w^*,L^*(w^*))$ sea tangente a $L^*(w)$ en ese punto (véase la figura 2.1.4). Por lo tanto, $(w^*,L^*(w^*))$ es el resultado por inducción hacia atrás de este juego de salarios y nivel de empleo.

Es fácil ver que $(w^*,L^*(w^*))$ es ineficiente: tanto la utilidad del sindicato como los beneficios de la empresa aumentarían si w y L estuvieran en la región sombreada de la figura 2.1.5. Esta ineficiencia hace que resulte difícil de entender que en la práctica las empresas parezca que retienen el control exclusivo sobre el nivel de ocupación. (Si permitimos que la empresa y el sindicato negocien los salarios pero mantenemos el control exclusivo de la empresa sobre el nivel de empleo obtenemos un resultado igualmente ineficiente.) Espinosa y Rhee (1989) proponen una explicación a este enigma basada en el hecho de que el sindicato y la empresa negocian repetidamente a lo largo del tiempo (normalmente cada tres años en Estados Unidos). En ese juego repetido, siempre que la elección de w por parte del sindicato y la elección de L por parte de la empresa caigan en la región sombreada de la figura 2.1.5 puede existir un equilibrio, aun cuando esos valores de w y L no pueden ser el resultado por inducción hacia atrás de una única negociación. Consúltese la sección 2.3 sobre juegos repetidos y el ejercicio 2.16 sobre el modelo de Espinosa-Rhee.

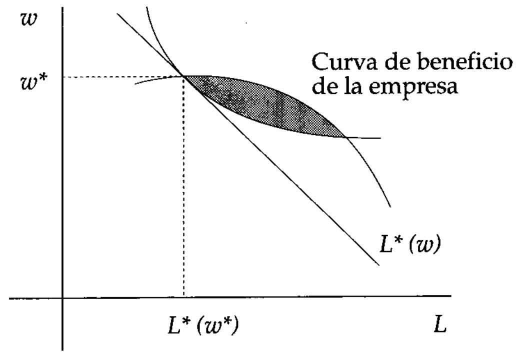


Figura 2.1.5

2.1.D Negociación secuencial

Empezamos con un modelo de negociación de tres periodos perteneciente a la clase de juegos estudiada en la sección 2.1.A. Pasamos luego a discutir el modelo de Rubinstein (1982), en el que el número de periodos es (potencialmente) infinito. En ambos modelos se llega a un acuerdo inmediatamente, no hay negociaciones prolongadas (como huelgas). En el modelo de Sobel y Takahashi (1983) de negociación secuencial con información asimétrica, en cambio, pueden ocurrir huelgas en el único equilibrio (bayesiano perfecto) con probabilidad positiva (véase la sección 4.3.B).

Los jugadores 1 y 2 negocian el reparto de una peseta. Hacen ofertas alternativamente: primero el jugador 1 hace una propuesta que el jugador 2 puede aceptar o rechazar; si 2 la rechaza, hace una propuesta que 1 puede aceptar o rechazar, y así sucesivamente. Una vez que una oferta ha sido rechazada, deja de ser vinculante y es irrelevante en las siguientes rondas del juego. Cada oferta corresponde a un periodo y los jugadores son impacientes: descuentan las ganancias obtenidas en periodos posteriores de acuerdo con el factor δ, donde $0 < \delta < 1$.[7]

[7] El factor de descuento δ refleja el valor temporal del dinero. Una peseta recibida al principio de un periodo puede ingresarse en un banco y proporcionar intereses, digamos que a un tipo r por periodo y, por tanto, tendrá un valor de $1 + r$ pesetas al principio del periodo siguiente. De forma equivalente, una peseta que se reciba al principio del periodo siguiente tiene ahora un valor de sólo $1/(1 + r)$ pesetas. Sea $\delta = 1/(1 + r)$; entonces una ganancia π obtenida en el próximo periodo tiene ahora ahora un valor de sólo $\delta\pi$; una ganancia π obtenida dentro de dos periodos tiene ahora un valor de sólo $\delta^2\pi$, y asísucesivamente. El valor actual de una ganancia futura recibe el nombre de *valor futuro* de esa ganancia.

Una descripción más detallada de la secuencia temporal del juego de tres periodos es la siguiente:

(1a) Al principio del primer periodo el jugador 1 propone quedarse con una fracción s_1 de una peseta, dejando $1 - s_1$ para el jugador 2.

(1b) El jugador 2 puede aceptar la oferta (en cuyo caso el juego finaliza y los jugadores reciben las ganancias s_1 y $1 - s_1$ inmediatamente) o rechazarla (en cuyo caso el juego pasa al segundo periodo).

(2a) Al principio del segundo periodo el jugador 2 propone que el jugador 1 se quede con una fracción s_2 de una peseta, dejando $1 - s_2$ para el jugador 2. (Nótese la convención de que s_t corresponde siempre al jugador 1, sea quien sea quien hace la oferta.)

(2b) El jugador 1 puede aceptar la oferta (en cuyo caso el juego finaliza y los jugadores reciben las ganancias s_2 y $1 - s_2$ inmediatamente) o rechazarla (en cuyo caso el juego pasa al tercer periodo).

(3) Al principio del tercer periodo el jugador 1 recibe una fracción s de una peseta, dejando $1 - s$ para el jugador 2, donde $0 < s < 1$.

En este modelo de tres periodos, el acuerdo al que se llega en el tercer periodo $(s, 1 - s)$ está fijado exógenamente. En el modelo con horizonte infinito que consideraremos más tarde, la ganancia s del tercer periodo representa la ganancia del jugador 1 en lo que queda del juego si se llega al tercer periodo (esto es, si las dos primeras ofertas son rechazadas).

Para calcular el resultado por inducción hacia atrás de este juego de tres periodos, calculamos en primer lugar la oferta óptima por parte del jugador 2 si se llega al segundo periodo. El jugador 1 puede recibir s en el tercer periodo rechazando la oferta s_2 del jugador 2 en este periodo, pero el valor en este periodo de recibir s en el periodo siguiente es sólo δs. Por tanto, el jugador 1 aceptará s_2 si y sólo si $s_2 \geq \delta s$. (Suponemos que cada jugador aceptará una oferta si es indiferente entre aceptarla o rechazarla.) El problema de decisión del jugador 2 en el segundo periodo, por tanto, se concreta en escoger entre $1 - \delta s$ en este periodo (ofreciendo $s_2 = \delta s$ al jugador 1) o recibir $1 - s$ en el siguiente periodo (ofreciendo al jugador 1 cualquier $s_2 < \delta s$). El valor descontado de la última opción es $\delta(1 - s)$, que es menor que $1 - \delta s$ obtenible por medio de la primera opción, de forma que la oferta óptima del jugador 2 en el segundo periodo es $s_2^* = \delta s$. Por tanto, si el juego llega al segundo periodo, el jugador 2 ofrecerá s_2^* y el jugador 1 aceptará.

Dado que el jugador 1 puede resolver el problema del jugador 2 en el segundo periodo tan bien como el propio jugador 2, el jugador 1 sabe que el jugador 2 puede recibir $1 - s_2^*$ en el segundo periodo rechazando la oferta s_1 del jugador 1 en este periodo, pero el valor en este periodo de recibir $1 - s_2^*$ el periodo siguiente es sólo de $\delta(1 - s_2^*)$. Por tanto, el jugador 2 aceptará $1 - s_1$ si y sólo si $1 - s_1 \geq \delta(1 - s_2^*)$ o $s_1 \leq 1 - \delta(1 - s_2^*)$. El problema de la decisión del jugador 1 en el primer periodo, por tanto, se concreta en escoger entre recibir $1 - \delta(1 - s_2^*)$ en este periodo (ofreciendo $1 - s_1 = \delta(1 - s_2^*)$ al jugador 2) o recibir s_2^* en el próximo periodo (ofreciendo cualquier $1 - s_1 \leq \delta(1 - s_2^*)$ al jugador 2). El valor descontado de la última opción es $\delta s_2^* = \delta^2 s$, que es menor que $1 - \delta(1 - s_2^*) = 1 - \delta(1 - \delta s)$ obtenible por medio de la primera opción, de forma que la oferta óptima del jugador 1 en el primer periodo es $s_1^* = 1 - \delta(1 - s_2^*) = 1 - \delta(1 - \delta s)$. Por tanto, en el resultado por inducción hacia atrás de este juego de tres periodos, el jugador 1 ofrece el reparto $(s_1^*, 1 - s_1^*)$ al jugador 2, quien acepta.

Consideremos ahora el caso en que el horizonte es infinito. El desarrollo temporal es el mismo que hemos descrito anteriormente, excepto que el acuerdo exógeno del paso (3) es reemplazado por una sucesión infinita de pasos (3a), (3b), (4a), (4b) y así sucesivamente. El jugador 1 hace la oferta en los periodos impares, el jugador 2 en los pares; la negociación continúa hasta que uno de los dos jugadores acepta una oferta. Nos gustaría hallar el resultado por inducción hacia atrás de este juego de horizonte infinito moviéndonos hacia atrás, tal como lo hemos hecho en los casos analizados hasta ahora. Sin embargo, como el juego podría continuar hasta el infinito, no existe un último momento a partir del cual iniciar tal análisis. Afortunadamente, la siguiente idea (aplicada originalmente por Shaked y Sutton [1984]) nos permite truncar el juego de horizonte infinito y aplicar la lógica del caso en el que el horizonte es finito: el juego que empieza en el tercer periodo (si se alcanza) es idéntico al juego completo (empezando desde el primer periodo): en ambos casos el jugador 1 hace la primera oferta, los jugadores se alternan haciendo las siguientes ofertas y la negociación continúa hasta que un jugador acepta una oferta.

Dado que no hemos definido formalmente el resultado por inducción hacia atrás de este juego de negociación con horizonte infinito, nuestros argumentos serán informales (pero pueden formalizarse). Supongamos que existe un resultado por inducción hacia atrás del juego completo en el que los jugadores 1 y 2 reciben las ganancias s y $1 - s$ respectivamente. Podemos utilizar estas ganancias en el juego que empieza en el tercer periodo, si se alcanza, y proceder entonces hacia atrás hasta el primer periodo (como en el juego de tres periodos) para calcular un nuevo resultado por inducción hacia atrás del juego completo. En este nuevo resultado

por inducción hacia atrás, el jugador 1 ofrecerá el acuerdo $(f(s), 1 - f(s))$ en el primer periodo y el jugador 2 aceptará, donde $f(s) = 1 - \delta(1 - \delta s)$ es la fracción del jugador 1 en el primer periodo del juego anterior de tres periodos cuando el acuerdo $(s, 1 - s)$ se imponía exógenamente en el tercer periodo.

Sea s_A la ganancia más alta que el jugador 1 puede recibir en cualquier resultado por inducción hacia atrás del juego completo. Consideremos el uso de s_A como la ganancia del jugador 1 en el tercer periodo, tal como lo hemos descrito anteriormente; esto producirá un nuevo resultado por inducción hacia atrás en el que la ganancia en el primer periodo del jugador 1 es $f(s_A)$. Dado que $f(s) = 1 - \delta + \delta^2 s$ es creciente en s, $f(s_A)$ es la ganancia en el primer periodo más alta posible, ya que s_A es la ganancia más alta posible en el tercer periodo. Pero s_A es también la ganancia más alta posible en el primer periodo, de forma que $f(s_A) = s_A$. Argumentos similares demuestran que $f(s_B) = s_B$, donde s_B es la ganancia más baja posible que el jugador 1 puede obtener en cualquier resultado por inducción hacia atrás del juego completo. El único valor de s que satisface $f(s) = s$ es $1/(1 + \delta)$, que denotaremos con s^*. Por tanto, $s_A = s_B = s^*$ de forma que existe un único resultado por inducción hacia atrás del juego completo: en el primer periodo el jugador 1 ofrece un acuerdo $(s^* = 1/(1 + \delta), 1 - s^* = \delta/(1 + \delta))$ al jugador 2, quien acepta.

2.2 Juegos en dos etapas con información completa pero imperfecta

2.2.A Teoría: Perfección en subjuegos

Enriquecemos ahora la clase de juegos analizada en la sección anterior. Como en los juegos dinámicos con información completa y perfecta, continuamos suponiendo que el juego sigue una sucesión de etapas, habiendo los jugadores observado las decisiones formadas en las etapas previas antes del comienzo de una nueva etapa. Sin embargo, a diferencia de los juegos analizados en la sección anterior, permitimos que haya decisiones simultáneas en cada etapa. Como explicaremos en la sección 2.4, esta simultaneidad de decisiones significa que los juegos analizados en esta sección tienen información imperfecta. No obstante, estos juegos comparten características importantes con los juegos con información perfecta considerados en la sección anterior.

Analizaremos el siguiente juego sencillo, al cual (sin mucha inspiración) llamaremos juego en dos etapas con información perfecta pero incompleta:

1. Los jugadores 1 y 2 escogen simultáneamente las acciones a_1 y a_2 de los conjuntos factibles A_1 y A_2 respectivamente.
2. Los jugadores 3 y 4 observan el resultado de la primera etapa, (a_1,a_2), y escogen entonces simultáneamente las acciones a_3 y a_4 de los conjuntos factibles A_3 y A_4 respectivamente.
3. Las ganancias son $u_i(a_1,a_2,a_3,a_4)$ para $i = 1,2,3,4$.

Muchos problemas económicos se ajustan a esta descripción.[8] Tres ejemplos (que discutiremos más adelante con mayor detalle) son los pánicos bancarios, los aranceles y la competencia internacional imperfecta y los torneos (por ejemplo, la lucha entre varios vicepresidentes de una empresa por ser el próximo presidente). Otros problemas económicos pueden modelarse si permitimos una mayor complejidad, ya sea añadiendo más jugadores o permitiendo que los jugadores jueguen en más de una etapa. Podría incluso haber menos jugadores: en algunas aplicaciones los jugadores 3 y 4 son los jugadores 1 y 2; en otras bien el jugador 2 o el 4 no aparece.

Resolvemos un juego de esta clase utilizando un enfoque parecido al de la inducción hacia atrás, pero esta vez, el primer paso que damos cuando nos movemos hacia atrás desde el final del juego exige la resolución de un juego real (el juego simultáneo entre los jugadores 3 y 4 en la segunda etapa, dado el resultado de la primera etapa) en vez de resolver un problema de optimización para un único individuo como en la sección anterior. Para no complicar las cosas, supondremos en esta sección que para cada resultado factible de la primera etapa, (a_1,a_2), el juego que queda pendiente en la segunda etapa entre los jugadores 3 y 4 tiene un único equilibrio de Nash que denominamos $(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$. En la sección 2.3.A (sobre juegos repetidos) consideramos las consecuencias de prescindir de este supuesto.

Si los jugadores 1 y 2 prevén que el comportamiento en la segunda etapa de los jugadores 3 y 4 vendrá dado por $(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$, la interacción entre los jugadores 1 y 2 en la primera etapa se concreta en el siguiente juego de decisiones simultáneas:

[8] Como en la sección anterior, los conjuntos de acciones factibles de los jugadores 3 y 4 en la segunda etapa, A_3 y A_4, podrían depender del resultado de la primera etapa (a_1,a_2). En particular, podrían existir valores (a_1,a_2) que finalizaran el juego.

1. Los jugadores 1 y 2 escogen simultáneamente las acciones a_1 y a_2 de los conjuntos factibles A_1 y A_2 respectivamente.
2. Las ganancias son $u_i(a_1,a_2,a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$ para $i = 1,2$.

Supongamos que (a_1^*,a_2^*) es el único equilibrio de Nash de este juego de decisiones simultáneas. Llamaremos a $(a_1^*,a_2^*,a_3^*(a_1^*, a_2^*),a_4^*(a_1^*,a_2^*))$ *resultado perfecto en subjuegos* de este juego en dos etapas. Este resultado es el ánalogo natural del resultado por inducción hacia atrás en los juegos con información completa y perfecta, y esta analogía se refiere tanto a sus características atractivas como a las que no lo son tanto. Los jugadores 1 y 2 no deberían creer ninguna amenaza por parte de los jugadores 3 y 4 que correspondiera a acciones que no fueran el equilibro de Nash del juego que queda en la segunda etapa, ya que cuando el juego llegue realmente a la segunda etapa, al menos uno de los jugadores 3 o 4 no querrá cumplir su amenaza (precisamente porque no es un equilibrio de Nash del juego que queda en la segunda etapa). Por otra parte, supongamos que el jugador 1 es también el jugador 3, y que el jugador 1 no juega a_1^* en la primera etapa: el jugador 4 puede querer entonces reconsiderar el supuesto de que el jugador 3 (es decir, el jugador 1) jugará $a_3^*(a_1,a_2)$ en la segunda etapa.

2.2.B Pánico bancario

Dos inversores han depositado cada uno de ellos una cantidad D en un banco. El banco ha invertido estos depósitos en un proyecto a largo plazo. Si el banco se ve obligado a liquidar su inversión antes de que el proyecto venza, puede recuperar un total de $2r$, donde $D > r > D/2$. Sin embargo, si el banco deja que la inversión llege a su vencimiento, el proyecto rendirá un total de $2R$, donde $R > D$.

Existen dos fechas en las cuales los inversores pueden sacar dinero del banco: la fecha 1 es anterior al vencimiento de la inversión del banco, la fecha 2 es posterior. Para simplificar, supondremos que no hay descuento. Si ambos inversores sacan dinero en la fecha 1, cada uno recibe r y el juego se acaba. Si sólo un inversor saca dinero en la fecha 1, ese inversor recibe D, el otro recibe $2r - D$ y el juego se acaba. Finalmente, si ninguno de los inversores saca dinero en la fecha 1, el proyecto llega a su vencimiento y los inversores deciden si sacar el dinero o no en la fecha 2. Si los dos inversores sacan el dinero en la fecha 2, cada uno de ellos recibe R y el juego se acaba. Si sólo un inversor saca el dinero en la fecha 2, ese inversor recibe $2R - D$, el otro recibe D y el juego se acaba. Finalmente, si ninguno de los inversores saca el dinero en la fecha 2, el banco devuelve R a cada inversor y el juego se acaba.

En la sección 2.4 discutiremos cómo representar formalmente este juego. Sin embargo, por ahora procederemos de modo informal. Representemos las ganancias de los dos inversores en las fechas 1 y 2 (en función de sus decisiones sobre sacar dinero en esas fechas) con el siguiente par de juegos en forma normal. Nótese que el juego en forma normal correspondiente a la fecha 1 no es típico: si ambos inversores escogen no sacar dinero en la fecha 1, no se especifica ninguna ganancia, sino que los inversores pasan al juego en forma normal correspondiente a la fecha 2.

	Sacar	No sacar
Sacar	r,r	$D,2r-D$
No Sacar	$2r-D,D$	siguiente etapa

Fecha 1

	Sacar	No sacar
Sacar	R,R	$2R-D,D$
No Sacar	$D,2R-D,$	R,R

Fecha 2

Para analizar este juego procedemos hacia atrás. Considérese el juego en forma normal correspondiente a la fecha 2. Como $R > D$ (y por tanto $2R - D > R$), "sacar" domina estrictamente a "no sacar", de forma que existe un único equilibrio de Nash de este juego: ambos inversores sacan el dinero, lo que conduce a unas ganancias de (R,R). Como no hay descuento, podemos simplemente sustituir estas ganancias en el juego en forma normal correspondiente a la fecha 1, tal como indica la figura 2.2.1. Dado que $r < D$ (y por tanto $2r - D < r$), esta versión de un periodo del juego de dos periodos tiene dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (1) ambos inversores sacan el dinero, lo que conduce a unas ganancias de (r,r); (2) ninguno de los dos inversores saca el dinero, lo que lleva a unas ganancias de (R,R). Por tanto, el juego original del pánico bancario de dos periodos tiene dos resultados perfectos en subjuegos (y, por tanto, no se ajusta totalmente a la clase de juegos definida en la sección 2.2.A): (1) ambos inversores sacan el dinero en la fecha 1, lo que conduce a unas ganancias de (r,r); (2) ninguno de los inversores saca el dinero en la fecha 1 pero lo hacen en la fecha 2, lo que conduce a unas ganancias de (R,R) en la fecha 2.

	Sacar	No sacar
Sacar	r,r	$D,2r-D$
No Sacar	$2r-D,D$	R,R

Figura 2.2.1

El primero de estos resultados puede interpretarse como el de un pánico bancario. Si el inversor 1 cree que el inversor 2 sacará su dinero en la fecha 1, su mejor respuesta es sacar también el dinero, aun cuando a ambos les iría mejor si esperasen a la fecha 2 para sacar el dinero. Este juego del pánico bancario difiere del dilema de los presos discutido en el capítulo 1 en un aspecto importante: ambos juegos poseen un equilibrio de Nash que conduce a unas ganancias socialmente ineficientes; en el dilema de los presos éste es el único equilibrio (y lo es en estrategias dominantes), mientras que en este juego existe también un segundo equilibrio que es eficiente. Por tanto, este modelo no predice cuándo va a ocurrir un pánico bancario, pero muestra que es un fenómeno que puede ocurrir en equilibrio. Véase un modelo más rico en Diamond y Dybvig (1983).

2.2.C Aranceles y competencia internacional imperfecta

Nos ocupamos ahora de una aplicación de economía internacional. Consideremos dos países idénticos, que denominamos con $i = 1,2$. Cada país tiene un gobierno que escoge un arancel, una empresa que produce tanto para el consumo interno como para la exportación y unos consumidores que compran en el mercado interno, ya sea de la empresa nacional o de la extranjera. Si la cantidad total en el mercado del país i es Q_i, el precio de equilibrio del mercado es $P_i(Q_i) = a - Q_i$. La empresa del país i (que en adelante llamaremos empresa i) produce h_i para el consumo interior y e_i para la exportación. Por tanto, $Q_i = h_i + e_j$. Las empresas tienen un coste marginal constante c y no tienen costes fijos. Por tanto, el coste total de producción de la empresa i es $C_i(h_i,e_i) = c(h_i + e_i)$. Las empresas también incurren en un coste arancelario sobre las exportaciones: si la empresa i exporta e_i al país j cuando el gobierno j ha establecido una tasa arancelaria de t_j, la empresa i debe pagar $t_j e_i$ al gobierno j.

El desarrollo temporal del juego es el siguiente: Primero, ambos gobiernos escogen simultáneamente las tasas arancelarias t_1 y t_2. En segundo lugar, las empresas observan las tasas arancelarias y escogen simultáneamente las cantidades para el consumo interno y para la exportación, (h_1,e_1) y (h_2,e_2). En tercer lugar, las ganancias son los beneficios de la empresa i y el bienestar total del gobierno i, donde el bienestar total del país i es la suma de los excedentes de los consumidores[9] del país i, los beneficios recibidos por la empresa i y el ingreso arancelario que el gobierno i recauda de la empresa j:

$$\begin{aligned}\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j) =& [a-(h_i+e_j)]h_i + [a-(e_i+h_j)]e_i\\ &- c(h_i+e_i) - t_j e_i,\\ W_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j) =& \frac{1}{2}Q_i^2 + \pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j) + t_i e_j.\end{aligned}$$

Supongamos que los gobiernos han escogido los aranceles t_1 y t_2. Si $(h_1^*,e_1^*,h_2^*,e_2^*)$ es un equilibrio de Nash del juego (de dos mercados) restante entre las empresas 1 y 2 entonces, para cada i, (h_i^*,e_i^*) debe solucionar

$$\max_{h_i,e_i\geq 0} \pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j,e_j).$$

Como $\pi_i(t_i,t_j,h_i,e_i,h_j^*,e_j^*)$ puede escribirse como la suma de los beneficios de la empresa i en el mercado i (los cuales son función de h_i y e_j^* únicamente) y los beneficios de la empresa i en el mercado j (los cuales son función de e_i, h_j^* y t_j únicamente), el problema de optimización en los dos mercados para la empresa i se simplifica al separarse en dos problemas, uno para cada mercado: h_i^* debe solucionar

$$\max_{h_i\geq 0} h_i[a-(h_i+e_j^*)-c],$$

y e_i^* debe solucionar

$$\max_{e_i\geq 0} e_i[a-(e_i+h_j^*)-c] - t_j e_i.$$

[9] Si un consumidor compra un bien a un precio p cuando habría estado dispuesto a pagar un valor v, se beneficia de un excedente de $v-p$. Dada la curva de demanda inversa $P_i(Q_i) = a - Q_i$, si la cantidad vendida en el mercado i es Q_i, puede demostrarse que el excedente agregado del consumidor es $(1/2)Q_i^2$.

Suponiendo que $e_j^* \leq a-c$, tenemos que

$$h_i^* = \frac{1}{2}(a - e_j^* - c), \tag{2.2.1}$$

y suponiendo que $h_j^* \leq a-c-t_j$, tenemos que

$$e_i^* = \frac{1}{2}(a - h_j^* - c - t_j). \tag{2.2.2}$$

(Los resultados que derivamos son coherentes con ambos supuestos.) Las dos funciones de mejor respuesta (2.2.1) y (2.2.2) deben cumplirse para cada $i = 1,2$. Por tanto, tenemos cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas $(h_1^*,e_1^*,h_2^*,e_2^*)$. Afortunadamente, este sistema de ecuaciones puede simplificarse dividiéndose en dos grupos de dos ecuaciones con dos incógnitas. Las soluciones son

$$h_i^* = \frac{a-c+t_i}{3} \quad \text{y} \quad e_i^* = \frac{a-c-2t_j}{3}. \tag{2.2.3}$$

Recordemos (en la sección 1.2.A) que la cantidad de equilibrio escogida por las dos empresas en el juego de Cournot es $(a-c)/3$, pero que este resultado se obtuvo bajo el supuesto de costes marginales simétricos. En el equilibrio descrito en (2.2.3), por el contrario, las decisiones arancelarias de los gobiernos hacen que los costes marginales sean asimétricos (como en el ejercicio 1.6). En el mercado i, por ejemplo, el coste marginal de la empresa i es c, pero el de la empresa j es $c+t_i$. Como el coste de la empresa j es más alto, ésta quiere producir menos. Pero si la empresa j va a producir menos, el precio de equilibrio será más alto, de forma que la empresa i querrá producir más, en cuyo caso la empresa j querrá producir menos todavía. Por tanto, en equilibrio, h_i^* crece con t_i y e_j^* decrece (a un ritmo más rápido) con t_i, como indica (2.2.3).

Una vez resuelto el juego entre las dos empresas que queda en la segunda etapa, cuando los gobiernos han escogido las tasas arancelarias, podemos ahora representar la interacción entre los dos gobiernos en la primera etapa con el siguiente juego de decisiones simultáneas. Primero, los gobiernos escogen las tasas arancelarias t_1 y t_2 simultáneamente. En segundo lugar, las ganancias son $W_i(t_i,t_j,h_1^*,e_1^*,h_2^*,e_2^*)$ para el gobierno $i = 1,2$, donde h_i^* y e_i^* son funciones de t_i y t_j, tal como se indica en (2.2.3). Hallamos ahora el equilibrio de Nash de este juego entre los gobiernos.

Para simplificar la notación, suprimiremos la dependencia de h_i^* de t_i y de e_i^* de t_j: con $W_i^*(t_i,t_j)$ denotamos a $W_i(t_i,t_j,h_1^*,e_1^*,h_2^*,e_2^*)$, la ganancia del gobierno i cuando escoge la tasa arancelaria t_i, el gobierno j escoge t_j

y las empresas i y j se comportan según el equilibrio de Nash dado por (2.2.3). Si (t_1^*, t_2^*) es un equilibrio de Nash de este juego entre los gobiernos, entonces, para cada i, t_i^* debe solucionar

$$\max_{t_i \geq 0} W_i^*(t_i, t_j^*).$$

Pero $W_i^*(t_i, t_j^*)$ es igual a

$$\frac{(2(a-c)-t_i)^2}{18} + \frac{(a-c+t_i)^2}{9} + \frac{(a-c-2t_j^*)^2}{9} + \frac{t_i(a-c-2t_i)}{3},$$

por tanto

$$t_i^* = \frac{a-c}{3}$$

para cada i, independientemente de t_j^*. En consecuencia, en este modelo escoger una tasa arancelaria de $(a-c)/3$ es una estrategia dominante de cada gobierno. (En otros modelos, por ejemplo cuando los costes marginales son crecientes, las estrategias de equilibrio de los gobiernos no son dominantes.) Sustituyendo $t_i^* = t_j^* = (a-c)/3$ en (2.2.3) obtenemos

$$h_i^* = \frac{4(a-c)}{9} \quad \text{y} \quad e_i^* = \frac{a-c}{9}$$

como las cantidades escogidas por las empresas en la segunda etapa. Por tanto, el resultado perfecto en subjuegos de este juego de aranceles es $(t_1^* = t_2^* = (a-c)/3, h_1^* = h_2^* = 4(a-c)/9, e_1^* = e_2^* = (a-c)/9)$.

En el resultado perfecto en subjuegos, la cantidad agregada en cada mercado es $5(a-c)/9$. Sin embargo, si los gobiernos hubieran escogido unas tasas arancelarias iguales a cero, la cantidad agregada en cada mercado habría sido $2(a-c)/3$, exactamente igual que en el modelo de Cournot. Por tanto, el excedente de los consumidores en el mercado i (el cual, como hemos visto anteriormente, es simplemente la mitad del cuadrado de la cantidad agregada en el mercado i) es menor, cuando los gobiernos escogen las tasas arancelarias que son estrategias dominantes, de lo que sería si eligieran unos aranceles iguales a cero. De hecho, unos aranceles iguales a cero son socialmente óptimos en el sentido de

$$\max_{t_1, t_2 \geq 0} W_1^*(t_1, t_2) + W_2^*(t_2, t_1),$$

de forma que existe un incentivo para que los gobiernos firmen un acuerdo en el que se comprometan a eliminar los aranceles (es decir, en favor

del libre comercio). (Si es factible tener aranceles negativos, es decir, subsidios, el óptimo social consiste en que los gobiernos escojan $t_1 = t_2 = -(a-c)$, lo que hace que la empresa nacional no produzca nada para el consumo interior y exporte la cantidad de competencia perfecta al otro país.) Por lo tanto, dado que las empresas i y j se comportan según el equilibrio de Nash caracterizado en (2.2.3) en la segunda etapa, la interacción entre los gobiernos en la primera etapa es un dilema de los presos: el único equilibrio de Nash lo es en estrategias dominantes, y es socialmente ineficiente.

2.2.D Torneos

Consideremos a dos trabajadores y su capataz. El producto del trabajador i ($i = 1$ o 2) es $y_i = e_i + \epsilon_i$, donde e_i es esfuerzo y ϵ_i es ruido. El proceso de producción es el siguiente: Primero, los trabajadores escogen simultáneamente sus niveles no negativos de esfuerzo: $e_i \geq 0$. En segundo lugar, los valores de ruido ϵ_1 y ϵ_2 se obtienen independientemente, de acuerdo con una función de densidad $f(\epsilon)$ con media cero. En tercer lugar, el producto de los trabajadores es observado pero no su esfuerzo. Los salarios de los trabajadores, por tanto, pueden depender de lo que han producido, pero no (directamente) de su esfuerzo.

Supongamos que el capataz decide inducir a los trabajadores a esforzarse más y para ello les hace competir en un torneo, tal y como originalmente analizaron Lazear y Rosen (1981).[10] El salario recibido por el vencedor del torneo (es decir, el trabajador que más produzca) es w_A; el salario recibido por el perdedor es w_B. La ganancia de un trabajador que reciba un salario w y realice un esfuerzo e es $u(w,e) = w - g(e)$, donde la desutilidad del esfuerzo, $g(e)$, es creciente y convexa (es decir, $g'(e) > 0$ y $g''(e) > 0$). La ganancia del capataz es $y_1 + y_2 - w_A - w_B$.

Transcribimos ahora esta aplicación a los términos de la clase de juegos discutida en la sección 2.2.A. El capataz es el jugador 1, cuya acción a_1 es escoger los salarios w_A y w_B que se pagarán en el torneo. No hay jugador 2. Los trabajadores son los jugadores 3 y 4, quienes observan los salarios escogidos en la primera etapa y deciden entonces simultáneamente sus acciones a_3 y a_4, es decir los esfuerzos e_1 y e_2. (Consideraremos más ade-

[10] Para no complicar la exposición de esta aplicación, ignoramos varios detalles técnicos, tales como las condiciones bajo las cuales la condición de primer orden del trabajador es suficiente. No obstante, el análisis exige un mayor cálculo de probabilidades que en los casos anteriores. Esta aplicación puede saltarse sin pérdida de continuidad.

lante la posibilidad de que, dados los salarios elegidos por el capataz, los trabajadores prefieran no participar en el torneo y acepten en cambio una oferta de empleo alternativo.) Finalmente, las ganancias de los jugadores son las establecidas anteriormente. Dado que lo que se produce (y por tanto también los salarios) es función no sólo de las decisiones de los jugadores sino también de los términos de ruido ϵ_1 y ϵ_2, operaremos con las ganancias esperadas de los jugadores.

Supongamos que el capataz ha elegido los salarios w_A y w_B. Si el par de esfuerzos (e_1^*, e_2^*) es un equilibrio de Nash del juego restante entre los trabajadores, para cada i, e_i^* ha de maximizar el salario esperado del trabajador i menos la desutilidad del esfuerzo: e_i^* debe ser una solución de[11]

$$\begin{aligned}\max_{e_i \geq 0} & \; w_A \operatorname{Prob}\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\} + w_B \operatorname{Prob}\{y_i(e_i) \leq y_j(e_j^*)\} - g(e_i) \\ &= (w_A - w_B) \operatorname{Prob}\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\} + w_B - g(e_i),\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

donde $y_i(e_i) = e_i + \epsilon_i$. La condición de primer orden de (2.2.4) es

$$(w_A - w_B)\frac{\partial \operatorname{Prob}\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\}}{\partial e_i} = g'(e_i). \tag{2.2.5}$$

Es decir, el trabajador i escoge e_i de forma que la desutilidad marginal de un esfuerzo extra, $g'(e_i)$, sea igual al beneficio marginal de ese esfuerzo adicional, que es el producto de lo que se gana en salario por vencer en el torneo, $w_A - w_B$, y el aumento marginal de la probabilidad de ganar.

Por la regla de Bayes,[12]

[11] Al escribir (2.2.4), supusimos que la función de densidad del ruido $f(\epsilon)$ es tal que el suceso en el que los trabajadores producen exactamente lo mismo ocurre con probabilidad cero y, por tanto, no es necesario considerarlo en la función de utilidad esperada del trabajador i. (Más formalmente, suponemos que la función de densidad $f(\epsilon)$ es no atómica.) En una descripción completa del torneo, sería natural (pero innecesario) especificar que el ganador se determina a cara o cruz, o (lo que en este modelo resulta equivalente) que ambos trabajadores reciben $(w_A + w_B)/2$.

[12] La regla de Bayes proporciona una fórmula para $P(A|B)$, la probabilidad (condicional) de que un suceso A ocurra dado que el suceso B ha ocurrido. Sean $P(A)$, $P(B)$ y $P(A,B)$ las probabilidades (a priori) (es decir, las probabilidades antes de que tanto A como B hayan tenido la oportunidad de ocurrir) de que A ocurra, B ocurra y de que ambos A y B ocurran respectivamente. La regla de Bayes establece que $P(A|B) = P(A,B)/P(B)$. Esto es, la probabilidad condicional de A dado B es igual a la probabilidad de que ambos A y B ocurran dividida por la probabilidad a priori de que B ocurra.

$$\begin{aligned}\operatorname{Prob}\{y_i(e_i) > y_j(e_j^*)\} &= \operatorname{Prob}\{\epsilon_i > e_j^* + \epsilon_j - e_i\} \\ &= \int_{\epsilon_j} \operatorname{Prob}\{\epsilon_i > e_j^* + \epsilon_j - e_i | \epsilon_j\} f(\epsilon_j) d\epsilon_j \\ &= \int_{\epsilon_j} [1 - F(e_j^* - e_i + \epsilon_j)] f(\epsilon_j) d\epsilon_j,\end{aligned}$$

de forma que la condición de primer orden de (2.2.5) se convierte en

$$(w_A - w_B)\int_{\epsilon_j} f(e_j^* - e_i + \epsilon_j) f(\epsilon_j) d\epsilon_j = g'(e_i).$$

En un equilibrio de Nash simétrico (es decir, $e_1^* = e_2^* = e^*$) tenemos que

$$(w_A - w_B)\int_{\epsilon_j} f(\epsilon_j)^2 d\epsilon_j = g'(e^*). \tag{2.2.6}$$

Como $g(e)$ es convexa, un premio mayor por ganar (es decir, un valor mayor de $w_A - w_B$) induce a un mayor esfuerzo, cosa harto intuitiva. Por otra parte, con un mismo premio, no vale tanto la pena esforzarse cuando el ruido es muy fuerte, porque es probable que el resultado del torneo se determine aleatoriamente, y no de acuerdo con el esfuerzo. Por ejemplo, si ϵ se distribuye normalmente con varianza σ^2, entonces

$$\int_{\epsilon_j} f(\epsilon_j)^2 d\epsilon_j = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}},$$

que decrece en σ, de forma que e^* efectivamente decrece en σ.

Procedemos ahora hacia atrás, hasta la primera etapa del juego. Supongamos que si los trabajadores acuerdan participar en el torneo (en vez de aceptar un empleo alternativo) responderán a los salarios w_A y w_B jugando el equilibrio de Nash simétrico caracterizado por (2.2.6). (Ignoramos, por tanto, la posibilidad de equilibrios asimétricos y de un equilibrio en el que la elección de los esfuerzos por parte de los trabajadores venga dada por la solución de esquina $e_1 = e_2 = 0$, en vez de por la condición de primer orden (2.2.5).) Supongamos también que la oportunidad de empleo alternativo proporcionaría una utilidad U_a. Como en el equilibrio de Nash simétrico cada jugador gana el torneo con probabilidad un medio (es decir, $\operatorname{Prob}\{y_i(e^*) > y_j(e^*)\} = 1/2$), si el capataz quiere inducir a los trabajadores a participar en el torneo deberá escoger salarios que satisfagan

$$\frac{1}{2}w_A + \frac{1}{2}w_B - g(e^*) \geq U_a. \tag{2.2.7}$$

Suponiendo que U_a sea lo suficientemente pequeña como para que el capataz quiera inducir a los trabajadores a participar en el torneo, éste escogerá los salarios que maximicen el beneficio esperado, $2e^* - w_A - w_B$, sujeto a (2.2.7). En el óptimo, (2.2.7) se satisface con igualdad:

$$w_B = 2U_a + 2g(e^*) - w_A. \tag{2.2.8}$$

El beneficio esperado es entonces $2e^* - 2U_a - 2g(e^*)$, de forma que el capataz quiere escoger unos salarios tales que el esfuerzo inducido, e^*, maximice $e^* - g(e^*)$. El esfuerzo inducido óptimo, por tanto, satisface la condición de primer orden $g'(e^*) = 1$. Sustituyendo esto en (2.2.6) se obtiene que el premio óptimo, $w_A - w_B$, es una solución de

$$(w_A - w_B)\int_{\epsilon_j} f(\epsilon_j)^2 d\epsilon_j = 1,$$

y (2.2.8) determina entonces w_A y w_B.

2.3 Juegos repetidos

En esta sección analizamos si las amenazas y promesas sobre el comportamiento futuro pueden influir en el comportamiento presente en situaciones que se repiten en el tiempo. Buena parte de lo que hay que entender en estas situaciones se ha visto ya en el caso de dos periodos; pocas ideas nuevas se requieren para entender los juegos con un horizonte infinito. Hemos definido también el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Esta definición tiene una expresión más sencilla para el caso especial de los juegos repetidos que en el general de los juegos dinámicos con información completa que consideramos en la sección 2.4.B. La introducimos aquí para facilitar la exposición posterior.

2.3.A Teoría: Juegos repetidos en dos etapas

Consideremos el dilema de los presos dado en forma normal de la figura 2.3.1. Supongamos que hay dos participantes en este juego que deciden simultáneamente en dos ocasiones, habiendo observado el resultado de la primera decisión antes de decidir por segunda vez, y supongamos que las ganancias del juego completo son simplemente la suma de las ganancias de cada etapa (es decir, no hay descuento).

Jugador 1 \ Jugador 2	I_2	D_2
I_1	1,1	5,0
D_1	0,5	4,4

Figura 2.3.1

Jugador 1 \ Jugador 2	I_2	D_2
I_1	2,2	6,1
D_1	1,6	5,5

Figura 2.3.2

Llamaremos a este juego repetido el dilema de los presos en dos etapas. Este juego pertenece a la clase de los juegos analizada en la sección 2.2.A. Aquí los jugadores 3 y 4 son idénticos a los jugadores 1 y 2, los espacios de acciones A_3 y A_4 son idénticos a A_1 y A_2 y las ganancias $u_i(a_1,a_2,a_3,a_4)$ son simplemente la suma de las ganancias en la primera etapa (a_1,a_2) y en la segunda etapa (a_3,a_4). Además, el dilema de los presos en dos etapas satisface el supuesto que hicimos en la sección 2.2.A: para cada resultado factible de la primera etapa del juego, (a_1,a_2), el juego restante en la segunda etapa entre los jugadores 3 y 4 tiene un único equilibrio de Nash, que denotamos por $(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$. De hecho, el dilema de los presos en dos etapas satisface este supuesto de forma clara, como seguidamente indicamos. En la sección 2.2.A permitimos la posibilidad de que el equilibrio de Nash del juego restante en la segunda etapa dependa del resultado de la primera etapa —de aquí la notación $(a_3^*(a_1,a_2),a_4^*(a_1,a_2))$ en vez de simplemente (a_3^*,a_4^*). (En el juego de los aranceles, por ejemplo, las cantidades de equilibrio escogidas por las empresas en la segunda etapa dependían de los aranceles escogidos por los gobiernos en la primera etapa.) Sin embargo, en el dilema de los presos en dos etapas, el único equilibrio del juego de la segunda etapa es (I_1,I_2), independientemente del resultado de la primera etapa.

Siguiendo el procedimiento descrito en la sección 2.2.A para calcular el resultado perfecto en subjuegos de tal juego, analizamos la primera etapa del dilema de los presos en dos etapas teniendo en cuenta que el resultado del juego restante en la segunda etapa será el equilibrio de Nash de ese juego, es decir, (I_1,I_2) con ganancias de (1,1). Por tanto, la interacción en la primera etapa entre los jugadores en el dilema de los presos en dos etapas se concreta en el juego de una jugada de la figura 2.3.2, en el que las ganancias (1,1) de la segunda etapa se han sumado a cada par de ganancias de la primera etapa. El juego de la figura 2.3.2 tiene también un único equilibrio de Nash: (I_1,I_2). Por tanto, el único resultado perfecto en subjuegos del dilema de los presos en dos etapas es (I_1,I_2) en la primera etapa, seguido de (I_1,I_2) en la segunda etapa. No se puede conseguir cooperación, es decir, (D_1,D_2) en ninguna etapa del resultado perfecto en subjuegos.

Este argumento continúa siendo válido en situaciones más generales. (Aquí nos apartamos momentáneamente del caso de dos periodos para permitir cualquier número finito de repeticiones, T.) Denotemos con $G = \{A_1,\ldots, A_n; u_1,\ldots,u_n\}$ un juego estático con información completa en el que los jugadores 1 a n escogen simultáneamente las acciones a_1 a a_n de los espacios de acciones A_1 a A_n respectivamente, siendo las ganancias $u_1(a_1,\ldots,a_n)$ a $u_n(a_1,\ldots,a_n)$. Llamaremos al juego G, *juego de etapa* del juego repetido.

Definición. *Dado un juego de etapa G, $G(T)$ denota el* ***juego repetido finitamente*** *en el que G se juega T veces, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las jugadas anteriores antes de que empiece la siguiente. Las ganancias de $G(T)$ son simplemente la suma de las ganancias de los T juegos de etapa.*

Proposición. *Si el juego de etapa G tiene un único equilibrio de Nash, entonces, para cualquier T finito, el juego repetido $G(T)$ tiene un único resultado perfecto en subjuegos: en cada etapa se juega el equilibrio de Nash de G.*[13]

[13] Se obtienen resultados análogos si el juego de etapa G es un juego dinámico con información completa. Supongamos que G es un juego dinámico con información completa y perfecta de la clase definida en la sección 2.1.A. Si G tiene un único resultado por inducción hacia atrás, $G(T)$ tiene un único resultado perfecto en subjuegos: en cada etapa se juega el resultado por inducción hacia atrás de G. Similarmente, supongamos que G es un juego en dos etapas de la clase definida en la sección 2.2.A. Si G tiene un único resultado perfecto en subjuegos, entonces $G(T)$ tiene un único resultado perfecto en subjuegos: en cada etapa se juega el resultado perfecto en subjuegos de G.

Volvemos ahora al caso de dos periodos, pero consideramos la posibilidad de que el juego de etapa G tenga múltiples equilibrios de Nash, como en la figura 2.3.3. Las estrategias denominadas I_i y C_i imitan al dilema de los presos de la figura 2.3.1, pero las estrategias denominadas D_i han sido añadidas al juego de forma que ahora existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (I_1,I_2) como en el dilema de los presos, y ahora además (D_1,D_2). Naturalmente, es artificial añadir un equilibrio al dilema de los presos de esta manera, pero nuestro interés en este juego es más expositivo que sustantivo. En la próxima sección veremos que los juegos repetidos infinitamente comparten este espíritu de equilibrios múltiples, incluso si los juegos de etapa que se repiten infinitamente tienen un único equilibrio de Nash, como en el dilema de los presos. Por tanto, en esta sección analizamos un juego de etapa artificial en el contexto simple de dos periodos, y nos preparamos con ello para el análisis posterior de un juego de etapa con interés económico, en un contexto con horizonte infinito.

	I_2	C_2	D_2
I_1	1,1	5,0	0,0
C_1	0,5	4,4	0,0
D_1	0,0	0,0	3,3

Figura 2.3.3

Supongamos que el juego de etapa de la figura 2.3.3 se juega dos veces, habiendo los jugadores observado el resultado de la primera etapa antes de que empiece la segunda. Demostraremos que existe un único resultado perfecto en subjuegos de este juego, en el que el par de estrategias (C_1,C_2) se juega en la primera etapa.[14] Como en la sección 2.2.A, supongamos que

[14]Estrictamente hablando, hemos definido la noción de resultado perfecto en subjuegos sólo para la clase de juegos definida en la sección 2.2.A. El dilema de los presos en dos etapas pertenece a esta clase, porque para cada resultado factible del juego de la primera etapa existe un único equilibrio de Nash en el juego que queda en la segunda etapa. Sin embargo, el juego en dos etapas repetido, basado en el juego de etapa de la figura 2.3.3 no pertenece a esta clase, porque el juego de etapa tiene múltiples equilibrios de Nash. No vamos a extender formalmente la definición del resultado perfecto en subjuegos de forma que sea aplicable a

en la primera etapa los jugadores prevén que el resultado de la segunda etapa será un equilibrio de Nash del juego de etapa. Puesto que este juego de etapa tiene más de un equilibrio de Nash, ahora es posible que los jugadores prevean que a resultados diferentes en la primera etapa les siguen equilibrios diferentes del juego de etapa en la segunda etapa. Supongamos, por ejemplo, que los jugadores prevén que (D_1,D_2) será el resultado de la segunda etapa si el de la primera etapa es (C_1,C_2), pero que (I_1,I_2) será el resultado de la segunda etapa si el resultado de la primera etapa es cualquiera de los ocho restantes. La interacción entre los jugadores en la primera etapa se concreta entonces en el juego de una etapa de la figura 2.3.4, donde (3,3) se ha sumado a la casilla (C_1,C_2) y (1,1) se ha sumado a las otras ocho casillas.

	I_2	C_2	D_2
I_1	2,2	6,1	1,1
C_1	1,6	7,7	1,1
D_1	1,1	1,1	4,4

Figura 2.3.4

Existen tres equilibrios de Nash con estrategias puras en el juego de la figura 2.3.4: (I_1,I_2), (C_1,C_2) y (D_1,D_2). Como en la figura 2.3.2, los equilibrios de Nash de este juego de una etapa corresponden a los resultados perfectos en subjuegos del juego repetido original. Denotemos con $((w,x),(y,z))$ un resultado del juego repetido: (w,x) en la primera etapa y (y,z) en la segunda. El equilibrio de Nash (I_1,I_2) de la figura 2.3.4 corresponde al resultado perfecto en subjuegos $((I_1,I_2),(I_1,I_2))$ del juego repetido, puesto que el resultado previsto en la segunda etapa es (I_1,I_2) como consecuencia de cualquier resultado en la primera etapa excepto de (C_1,C_2). De la misma forma, el equilibrio de Nash (D_1,D_2) de la figura 2.3.4 corresponde al resultado perfecto en subjuegos $((D_1,D_2),(I_1,I_2))$ del juego repetido. Estos dos resultados perfectos en subjuegos del juego repetido simplemente enlazan los resultados de los equilibrios de Nash de los juegos de etapa, pero el tercer equilibrio de Nash de la figura 2.3.4 genera un resultado cualitativamente diferente: (C_1,C_2) de la figura

todo juego en dos etapas repetido, en primer lugar porque el cambio en las definiciones es minúsculo y, en segundo lugar, porque en las secciones 2.3.B y 2.4.B aparecen definiciones incluso más generales.

2.3.4 corresponde al resultado perfecto en subjuegos $((C_1,C_2),(D_1,D_2))$ del juego repetido, puesto que el resultado previsto en la segunda etapa es (D_1,D_2) como consecuencia de (C_1,C_2). Por lo tanto, como hemos afirmado anteriormente, se puede alcanzar la cooperación en la primera etapa de un resultado perfecto en subjuegos del juego repetido. Esto es un ejemplo de un resultado más general: si $G = \{A_1,\ldots,A_n;u_1,\ldots,u_n\}$ es un juego estático con información completa que tiene múltiples equilibrios, pueden existir resultados perfectos en subjuegos del juego repetido $G(T)$ en los que, para cualquier $t < T$, el resultado de la etapa t no es un equilibrio de Nash de G. Volveremos sobre esta idea en el análisis de un juego con horizonte infinito en la próxima sección.

La conclusión principal que debemos sacar de este ejemplo es que las amenazas o las promesas creíbles sobre el comportamiento futuro pueden influir en el comportamiento presente. Sin embargo, desde otra perspectiva, puede que quizás el concepto de perfección en subjuegos no utilice una definición de credibilidad lo suficientemente fuerte. Al derivar el resultado perfecto en subjuegos $((C_1,C_2),(D_1,D_2))$, por ejemplo, hemos supuesto que los jugadores prevén que (D_1,D_2) será el resultado de la segunda ronda si el resultado en la primera etapa es (C_1,C_2), y que (I_1,I_2) será el resultado en la segunda etapa si el de la primera ronda es cualquiera de los ocho restantes. Pero jugar (I_1,I_2) en la segunda etapa, con unas ganancias de (1, 1), puede parecer poco atractivo cuando (D_1,D_2), con una ganancia de (3, 3), está también disponible como equilibrio de Nash del juego de etapa que queda. Dicho en términos poco precisos, parecería natural que los jugadores renegociaran.[15] Si (C_1,C_2) no es el resultado de la primera etapa del juego, es decir si se supone que se jugará (I_1,I_2) en la segunda etapa, cada jugador puede pensar que lo pasado, pasado está, y que se debe jugar el equilibrio del juego de etapa (D_1,D_2) unánimemente preferido. Pero si (D_1,D_2) va a ser el resultado de la segunda etapa independientemente de cuál sea el resultado en la primera ronda, el incentivo para jugar (C_1,C_2) en la primera etapa desaparece: la interacción entre los dos jugadores en la primera etapa se reduce al juego de una etapa en el que la ganancia (3, 3) se ha sumado a cada casilla del juego de etapa de la figura 2.3.3, de forma que I_i es la mejor respuesta a C_j del jugador i.

[15] Decimos que es impreciso porque "renegociar" sugiere que hay comunicación (o incluso negociación) entre la primera y la segunda etapa. Si esto fuera posible, debería añadirse a la descripción y análisis del juego. Aquí suponemos que no es así, de forma que lo que entendemos por "renegociar" no es otra cosa que un ejercicio de introspección.

	I_2	C_2	D_2	P_2	Q_2
I_1	1,1	5,0	0,0	0,0	0,0
C_1	0,5	4,4	0,0	0,0	0,0
D_1	0,0	0,0	3,3	0,0	0,0
P_1	0,0	0,0	0,0	$4,\frac{1}{2}$	0,0
Q_1	0,0	0,0	0,0	0,0	$\frac{1}{2},4$

Figura 2.3.5

Para acercarnos a la solución de este problema de renegociación, consideremos el juego de la figura 2.3.5, que es aún más artificial que el juego de la figura 2.3.3. Una vez más, nuestro interés en este juego es más expositivo que económico. Las ideas que estamos desarrollando para tratar el tema de la renegociación en este juego artificial se pueden aplicar también a la renegociación en juegos infinitamente repetidos; véase Farrell y Maskin (1989), por ejemplo.

En este juego de etapa se añaden las estrategias P_i y Q_i al juego de etapa de la figura 2.3.3. Existen cuatro equilibrios de Nash con estrategias puras del juego de etapa: (I_1,I_2), (D_1,D_2) y ahora también (P_1,P_2) y (Q_1,Q_2). Como antes, los jugadores prefieren unánimemente (D_1,D_2) a (I_1,I_2). Más importante aún, no hay ningún equilibrio de Nash (x,y) en la figura 2.3.5 tal que los jugadores prefieran unánimemente (x,y) a (P_1,P_2), (Q_1,Q_2) o (D_1,D_2). Decimos entonces que (D_1,D_2) *domina en el sentido de Pareto* a (I_1,I_2), y que (P_1,P_2), (Q_1,Q_2) y (D_1,D_2) están en la *frontera de Pareto* de las ganancias de los equilibrios de Nash del juego de etapa de la figura 2.3.5.

Supongamos que el juego de etapa de la figura 2.3.5 se juega dos veces, habiendo los jugadores observado el resultado de la primera ronda antes de que empiece la segunda. Supongamos adicionalmente que los jugadores prevén que el resultado de la segunda etapa será el siguiente: (D_1,D_2) si el resultado de la primera etapa es (C_1,C_2); (P_1,P_2) si el resultado de la primera etapa es (C_1,w), donde w puede ser cualquier cosa menos C_2; (Q_1,Q_2) si el resultado de la primera etapa es (x,C_2), donde x puede ser cualquier cosa menos C_1 y (D_1,D_2) si el resultado de la primera etapa es (y,z), donde y puede ser cualquier cosa menos C_1 y z puede ser cualquier cosa menos C_2. Entonces $((C_1,C_2),(D_1,D_2))$ es un resultado perfecto en subjuegos del juego repetido porque cada jugador obtiene 4+3 al jugar C_i

seguido de D_i pero sólo 5 + 1/2 al jugar I_i en la primera etapa (e incluso menos con otras decisiones). Más importante aún, el problema del ejemplo anterior no aparece aquí. En el juego repetido en dos etapas basado en la figura 2.3.3, la única forma de castigar a un jugador por desviarse en la primera etapa era jugar un equilibrio dominado en el sentido de Pareto en la segunda etapa, castigando también con ello al jugador que castiga. Aquí, en cambio, existen tres equilibrios en la frontera de Pareto —uno para recompensar el buen comportamiento de ambos jugadores en la primera etapa y los otros dos para ser utilizados no sólo para castigar al jugador que se desvía en la primera etapa, sino también para recompensar al jugador que castiga. Por tanto, si se requiere una penalización en la segunda ronda, no existe otro equilibrio del juego de etapa preferido por el jugador que castiga, de forma que no se puede persuadir al jugador que castiga de que renegocie la penalización.

2.3.B Teoría: Juegos repetidos infinitamente

Pasamos ahora a los juegos repetidos infinitamente. Como en el caso de un horizonte finito, el tema principal es el de que las amenazas o las promesas creíbles sobre el comportamiento futuro pueden influir en el comportamiento presente. En el caso de un horizonte finito vimos que si existen equilibrios de Nash múltiples del juego de etapa G, pueden existir resultados perfectos en subjuegos del juego repetido $G(T)$ en los que, para cualquier $t < T$, el resultado de la etapa t no es un equilibrio de Nash de G. Un resultado más poderoso se da en los juegos repetidos infinitamente: incluso si el juego de etapa tiene un único equilibrio de Nash, pueden existir muchos resultados perfectos en subjuegos en los que ninguno de los resultados en cada etapa sea un equilibrio de Nash de G.

Empezamos con el estudio del dilema de los presos repetido infinitamente. Consideramos a continuación la clase de juegos repetidos infinitamente análoga a la clase de juegos repetidos finitamente definida en la sección anterior: un juego estático con información completa, G, se repite infinitamente, habiendo los jugadores observado los resultados de todas las rondas anteriores antes de que empiece la etapa siguiente. Para esta clase de juegos repetidos finita e infinitamente, definimos los conceptos de estrategia de un jugador, de subjuego y de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. (En la sección 2.4.B definimos estos conceptos para juegos dinámicos con información completa en general, no sólo para esta clase de juegos repetidos.) Utilizamos después estas definiciones para enunciar y demostrar el teorema de Friedman (1971) (también llamado teorema de tradición oral o teorema folk).[16]

		Jugador 2	
		I_2	D_2
Jugador 1	I_1	1,1	5,0
	D_1	0,5	4,4

Figura 2.3.6

Supongamos que el dilema de los presos de la figura 2.3.6 se repite infinitamente y que, para cada t, los resultados de las $t-1$ jugadas anteriores del juego de etapa se han observado antes de que la t-ésima etapa empiece. Sumar simplemente las ganancias de esta sucesión infinita de juegos de etapa no proporciona una medida útil de la ganancia de un jugador en el juego repetido infinitamente. Recibir una ganancia de 4 en cada periodo es mejor que recibir una ganancia de 1 en cada periodo, por ejemplo, pero la suma de ganancias es infinita en ambos casos. Recordemos (en el modelo de negociación de Rubinstein de la sección 2.1.D) que el factor de descuento $\delta = 1/(1+r)$ es el valor actual de una peseta que se vaya a recibir en el periodo siguiente, donde r es el tipo de interés por periodo. Dados un factor de descuento y las ganancias de un jugador obtenidos de una sucesión infinita de juegos de etapa, podemos calcular

[16] El teorema de tradición oral original se refería a las ganancias en todos los equilibrios de Nash de un juego repetido infinitamente. A este resultado se le llamó teorema de tradición oral por ser ampliamente conocido entre los teóricos de juegos de los años cincuenta, aun sin que nadie lo hubiera publicado. El teorema de Friedman (1971) se refiere a las ganancias en ciertos equilibrios de Nash perfectos en subjuegos de un juego repetido infinitamente y, por tanto, refuerza el teorema de tradición oral original al utilizar un criterio de solución más fuerte, el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en vez del equilibrio de Nash. Sin embargo, el antiguo nombre ha prevalecido: al teorema de Friedman (y a otros resultados posteriores) se les llama a veces teoremas de tradición oral, aun cuando no hayan sido ampliamente conocidos entre los teóricos de juegos antes de ser publicados.

el *valor presente* de las ganancias, es decir, la ganancia total que podría ingresarse en un banco ahora de forma que produjera el mismo saldo al final de la sucesión.

Definición. *Dado un factor de descuento δ, el* ***valor presente*** *de la sucesión infinita de pagos $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ es*

$$\pi_i + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \ldots = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t.$$

También podemos utilizar δ para reinterpretar lo que llamamos un juego repetido infinitamente como un juego repetido que se acaba después de un número aleatorio de repeticiones. Supongamos que al finalizar cada etapa se lanza una moneda (trucada) para determinar si el juego se acaba o no. Si la probabilidad de que el juego se acabe inmediatamente es p y, por tanto, $1-p$ es la probabilidad de que el juego continúe al menos una etapa más, una ganancia de π a recibir en la siguiente etapa (si se juega) tiene un valor de sólo $(1-p)\pi/(1+r)$ antes de efectuar el lanzamiento de la moneda correspondiente a esta etapa. Del mismo modo, una ganancia de π a recibir dentro en dos etapas (si ambas etapas se juegan) tiene un valor de sólo $(1-p)^2\pi/(1+r)^2$ antes de efectuar el lanzamiento de la moneda correspondiente a esta etapa. Sea $\delta = (1-p)/(1+r)$. Entonces el valor presente $\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \ldots$ refleja tanto el valor temporal del dinero como la posibilidad de que el juego se acabe.

Consideremos el dilema de los presos repetido infinitamente en el que el factor de descuento de cada jugador es δ, y la ganancia de cada jugador en el juego repetido es el valor presente de las ganancias del jugador en los juegos de etapa. Demostraremos que la cooperación, es decir, (D_1, D_2), puede ocurrir en cada etapa de un resultado perfecto en subjuegos del juego repetido infinitamente, aun cuando el único equilibrio de Nash del juego de etapa es la no cooperación, es decir, $(I_1, I_2.)$ El argumento es del mismo estilo que nuestro análisis del juego repetido en dos etapas basado en la figura 2.3.3 (el juego de etapa en el que añadimos un segundo equilibrio de Nash al dilema de los presos): si los jugadores cooperan hoy entonces juegan un equilibrio con ganancias altas mañana; en caso contrario juegan un equilibrio con ganancias bajas mañana. La diferencia entre el juego repetido en dos etapas y el juego repetido infinitamente es que aquí el equilibrio con ganancias altas que podría jugarse mañana no se ha añadido artificialmente, sino que representa continuar cooperando a partir de mañana y en lo sucesivo.

Supongamos que el jugador i empieza el juego repetido infinitamente cooperando y sigue cooperando en cada juego de etapa siguiente si y sólo si ambos jugadores han cooperado en cada ronda previa. Formalmente, la estrategia del jugador i es:

> Jugar D_i en la primera etapa. En la t-ésima etapa, si el resultado de todas las $t-1$ etapas anteriores ha sido (D_1,D_2) entonces jugar D_i; en caso contrario, jugar I_i.

Esta estrategia es un ejemplo de la *estrategia del disparador (trigger strategy)*, llamada así porque el jugador i coopera hasta que alguien deja de cooperar, lo que desencadena la decisión de no volver a cooperar nunca más. Si ambos jugadores adoptan la estrategia del disparador, el resultado del juego repetido infinitamente será (D_1,D_2) en cada etapa. Veremos primero que si δ está lo suficientemente cerca de uno, el hecho de que los dos jugadores adopten esta estrategia constituye un equilibrio de Nash del juego repetido infinitamente. Veremos a continuación que este equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos, en un sentido que se precisará más adelante.

Para demostrar que la adopción de la estrategia del disparador por parte de los dos jugadores es un equilibrio de Nash del juego repetido infinitamente, supondremos que el jugador i ha adoptado la estrategia del disparador y demostraremos a continuación, siempre que δ esté lo suficientemente cerca de uno, que adoptar esta estrategia es también la mejor respuesta del jugador j. Dado que el jugador i jugará I_i para siempre cuando el resultado de alguna ronda difiera de (D_1,D_2), la mejor respuesta del jugador j es efectivamente jugar I_j para siempre cuando el resultado de alguna etapa difiera de (D_1,D_2). Queda por determinar la mejor respuesta del jugador i en la primera etapa y en cualquier etapa tal que los resultados anteriores hayan sido (D_1,D_2). Jugar I_j proporcionaría una ganancia de 5 en esta etapa, pero desencadenaría la no cooperación del jugador i (y, por tanto, también del jugador j) en lo sucesivo, de forma que la ganancia en cada etapa futura sería 1. Como $1+\delta+\delta^2+\ldots = 1/(1-\delta)$, el valor presente de esta sucesión de ganancias es

$$5+\delta\cdot 1+\delta^2\cdot 1+\ldots = 5+\frac{\delta}{1-\delta}.$$

Alternativamente, jugar D_j proporcionaría una ganancia de 4 en esta etapa y conduciría a exactamente la misma elección entre I_j y D_j en la siguiente etapa. Llamemos V al valor presente de la sucesión infinita de ganancias

que el jugador j recibe por realizar esta elección de forma óptima (ahora y cada vez que aparezca). Si jugar D_j es óptimo entonces

$$V = 4+\delta V,$$

o $V = 4/(1-\delta)$, ya que jugar D_j conduce a la misma decisión en la siguiente etapa. Si jugar I_j es óptimo entonces

$$V = 5+\frac{\delta}{1-\delta},$$

como obtuvimos antes. Por tanto, jugar D_j es óptimo si y sólo si

$$\frac{4}{1-\delta} \geq 5+\frac{\delta}{1-\delta}, \qquad (2.3.1)$$

o $\delta \geq 1/4$. Por tanto, en la primera etapa, y en cualquier ronda tal que todos los resultados anteriores hayan sido (D_1,D_2), la decisión óptima del jugador j (dado que el jugador i ha adoptado la estrategia del disparador) es D_j si y sólo si $\delta \geq 1/4$. Combinando esta observación con el hecho de que la mejor respuesta de j es jugar siempre I_j cuando el resultado de alguna etapa difiera de (D_1,D_2), tenemos que el que los dos jugadores jueguen la estrategia del disparador es un equilibrio de Nash si y sólo si $\delta \geq 1/4$.

Vamos a ver ahora que este equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos. Para hacerlo, definimos el concepto de estrategia en un juego repetido, de subjuego en un juego repetido y de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en un juego repetido. Para ilustrar estos conceptos con ejemplos sencillos de las secciones anteriores, los definiremos para juegos repetidos tanto finita como infinitamente. En la sección anterior definimos el juego repetido finitamente $G(T)$ basado en un juego de etapa $G = \{A_1,\ldots,A_n; u_1,\ldots,u_n\}$, un juego estático con información completa en el que los jugadores 1 a n eligen simultáneamente las acciones a_1 a a_n de los espacios de acciones A_1 a A_n respectivamente, y las ganancias son $u_1(a_1,\ldots,a_n)$ a $u_n(a_1,\ldots,a_n)$. Definimos ahora el juego análogo repetido infinitamente.[17]

Definición. *Dado un juego de etapa G, denominamos $G(\infty,\delta)$ al* ***juego repetido infinitamente*** *en el que G se repite por siempre y los jugadores tienen el mismo*

[17] Naturalmente se puede definir también un juego repetido basado en un juego de etapa dinámico. En esta sección limitamos nuestra atención a juegos de etapa estáticos para poder presentar las ideas principales de forma sencilla. Las aplicaciones en las secciones 2.3.D y 2.3.E son juegos repetidos basados en juegos de etapa dinámicos.

factor de descuento δ. Para cada t, los resultados de las $t-1$ jugadas anteriores del juego de etapa son conocidos antes de que empiece la t-ésima etapa. La ganancia de cada jugador en $G(\infty,\delta)$ es el valor presente de las ganancias que el jugador obtiene en la sucesión infinita de juegos de etapa.

En cualquier juego (repetido o no), la estrategia de un jugador es un plan completo de acción, es decir, especifica una acción factible del jugador en cada contingencia en la que le pudiera corresponder actuar. Dicho de forma algo más frívola, si un jugador dejara una estrategia a su abogado antes de que el juego empezase, el abogado podría sustituir al jugador en el juego, sin necesitar en ningún caso de instrucciones adicionales sobre cómo jugar. En un juego estático con información completa, por ejemplo, una estrategia es simplemente una acción. (Por esto describimos tal juego como $G = \{S_1,\ldots,S_n;u_1,\ldots,u_n\}$ en el capítulo 1, pero aquí puede describirse también como $G = \{A_1,\ldots,A_n;u_1,\ldots,u_n\}$: en un juego estático con información completa el espacio de estrategias del jugador i, S_i, es simplemente el espacio de acciones A_i.) Sin embargo, en un juego dinámico, una estrategia es más complicada.

Consideremos el dilema de los presos en dos etapas analizado en la sección anterior. Cada jugador actúa dos veces, de forma que podría pensarse que una estrategia es simplemente un par de instrucciones (b,c), donde b es la decisión en la primera etapa y c es la decisión en la segunda etapa. Pero existen cuatro resultados posibles de la primera etapa, (I_1,I_2), (I_1,D_2),(D_1,I_2) y (D_1,D_2), que representan cuatro contingencias diferentes en las que al jugador le podría corresponder actuar. Por tanto, la estrategia de cada jugador consta de cinco instrucciones, que indicamos mediante (v,w,x,y,z), donde v es la decisión en la primera etapa y w,x,y y z son las decisiones en la segunda etapa correspondientes a (I_1,I_2), (I_1,D_2), (D_1,I_2) y (D_1,D_2) respectivamente. Usando esta notación, las instrucciones "jugar b en la primera etapa y jugar c en la segunda pase lo que pase en la primera" se describen como (b,c,c,c,c), pero esta notación también puede expresar estrategias en las que la decisión de la segunda etapa es contingente del resultado de la primera etapa, tal como (b,c,c,c,b), que significa "jugar b en la primera etapa y jugar c en la segunda ronda a menos que el resultado de la primera sea (D_1,D_2), en cuyo caso jugar b". Del mismo modo, en el juego repetido en dos etapas basado en la figura 2.3.3, la estrategia de cada jugador consta de diez instrucciones, una decisión en la primera etapa y nueve decisiones contingentes en la segunda etapa, una para cada resultado posible de la primera etapa. Recordemos que al analizar el juego repetido en dos etapas consideramos una estrategia en la que la decisión del jugador i en la segunda etapa era contingente del resultado de la primera etapa: jugar C_i en la primera etapa y jugar I_i en la segunda a menos que el resultado de la primera sea (C_1,C_2), en cuyo caso jugar D_i en la segunda etapa.

En el juego repetido finitamente $G(T)$ o en el repetido infinitamente $G(\infty,\delta)$, la *historia del juego hasta la etapa t* es el registro de las decisiones de los jugadores desde la etapa 1 hasta la t. Los jugadores podrían haber escogido $(a_{11},\ldots,a_{n1})$ en la etapa 1, $(a_{12},\ldots,a_{n2})$ en la etapa 2,..., y $(a_{1t},\ldots,a_{nt})$ en la etapa t, por ejemplo, donde para cada jugador i y etapa s la acción a_{is} pertenece al espacio de acciones A_i.

Definición. *En el juego repetido finitamente $G(T)$ o en el juego repetido infinitamente $G(\infty,\delta)$, la **estrategia** de un jugador determina la acción que el jugador realizará en cada etapa para cada posible historia del juego hasta la etapa anterior.*

Pasemos ahora a los subjuegos. Un subjuego es una parte de un juego, la parte que queda por jugar empezando en cualquier momento en el que la historia completa del juego hasta entonces sea información del dominio público entre los jugadores. (Más adelante en esta sección damos una definición precisa en el caso de los juegos repetidos $G(T)$ y $G(\infty,\delta)$; en la sección 2.4.B damos una definición precisa para juegos dinámicos con información completa en general.) En el dilema de los presos en dos etapas, por ejemplo, hay cuatro subjuegos que corresponden a los juegos de la segunda etapa que siguen a los cuatro resultados posibles de la primera etapa. Del mismo modo, en el juego repetido en dos etapas basado en la figura 2.3.3, hay nueve subjuegos que corresponden a los nueve resultados posibles en el juego de la primera etapa. En el juego repetido finitamente $G(T)$ y en el juego repetido infinitamente $G(\infty,\delta)$ la definición de estrategia está íntimamente ligada a la definición de subjuego: la estrategia de un jugador determina las acciones que el jugador realizará en la primera etapa del juego repetido y en la primera etapa de cada uno de sus subjuegos.

Definición. *En el juego repetido finitamente $G(T)$, un **subjuego** que empieza en la etapa $t+1$ es el juego repetido en el que G se juega $T-t$ veces y que designamos por $G(T-t)$. Existen muchos subjuegos que empiezan en la etapa $t+1$, uno para cada una de las posibles historias del juego hasta la etapa t. En el juego repetido infinitamente $G(\infty,\delta)$, cada **subjuego** que empieza en la etapa $t+1$ es idéntico* *al juego original $G(\infty,\delta)$. Como en el caso con horizonte finito, existen tantos subjuegos que empiezan en la etapa $t+1$ de $G(\infty,\delta)$ como posibles historias del juego hasta la etapa t.*

Obsérvese que la t-ésima etapa de un juego repetido *no* es por sí misma un subjuego del juego repetido (suponiendo que $t < T$ en el caso finito). Un subjuego es una parte del juego original que no sólo empieza en un momento en que la historia del juego hasta entonces es información del domino público entre todos los jugadores, sino que también incluye todas las decisiones posteriores a ese momento en el juego original. Analizar la t-ésima etapa aisladamente sería equivalente a considerar la t-ésima etapa como la etapa final del juego repetido. Tal análisis podría llevarse a cabo pero no sería relevante para el juego repetido original.

Estamos ahora preparados para la definición de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, la cual depende a su vez de la definición de equilibrio de Nash. Esta última no ha cambiado desde el capítulo 1, pero ahora apreciamos la complejidad potencial de la estrategia de un jugador en un juego dinámico: en cualquier juego, un equilibrio de Nash es una colección de estrategias, una para cada jugador, tal que la estrategia de cada jugador es la mejor respuesta a las estrategias de los demás jugadores.

Definición. (Selten 1965): *Un equilibrio de Nash es* ***perfecto en subjuegos*** *si las estrategias de los jugadores constituyen un equilibrio de Nash en cada subjuego.*

El equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es un *refinamiento* del equilibrio de Nash. Es decir, para ser perfecto en subjuegos, las estrategias de los jugadores deben ser primero un equilibrio de Nash y pasar luego una prueba adicional.

Para demostrar que el equilibrio de Nash en las estrategias del disparador del dilema de los presos repetido infinitamente es perfecto en subjuegos, debemos demostrar que las estrategias del disparador constituyen un equilibrio de Nash en cada subjuego de este juego repetido infinitamente. Recordemos que cada subjuego de un juego repetido infinitamente es idéntico al juego completo. En el equilibrio de Nash en las estrategias del disparador del dilema de los presos repetido infinitamente, estos subjuegos pueden agruparse en dos clases: (i) subjuegos en los que todos los resultados de las etapas anteriores han sido (D_1,D_2), y (ii) subjuegos en los que el resultado de al menos una etapa anterior difiere de

(D_1,D_2). Si el jugador adopta la estrategia del disparador para el juego completo, entonces (i) las estrategias del jugador en un subjuego de la primera clase son de nuevo la estrategia del disparador, que ya hemos demostrado que es un equilibrio de Nash del juego completo, y (ii) las estrategias del jugador en un juego de la segunda clase son simplemente repetir en lo sucesivo el equilibrio del juego de etapa (I_1,I_2), que es también un equilibrio de Nash del juego completo. Por tanto, un equilibrio de Nash en las estrategias del disparador del dilema de los presos repetido infinitamente es perfecto en subjuegos.

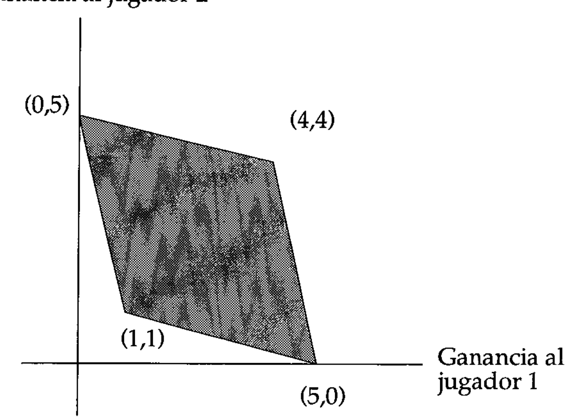


Figura 2.3.7

Aplicamos seguidamente argumentos análogos al juego repetido infinitamente $G(\infty,\delta)$. Estos argumentos conducen al teorema de Friedman (1971) para juegos repetidos infinitamente. Para enunciar el teorema, necesitamos dos últimas definiciones. Primero, llamamos *factibles* a las ganancias $(x_1,\ldots,x_n)$ en el juego de etapa G si son una combinación convexa (es decir, una media ponderada donde las ponderaciones son no-negativas y suman uno) de las ganancias a las estrategias puras de G. El conjunto de ganancias factibles en el dilema de los presos de la figura 2.3.6 es la región sombreada de la figura 2.3.7. Las ganancias a las estrategias puras (1, 1), (0, 5), (4, 4) y (5, 0) son factibles. Otros pagos factibles incluyen los pares (x,x) para $1 < x < 4$, que resultan de las medias ponderadas de (1, 1) y (4, 4), y los pares (y,z) para $y + z = 5$ y $0 < y < 5$, que resultan de las medias ponderadas de (0, 5) y (5, 0). Los otros pares en (el interior de) la región sombreada de la figura 2.3.7 son medias ponderadas de las ganancias de más de dos estrategias puras. Para conseguir una media ponderada de las ganancias de estrategias puras, los jugadores podrían utilizar un mecanismo aleatorio público: jugando (I_1,D_2) o (D_1,I_2) dependiendo del lanzamiento de una moneda (no trucada), por ejemplo, consiguen ganancias esperadas de $(2,5,2,5)$.

La segunda definición que necesitamos para poder enunciar el teorema de Friedman es un reajuste de las ganancias a los jugadores. Continuamos definiendo las ganancias de cada jugador en el juego repetido infinitamente $G(\infty,\delta)$ como el valor presente de la sucesión infinita de ganancias del jugador en el juego de etapa, pero es más conveniente expresar este valor en términos de la *ganancia media* de la misma sucesión infinita de juegos de etapa, la ganancia que se tendría que recibir en cada etapa de forma que resultara en el mismo valor presente. Sea δ el factor de descuento. Supongamos que la sucesión infinita de ganancias $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots$ tiene un valor presente de V. Si se recibiese una ganancia π en cada etapa, el valor presente sería $\pi/(1-\delta)$. Para que π sea la ganancia media de la sucesión infinita $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots$ con un factor de descuento δ, estos dos valores presentes han de ser iguales, por tanto $\pi = V(1-\delta)$. Es decir, la ganancia media es $(1-\delta)$ veces el valor presente.

Definición. *Dado el factor de descuento δ, la* ***ganancia media*** *de la sucesión infinita de ganancias $\pi_1,\pi_2,\pi_3,\ldots$ es*

$$(1-\delta)\sum_{t=1}^{\infty}\delta^{t-1}\pi_t.$$

La ventaja de la ganancia media con respecto del valor presente es que el primero es directamente comparable con las ganancias del juego de etapa. En el dilema de los presos de la figura 2.3.6, por ejemplo, ambos jugadores podrían recibir una ganancia de 4 en cada periodo. Tal sucesión infinita de ganancias tiene una ganancia media de 4 pero un valor presente de $4/(1-\delta)$. Sin embargo, como la ganancia media no es más que un reajuste del valor presente, maximizar la ganancia media es equivalente a maximizar el valor presente.

Estamos finalmente preparados para enunciar el resultado principal en nuestra discusión sobre juegos repetidos infinitamente.

Teorema. (Friedman 1971): *Sea G un juego finito, estático y con información completa. Denominemos $(e_1,\ldots,e_n)$ a las ganancias en un equilibrio de Nash de G, y $(x_1,\ldots,x_n)$ a otras ganancias factibles cualesquiera de G. Si $x_i > e_i$ para cada jugador i y si δ está lo suficientemente cerca de uno, existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego repetido infinitamente $G(\infty,\delta)$ que alcanza $(x_1,\ldots,x_n)$ como ganancia media.*

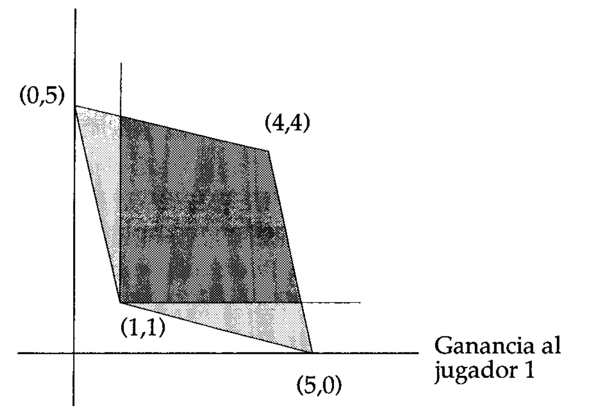


Figura 2.3.8

La demostración de este teorema repite los argumentos ya dados para el dilema de los presos repetido infinitamente, de forma que la relegamos al apéndice. Es conceptualmente inmediato pero algo complicado de notación extender el teorema a los juegos de etapa de buen comportamiento que no sean ni finitos ni estáticos (veremos algunos ejemplos en las aplicaciones de las tres próximas secciones). En el contexto del dilema de los presos de la figura 2.3.6, el teorema de Friedman garantiza que puede alcanzarse cualquier punto en la región más oscura de la figura 2.3.8 como ganancia media en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego repetido, siempre y cuando el factor de descuento esté lo suficientemente cerca de uno.

Concluimos esta sección esbozando dos derivaciones adicionales de la teoría de juegos repetidos infinitamente, que se complican al añadírseles la siguiente característica especial del dilema de los presos. En el dilema de los presos (de una etapa) de la figura 2.3.6, el jugador i puede estar seguro de recibir como mínimo la ganancia de 1 del equilibrio de Nash, jugando I_i. En un juego de duopolio de Cournot de una etapa (como el descrito en la sección 1.2.A), por el contrario, una empresa no puede estar segura de obtener los beneficios del equilibrio de Nash produciendo la cantidad del equilibrio de Nash; más bien, el único beneficio que una empresa puede estar segura de recibir es cero, produciendo cero. Dado un juego de etapa arbitario G, denotamos con r_i la *ganancia de reserva* del jugador i —la ganancia más alta que el jugador i puede estar seguro de recibir, hagan lo que hagan el resto de los jugadores. Debe ser el caso que $r_i \leq e_i$ (donde e_i es la ganancia del jugador i en el equilibrio de Nash utilizado en el teorema de Friedman), ya que si r_i fuera mayor que e_i, no sería la mejor respuesta del jugador i jugar su estrategia del equilibrio de Nash. En el dilema de los presos, $r_i = e_i$, pero en el juego del duopolio de Cournot (y típicamente), $r_i < e_i$.

Fudenberg y Maskin (1986) demuestran que en juegos con dos jugadores, las ganancias de reserva (r_1,r_2) pueden reemplazar a las ganancias de equilibrio (e_1,e_2) en el enunciado del teorema de Friedman. Es decir, si (x_1,x_2) es una ganancia factible de G, con $x_i > r_i$ para cada i, para δ lo suficientemente cerca de uno, existe un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de $G(\infty,\delta)$ que alcanza (x_1,x_2) como ganancia media, incluso si $x_i < e_i$ para alguno de los jugadores. En juegos con más de dos jugadores, Fudenberg y Maskin ofrecen una condición débil bajo la cual las ganancias de reserva $(r_1,\ldots,r_n)$ pueden reemplazar a las ganancias de equilibrio en el enunciado del teorema.

También tiene interés la siguiente pregunta complementaria: ¿qué ganancias medias pueden alcanzarse con un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos cuando el factor de descuento no está lo "suficientemente cerca de uno"? Una manera de abordar esta cuestión es considerar un valor fijo de δ y determinar las ganancias medias que pueden alcanzarse si los jugadores usan las estrategias del disparador que se desplazan para siempre al equilibrio de Nash del juego de etapa después de cualquier desviación. Valores menores de δ hacen que una penalización que empiece en el próximo periodo sea menos efectiva para evitar una desviación en este periodo. No obstante, los jugadores pueden típicamemte hacer algo mejor que simplemente jugar un equilibrio de Nash del juego de etapa. Un segundo enfoque, iniciado por Abreu (1988), se basa en la idea de que la forma más efectiva de evitar que un jugador se desvíe de una estrategia propuesta es amenazarlo con administrar la penalización creíble más dura en el caso que se desvíe (es decir, amenazar con responder a una desviación jugando el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego repetido infinitamente que proporciona la ganancia menor entre todos esos equilibrios al jugador que se desvía). En la mayoría de juegos, desplazarse para siempre al equilibrio de Nash del juego de etapa no es

la penalización creíble más fuerte; por tanto, utilizando el enfoque de Abreu pueden alcanzarse ganancias medias que no podrían alcanzarse utilizando el enfoque de la estrategia del disparador. En el dilema de los presos, sin embargo, el equilibrio de Nash del juego de etapa genera unas ganancias de reserva (esto es, $e_i = r_i$) tales que los dos enfoques son equivalentes. En la próxima sección damos ejemplos de los dos enfoques.

Apéndice

En este apéndice demostramos el teorema de Friedman. Sea $(a_{e1},\ldots,a_{en})$ el equilibrio de Nash de G que proporciona las ganancias de equilibrio $(e_1,\ldots,e_n)$. Del mismo modo, sea $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$ la colección de acciones que proporciona las ganancias factibles $(x_1,\ldots,x_n)$. (La última notación es sólo indicativa porque ignora el mecanismo aleatorio público típicamente necesario para alcanzar cualquier ganancia factible.) Consideremos la siguiente estrategia del disparador en el caso del jugador i:

> Jugar a_{xi} en la primera etapa. En la t-ésima etapa, si el resultado de todas las $t-1$ etapas anteriores ha sido $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$ jugar a_{xi}; en caso contrario jugar a_{ei}.

Si ambos jugadores adoptan esta estrategia, el resultado en cada etapa del juego repetido infinitamente será $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$. Argumentamos primero que si δ está lo suficientemente cerca de uno, el que los jugadores adopten esta estrategia constituye un equilibrio de Nash del juego repetido. Argumentamos a continuación que esta estrategia es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Supongamos que todos los jugadores excepto el jugador i han adoptado la estrategia del disparador. Dado que los demás jugarán siempre $(a_{e1},\ldots,a_{e,i-1},a_{e,i+1},\ldots,a_{en})$ siempre si el resultado de alguna etapa difiere de $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$, la mejor respuesta del jugador i es jugar siempre a_{ei} si el resultado en alguna ronda difiere de $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$. Queda por determinar la mejor respuesta del jugador i en la primera ronda y en cualquier etapa en la que todos los resultados anteriores hayan sido $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$. Sea a_{di} la mejor desviación de $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$ que puede adoptar el jugador i. Esto es, a_{di} es una solución de

$$\max_{a_i \in A_i} u_i(a_{x1},\ldots,a_{x,i-1},a_i,a_{x,i+1},\ldots,a_{xn}).$$

Sea d_i la ganancia a i con esta desviación: $d_i = u_i(a_{x1},\ldots,a_{x,i-1},a_{di},a_{x,i+1}$

$,\ldots, a_{xn})$. (Ignoramos de nuevo el papel del mecanismo aleatorio: la mejor desviación y su ganancia pueden depender de qué estrategia pura haya seleccionado el mecanismo aleatorio.) Tenemos que $d_i \geq x_i = u_i(a_{x1},\ldots,a_{x,i-1}, a_{xi}, a_{x,i+1},\ldots, a_{xn}) > e_i = u_i(a_{e1},\ldots,a_{en})$.

Jugar a_{di} proporcionará una ganancia de d_i en esta etapa pero desencadena $(a_{e1},\ldots,a_{e,i-1},a_{e,i+1},\ldots,a_{en})$ en lo sucesivo por parte de los demás jugadores, ante lo cual la mejor respuesta del jugador i es a_{ei}, de forma que la ganancia en cada etapa futura será e_i. El valor presente de esta sucesión de ganancias es

$$d_i + \delta \cdot e_i + \delta^2 \cdot e_i + \ldots = d_i + \frac{\delta}{1-\delta}e_i.$$

(Dado que cualquier desviación desencadena la misma respuesta de los demás jugadores, la única desviación que necesitamos considerar es la más ventajosa.) Alternativamente, jugar a_{xi} proporcionará una ganancia de x_i en esta etapa y conducirá a exactamente la misma elección entre a_{di} y a_{xi} en la siguiente ronda. Llamemos con V_i al valor presente de las ganancias del juego de etapa que el jugador i recibe por elegir óptimamente (ahora y cada vez que tenga que hacerlo en lo sucesivo). Si jugar a_{xi} es óptimo, entonces

$$V_i = x_i + \delta V_i,$$

o $V_i = x_i/(1-\delta)$. Si jugar a_{di} es óptimo, entonces

$$V_i = d_i + \frac{\delta}{1-\delta}e_i,$$

como obtuvimos previamente. (Supongamos que el mecanismo aleatorio no está correlacionado serialmente. Es suficiente entonces que d_i sea la ganancia mayor a la mejor desviación del jugador i entre las diferentes combinaciones de estrategias puras seleccionadas por el mecanismo aleatorio.) En consecuencia, jugar a_{xi} es óptimo si y sólo si

$$\frac{x_i}{1-\delta} \geq d_i + \frac{\delta}{1-\delta}e_i,$$

o

$$\delta \geq \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i}.$$

Por tanto, en la primera etapa, y en cualquier etapa tal que todos los resultados anteriores hayan sido $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$, la decisión óptima del jugador i (dado que los demás jugadores han adoptado la estrategia del disparador) es a_{xi} si y sólo si $\delta \geq (d_i - x_i)/(d_i - e_i)$.

Combinando esta observación con el hecho de que la mejor respuesta de i es jugar a_{ei} para siempre si el resultado de alguna etapa difiere de $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$, concluimos que jugar la estrategia del disparador por parte de todos los jugadores es un equilibrio de Nash si y sólo si

$$\delta \geq \max_i \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i}.$$

Como $d_i \geq x_i > e_i$, debe ocurrir que $(d_i - x_i)/(d_i - e_i) < 1$ para cada i, de forma que el valor máximo de esta fracción para cualquier jugador sea también estrictamente menor que 1.

Queda por demostrar que este equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos. Es decir, que las estrategias del disparador deben constituir un equilibrio de Nash en cada subjuego de $G(\infty,\delta)$. Recordemos que cada subjuego de $G(\infty,\delta)$ es idéntico al propio $G(\infty,\delta)$. En el equilibrio de Nash con estrategias del disparador estos subjuegos pueden agruparse en dos clases: (i) subjuegos en los que los resultados de las etapas anteriores han sido $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$, y (ii) subjuegos en los que el resultado de al menos una etapa difiere de $(a_{x1},\ldots,a_{xn})$. Si los jugadores adoptan la estrategia del disparador en el juego completo, (i) las estrategias de los jugadores en un subjuego de la primera etapa son de nuevo las estrategias del disparador que, tal como acabamos de demostrar, constituyen un equilibrio de Nash del juego completo, y (ii) las estrategias de los jugadores en un subjuego de la segunda clase consisten simplemente en repetir el equilibrio del juego de etapa $(a_{e1},\ldots,a_{en})$, lo que también es un equilibrio de Nash del juego completo. Por tanto, el equilibrio de Nash con estrategias del disparador del juego repetido infinitamente es perfecto en subjuegos.

2.3.C Colusión entre duopolistas de Cournot

Friedman (1971) fue el primero en demostrar que podría alcanzarse la cooperación en un juego repetido infinitamente utilizando estrategias que consistieran en elegir para siempre el equilibrio de Nash del juego de etapa después de cualquier desviación. Originalmente se aplicó a los casos de colusión en un oligopolio de Cournot, del siguiente modo:

Recordemos el juego de Cournot estático de la sección 1.2.A: Si la cantidad agregada es $Q = q_1 + q_2$, el precio de equilibrio es $P(Q) = a - Q$, suponiendo que $Q < a$. Cada empresa tiene un coste marginal c y no tiene costes fijos. Las empresas escogen sus cantidades simultáneamente. En el único equilibrio de Nash, cada empresa produce una cantidad $(a-c)/3$, a la que llamaremos la cantidad de Cournot y denotaremos por q_c. Dado que en equilibrio la cantidad agregada, $2(a-c)/3$ es mayor que la cantidad de monopolio, $q_m \equiv (a-c)/2$, ambas empresas estarían mejor si cada una produjera la mitad de la cantidad de monopolio, $q_i = q_m/2$.

Consideremos el juego repetido infinitamente basado en este juego de etapa de Cournot, cuando las dos empresas tienen el mismo factor de descuento δ. Calculemos ahora los valores de δ para los que, cuando las dos empresas juegan la siguiente estrategia, llegamos a un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de este juego repetido infinitamente:

> Producir la mitad de la cantidad de monopolio, $q_m/2$, en el primer periodo. En el t-ésimo periodo, producir $q_m/2$ si ambas empresas han producido $q_m/2$ en cada uno de los $t-1$ periodos anteriores; en caso contrario, producir la cantidad de Cournot, q_c.

Puesto que el argumento es paralelo al dado para el dilema de los presos de la sección anterior, seremos breves en la discusión.

El beneficio que obtiene una empresa cuando ambas producen $q_m/2$ es $(a-c)^2/8$, que denotaremos por $\pi_m/2$. El beneficio de una empresa cuando ambas producen q_c es $(a-c)^2/9$, que denotaremos por π_c. Finalmente, si la empresa i va a producir $q_m/2$ en este periodo, la cantidad que maximiza los beneficios de la empresa j en este periodo es una solución de

$$\max_{q_j} \left(a - q_j - \frac{1}{2} q_m - c \right) q_j$$

La solución es $q_j = 3(a-c)/8$, con un beneficio de $9(a-c)^2/64$, que denotamos mediante π_d ("d" por desviación). Por tanto, que las dos empresas jueguen la estrategia del disparador expuesta anteriormente es un equilibrio de Nash siempre que

$$\frac{1}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2}\pi_m \geq \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \pi_C, \tag{2.3.2}$$

análoga a (2.3.1) en el análisis del dilema de los presos. Sustituyendo los valores de π_m, π_d y π_c en (2.3.2) obtenemos que $\delta \geq 9/17$. Por las mismas razones que en la sección anterior, este equilibrio de Nash es perfecto en subjuegos.

También podemos preguntarnos qué pueden conseguir las empresas si $\delta < 9/17$. Exploraremos los dos enfoques descritos en la sección anterior. Determinamos en primer lugar, para un valor dado de δ, la cantidad más rentable que las empresas pueden producir si ambas siguen una estrategia del disparador que transforman para siempre en la cantidad de Cournot después de cualquier desviación. Sabemos que estas estrategias no pueden seguirse con una cantidad tan baja como la mitad de la cantidad de monopolio, mientras que para cualquier valor de δ, repetir la cantidad de Cournot para siempre es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Por tanto, la cantidad más rentable que puede darse con las estrategias del disparador está entre $q_m/2$ y q_c. Para calcular esta cantidad, consideramos la estrategia del disparador siguiente:

> Producir q^* en el primer periodo. En el t-ésimo periodo, producir q^* si ambas empresas han producido q^* en cada uno de los $t-1$ periodos anteriores; en caso contrario, producir la cantidad de Cournot, q_c.

El beneficio de una empresa si ambas juegan q^* es $(a-2q^*-c)q^*$, que denotaremos mediante π^*. Si la empresa i va a producir q^* en este periodo, la cantidad que maximiza los beneficios de la empresa j en este periodo es una solución de

$$\max_{q_j} (a - q_j - q^* - c) q_j.$$

La solución es $q_j = (a-q^*-c)/2$, con un beneficio de $(a-q^*-c)^2/4$, que de nuevo denotamos por π_d. Que las dos empresas jueguen las estrategias del disparador dadas anteriormente es un equilibrio de Nash siempre que

$$\frac{1}{1-\delta} \cdot \pi^* \geq \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \pi_C.$$

Despejando q^* en la ecuación de segundo grado resultante se obtiene que el valor menor de q^* para el que las estrategias del disparador dadas anteriormente son un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos es

$$q^* = \frac{9-5\delta}{3(9-\delta)}(a-c),$$

que decrece monótonamente con δ, tiende a $q_m/2$ cuando δ tiende a $9/17$ y tiende a q_c cuando δ tiende a cero.

Exploramos ahora el segundo enfoque, que incluye la amenaza de hacer efectiva la penalización más fuerte creíble. Abreu (1986) aplica esta idea a unos modelos de Cournot más generales que el nuestro, utilizando un factor de descuento arbitrario; nosotros simplemente demostramos que el enfoque de Abreu permite que en nuestro modelo se obtenga el resultado de monopolio cuando $\delta = 1/2$ (que es menor que 9/17). Consideremos la siguiente estrategia del "palo y la zanahoria"):

> Producir la mitad de la cantidad de monopolio, $q_m/2$, en el primer periodo. En el t-ésimo periodo, producir $q_m/2$ si ambas empresas produjeron $q_m/2$ en el periodo $t-1$, $q_m/2$ si ambas empresas produjeron x en el periodo $t-1$, y x en cualquier otro caso.

Esta estrategia incluye una fase de penalización (de un periodo) en la que la empresa produce x y una fase de colusión (potencialmente infinita) en la que la empresa produce $q_m/2$. Si cualquiera de las dos empresas se desvía de la fase de colusión, empieza la fase de penalización. Si cualquiera de las dos empresas se desvía de la fase de penalización, ésta vuelve a empezar. Si ninguna empresa se desvía de la fase de penalización, empieza de nuevo la fase de colusión.

El beneficio de una empresa si ambas producen x es $(a-2x-c)x$, que denotaremos mediante $\pi(x)$. Sea $V(x)$ el valor presente de recibir $\pi(x)$ en este periodo y la mitad del beneficio de monopolio en lo sucesivo:

$$V(x) = \pi(x) + \frac{\delta}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2}\pi_m.$$

Si la empresa i va a producir x en este periodo, la cantidad que maximiza el beneficio de la empresa j este periodo es la solución de

$$\max_{q_j} \, (a - q_j - x - c)q_j.$$

Esta solución es $q_j = (a-x-c)/2$, con un beneficio de $(a-x-c)^2/4$, que denotamos por $\pi_{dp}(x)$, donde dp significa desviarse de la penalización.

Si ambas empresas juegan esta estrategia, los subjuegos del juego repetido infinitamente pueden agruparse en dos clases: (i) subjuegos de colusión, en los que el resultado del periodo anterior fue $(q_m/2, q_m/2)$ o (x,x), y (ii) subjuegos de penalización, en los que el resultado del periodo anterior no fue ni $(q_m/2, q_m/2)$ ni (x,x). Para que el que las dos empresas jueguen la estrategia del palo y la zanahoria sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, esta estrategia debe ser un equilibrio de Nash en cada clase de subjuegos. En los subjuegos de colusión, cada empresa debe preferir recibir la mitad del beneficio de monopolio en lo sucesivo a recibir π_d este periodo y el valor presente por penalización en el periodo siguiente:

$$\frac{1}{1-\delta} \cdot \frac{1}{2}\pi_m \geq \pi_d + \delta V(x). \tag{2.3.3}$$

En los subjuegos de penalización, cada empresa debe preferir administrar el castigo a recibir π_{dp} este periodo y empezar de nuevo la penalización en el siguiente periodo:

$$V(x) \geq \pi_{dp}(x) + \delta V(x). \tag{2.3.4}$$

Sustituyendo $V(x)$ en (2.3.3) obtenemos

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi_m - \pi(x)\right) \geq \pi_d - \frac{1}{2}\pi_m.$$

Es decir, lo que se gana en este periodo por desviarse no debe ser mayor que el valor descontado de la pérdida en el periodo siguiente debida a la penalización. (Siempre y cuando ninguna de las empresas se desvíe de la fase de penalización, no hay ninguna pérdida a partir del siguiente periodo, ya que la fase de penalización termina y las empresas vuelven al resultado de monopolio, como si no hubiera habido desviación.) Del mismo modo, (2.3.4) puede reescribirse como

$$\delta\left(\frac{1}{2}\pi_m - \pi(x)\right) \geq \pi_d p - \pi(x),$$

con una interpretación análoga. Para $\delta = 1/2$, (2.3.3) se cumple siempre y cuando $x/(a-c)$ no esté entre $1/8$ y $3/8$, y (2.3.4) se cumple si $x/(a-c)$ está entre $3/10$ y $1/2$. Por tanto, para $\delta = 1/2$, la estrategia del palo y la zanahoria consigue que el resultado de monopolio sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, siempre y cuando $3/8 \leq x/(a-c) \leq 1/2$.

Existen otros muchos modelos de oligopolio dinámico que enriquecen el modelo simple desarrollado aquí. Concluimos esta sección discutiendo brevemente dos clases de estos modelos: los modelos con variables de estado y los modelos con supervisión imperfecta. Las dos clases de modelos tienen muchas aplicaciones que trascienden el ámbito del oligopolio; por ejemplo, el modelo de salarios de eficiencia de la próxima sección es un caso de supervisión imperfecta.

Rotemberg y Saloner (1986 y ejercicio 2.14) estudian la colusión en el ciclo económico, permitiendo que la intersección con el eje de abcisas de la función de demanda fluctúe aleatoriamente de un periodo al otro. En cada periodo, todas las empresas observan la intersección con el eje de abcisas de la función de demanda en ese periodo antes de tomar decisiones; en otras aplicaciones, los jugadores observan otras variables de estado al principio de cada periodo. El incentivo a desviarse de una estrategia pactada depende tanto del valor de la demanda en este periodo como de los posibles valores de la demanda en periodos futuros. (Rotemberg y Saloner suponen que la demanda no está correlacionada serialmente, de forma que esta última consideración es independiente del valor presente de la demanda, pero otros autores posteriormente han relajado este supuesto.)

Green y Porter (1984) estudian la colusión cuando las desviaciones no se pueden detectar perfectamente: en vez de observar las cantidades escogidas por la otra empresa, cada empresa observa tan sólo el precio de equilibrio del mercado, que cada periodo recibe sacudidas debidas a una perturbación aleatoria inobservable. En este contexto, las empresas no pueden distinguir cuándo un precio de equilibrio bajo se debe a que una o más empresas se han desviado de la estrategia pactada o a que ocurrió una perturbación adversa. Green y Porter examinan los equilibrios con estrategias del disparador tales que cualquier precio por debajo de un nivel crítico dispara un periodo de penalización durante el cual las empresas juegan sus cantidades de Cournot. En equilibrio, ninguna empresa se desvía. No obstante, una perturbación especialmente mala puede hacer que el precio caiga por debajo del nivel crítico, desencadenando un periodo de penalización. Como algunas penalizaciones ocurren accidentalmente, las penalizaciones infinitas del tipo considerado en el análisis de las estrategias del disparador no son óptimas. Estrategias de dos fases del tipo analizado por Abreu podrían parecer prometedoras; efectivamente, Abreu, Pearce y Stacchetti (1986) demuestran que pueden ser óptimas.

2.3.D Salarios de eficiencia

En los modelos de salarios de eficiencia, lo que producen los trabajadores de una empresa depende del salario que la empresa paga. En el contexto de los países en vías de desarrollo, esto se explicaría porque unos salarios más altos podrían conducir a una mejor nutrición; en los países desarrollados, unos salarios más altos podrían inducir a que los trabajadores mejor preparados solicitasen empleo en la empresa que los ofreciera, o podrían inducir a los trabajadores ya empleados a trabajar más intensamente.

Shapiro y Stiglitz (1984) desarrollan un modelo dinámico en el que las empresas inducen a los trabajadores a trabajar más pagando salarios altos y amenazando con despedir a los que sean descubiertos trabajando poco. Como consecuencia de estos salarios altos, las empresas reducen su demanda de trabajo, de forma que algunos trabajadores tendrán empleo con salarios altos mientras que otros estarán (involuntariamente) parados. Cuanto mayor sea el número de trabajadores parados, más tiempo le llevará a un trabajador que haya sido despedido encontrar un nuevo empleo, de forma que la amenaza de despido resulta más efectiva. En el equilibrio competitivo, el salario w y la tasa de paro u inducen a los trabajadores a esforzarse, de tal forma que la demanda de trabajo de las empresas al salario w hace que la tasa de desempleo sea exactamente u. Vamos a estudiar los aspectos de este modelo que tienen que ver con los juegos repetidos (pero ignoraremos los relacionados con el equilibrio competitivo) analizando el caso de una empresa y un trabajador.

Consideremos el siguiente juego de etapa. En primer lugar, la empresa ofrece al trabajador un salario, w. En segundo lugar, el trabajador acepta o rechaza la oferta de la empresa. Si el trabajador rechaza w, se convierte en un trabajador independiente con un salario w_0. Si el trabajador acepta w, escoge entre realizar un esfuerzo (lo que le produce una desutilidad e) o no (lo que no le produce desutilidad). La decisión tomada por el trabajador sobre su esfuerzo no es observada por la empresa, pero lo que el trabajador produce es observado tanto por la empresa como por el trabajador. La producción puede ser alta o baja; para simplificar, suponemos que el nivel bajo de producción es cero y escribimos el nivel alto como $y > 0$. Supongamos que si el trabajador realiza un esfuerzo, la producción es alta con probabilidad 1, pero que si el trabajador no se esfuerza, la producción es alta con probabilidad p y baja con probabilidad $1 - p$. Por tanto, en este modelo, un nivel bajo de producción es signo inequívoco de falta de esfuerzo.

Si la empresa emplea al trabajador con un salario w, las ganancias a los jugadores si el trabajador realiza un esfuerzo y la producción es alta son $y - w$ para la empresa y $w - e$ para el trabajador. Si el trabajador no se esfuerza, e es cero; si la producción es baja, y es cero. Suponemos que $y - e > w_0 > py$, de forma que al trabajador le resulta eficiente estar empleado en la empresa y realizar un esfuerzo, aunque también le resulta mejor ponerse de independiente a estar empleado en la empresa y no esforzarse.

El resultado perfecto en subjuegos de este juego de etapa es más bien poco prometedor: dado que la empresa paga w por adelantado, el trabajador no tiene ningún incentivo para esforzarse, de forma que la empresa ofrece $w = 0$ (o cualquier $w \leq w_0$) y el trabajador escoge trabajar como independiente. Sin embargo, en el juego repetido infinitamente, la empresa puede inducir un esfuerzo pagando un salario w superior a w_0 y amenazando con despedir al trabajador en cuanto la producción sea baja. Demostramos que para algunos valores de los parámetros, la empresa encuentra que vale la pena inducir un esfuerzo pagando ese salario.

Uno podría preguntarse por qué la empresa y el trabajador no pueden firmar un contrato compensatorio que dependa de la producción, de forma que induzca al esfuerzo. Una razón por la que estos contratos podrían no ser viables es que a un tribunal le resulta muy difícil hacer que se cumplan, quizás porque una medida adecuada de la producción incluye la calidad, las dificultades inesperadas en las condiciones de producción, etc. De una forma más general, es probable que los contratos contingentes a determinados volúmenes de producción sean imperfectos (más que completamente inviables), aunque los incentivos todavía pueden jugar un papel en el juego repetido estudiado aquí.

Consideremos las siguientes estrategias en el juego repetido infinitamente, que incluyen el salario $w^* > w_0$ que se determinará más adelante. Diremos que la historia del juego es de *salario alto y producción alta* si todas las ofertas anteriores han sido w^*, todas las ofertas anteriores han sido aceptadas y todos los niveles de producción anteriores han sido altos. La estrategia de la empresa es ofrecer $w = w^*$ en el primer periodo, y ofrecer $w = w^*$ en cada periodo siguiente siempre y cuando la historia del juego sea de salario alto, producción alta, pero ofrecer $w = 0$ en caso contrario. La estrategia del trabajador es aceptar la oferta de la empresa si $w \geq w_0$ (decidiendo trabajar como independiente en caso contrario) y realizar un esfuerzo si la historia del juego, incluyendo la oferta presente, es de salario alto y producción alta (no esforzándose en caso contrario).

La estrategia de la empresa es análoga a las estrategias del disparador analizadas en las dos secciones anteriores: jugar cooperativamente siempre y cuando todas las jugadas anteriores hayan sido cooperativas, pero escoger en lo sucesivo el resultado perfecto en subjuegos del juego de etapa si alguna vez se rompe la cooperación. La estrategia del jugador es también análoga a estas estrategias del disparador, pero es ligeramente más sutil ya que el trabajador decide en segundo lugar en el juego de etapa de decisión sucesiva. En un juego repetido basado en un juego de etapa de decisión simultánea, las desviaciones se detectan sólo al final de la ronda; sin embargo, cuando el juego de etapa es de decisión sucesiva, una desviación del primer jugador se detecta (y debería ser contestada) durante la misma ronda. La estrategia del trabajador es jugar cooperativamente siempre y cuando todas las jugadas anteriores hayan sido cooperativas, pero responder de forma óptima a cualquier desviación de la empresa, sabiendo que el resultado perfecto en subjuegos del juego de etapa se jugará en todas las etapas futuras. En particular, si $w \neq w^*$ pero $w \geq w_0$, el trabajador acepta la oferta de la empresa pero no se esfuerza.

Derivamos ahora las condiciones bajo las cuales estas estrategias son un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Como en las dos secciones anteriores, el argumento consta de dos partes: (i) la derivación de las condiciones bajo las cuales estas estrategias son un equilibrio de Nash, y (ii) la demostración de que es perfecto en subjuegos.

Supongamos que la empresa ofrece w^* en el primer periodo. Dada la estrategia de la empresa, es óptimo para el trabajador aceptar. Si el trabajador realiza un esfuerzo, está seguro que producirá al nivel alto, de forma que la empresa volverá a ofrecer w^* y el trabajador volverá a enfrentarse en el periodo siguiente a la misma decisión sobre el esfuerzo a realizar. Por tanto, si la decisión óptima del trabajador es esforzarse, el valor presente de las ganancias del trabajador es

$$V_e = (w^* - e) + \delta V_e,$$

o $V_e = (w^* - e)/(1 - \delta)$. Sin embargo, si el trabajador no se esfuerza, producirá al nivel alto con probabilidad p, en cuyo caso la misma decisión con respecto al esfuerzo se dará en el próximo periodo, pero el trabajador producirá el nivel bajo con probabilidad $1 - p$, en cuyo caso la empresa ofrecerá $w = 0$ en lo sucesivo, de forma que en adelante el trabajador será independiente. Por tanto, si no esforzarse es la decisión óptima del trabajador, el valor presente (esperado) de las ganancias del trabajador es

$$V_s = w^* + \delta \left\{ pV_s + (1 - p)\frac{w_0}{1 - \delta} \right\},$$

o $V_s = [(1 - \delta)w^* + \delta(1 - p)w_0]/(1 - \delta p)(1 - \delta)$. Realizar un esfuerzo es óptimo para el trabajador si $V_e \geq V_s$, o

$$w^* \geq w_0 + \frac{1-p\delta}{\delta(1-p)}e = w_0 + \left(1 + \frac{1-\delta}{\delta(1-p)}e\right). \tag{2.3.5}$$

Por tanto, para inducir un esfuerzo, la empresa debe pagar no sólo $w_0 + e$ para compensar al trabajador por renunciar a la oportunidad de trabajar como independiente y por la desutilidad del esfuerzo, sino también por la prima salarial $(1-\delta)e/\delta(1-p)$. Naturalmente, si p está cerca de uno (es decir, si no esforzarse es difícilmente detectable), la prima salarial debe ser extremadamente alta para inducir un esfuerzo. Si $p = 0$, por otra parte, esforzarse es la decisión óptima del trabajador si

$$\frac{1}{1-\delta}(w^* - e) \geq w^* + \frac{\delta}{1-\delta}w_0, \tag{2.3.6}$$

análogamente a (2.3.1) y (2.3.2) en los casos con supervisión perfecta de las dos secciones anteriores, (2.3.6) es equivalente a

$$w^* \geq w_0 + \left(1 + \frac{1-\delta}{\delta}\right)e,$$

que efectivamente es (2.3.5) con $p = 0$.

Incluso si (2.3.5) se cumple, de forma que la estrategia del trabajador sea la mejor respuesta a la estrategia de la empresa, a la empresa tiene también que merecerle la pena pagar w^*. Dada la estrategia del trabajador, el problema de la empresa en el primer periodo se concreta en escoger entre: (1) pagar $w = w^*$, induciendo con ello al esfuerzo y amenazando con despedir al trabajador si en algún momento la producción es baja, y recibiendo por tanto la ganancia $y - w^*$ en cada periodo; y (2) pagar $w = 0$, induciendo con ello al trabajador a escoger trabajar como independiente, y recibiendo de esta forma una ganancia igual a cero en cada periodo. Por tanto, la estrategia de la empresa es una mejor respuesta a la del trabajador si

$$y - w^* \geq 0. \tag{2.3.7}$$

Recordemos que supusimos que $y - e > w_0$ (es decir, que para el trabajador es eficiente estar empleado por la empresa y esforzarse). Necesitamos una condición más fuerte si estas estrategias han de formar un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos: (2.3.5) y (2.3.7) implican

$$y - e \geq w_0 + \frac{1-\delta}{\delta(1-p)}e,$$

que puede interpretarse como la restricción familiar de que δ debe ser lo suficientemente alta para lograr una cooperación sostenida.

Hemos demostrado hasta ahora que si (2.3.5) y (2.3.7) se cumplen, las estrategias que estamos considerando son un equilibrio de Nash. Para demostrar que estas estrategias son perfectas en subjuegos, definimos primero los subjuegos del juego repetido. Recordemos que cuando el juego de etapa obliga a decisiones simultáneas, los subjuegos del juego repetido empiezan entre las etapas del juego repetido. Para el juego de etapa de decisiones sucesivas considerado aquí, los subjuegos empiezan no sólo entre etapas sino también dentro de cada etapa, después de que el trabajador observa el salario que la empresa ofrece. Dadas las estrategias de los jugadores, podemos agrupar los subjuegos en dos clases: los que empiezan después de una historia de salario alto y producción alta, y los que empiezan después de todas las demás historias. Hemos demostrado ya que las estrategias de los jugadores son un equilibrio de Nash dada una historia de la primera clase. Queda por hacer lo mismo con una historia del segundo tipo: como el trabajador no se esforzará nunca, es una decisión óptima de la empresa inducir al trabajador a trabajar como independiente; dado que la empresa ofrecerá $w = 0$ en la siguiente etapa y en lo sucesivo, el trabajador no debería esforzarse en esta etapa y debería aceptar la oferta presente sólo si $w \geq 0$.

En este equilibrio, trabajar como independiente es permanente: si se descubre al trabajador no esforzándose, la empresa ofrece $w = 0$ en lo sucesivo; si la empresa se desvía alguna vez de ofrecer $w = w^*$, el trabajador nunca volverá a esforzarse, de forma que la empresa no puede permitirse emplear al trabajador. Hay varias razones para preguntarse si es razonable que el trabajo como independiente sea permanente. En nuestro modelo de una empresa y un trabajador, ambos jugadores preferirían volver al equilibrio de salario alto y producción alta del juego repetido infinitamente, antes que jugar para siempre el resultado perfecto en subjuegos del juego de etapa. Éste es el problema de la renegociación presentado en la sección 2.3.A. Recordemos que si los jugadores saben que no se podrán hacer cumplir las penalizaciones, la cooperación inducida por la amenaza de estas penalizaciones ya no es un equilibrio.

En el contexto del mercado de trabajo, la empresa puede preferir no renegociar si emplea muchos trabajadores, ya que renegociar con un trabajador puede estropear el equilibrio de salario alto y producción alta que se está todavía jugando (o aún se ha de empezar a jugar) con los otros trabajadores. Si hay muchas empresas, la cuestión es si la empresa j contratará a trabajadores empleados anteriormente en la empresa i. Pudiera ser que la empresa j no lo hiciera, por miedo a estropear el equilibrio de salario alto y producción alta logrado con sus trabajadores, como en el caso de una única empresa. Algo así puede explicar la falta de movilidad de los administrativos jóvenes y varones entre las grandes empresas en Japón.

Alternativamente, si los trabajadores despedidos pueden siempre encontrar nuevos empleos que sean preferibles a trabajar como independientes, el salario en esos nuevos empleos (neto de cualquier desutilidad del esfuerzo) es el que aquí juega el papel del salario en el trabajo por libre w_0. En el caso extremo en el que un trabajador despedido no sufra ninguna pérdida, no existirán penalizaciones por no esforzarse en el juego repetido infinitamente y, por consiguiente, no existirá ningún equilibrio de Nash perfecto en subjuegos en el que el trabajador se esfuerce. Existe una aplicación elegante de estas ideas en el contexto de la deuda pública externa en Bulow y Rogoff (1989): si un país endeudado puede conseguir el importe de los créditos a largo plazo que recibe de los países acreedores mediante transacciones a corto plazo por adelantado en el mercado internacional de capitales, no hay posibilidad de penalizar el incumplimiento de los términos de la deuda en el juego repetido infinitamente entre países deudores y acreedores.

2.3.E Política monetaria estable en el tiempo

Consideremos un juego de decisiones sucesivas en el que empresarios y trabajadores renegocian los salarios nominales, después de lo cual la autoridad monetaria escoge la oferta monetaria que, a su vez, determina la tasa de inflación. Si los contratos salariales no pueden ser automáticamente actualizables, empresarios y trabajadores tratarán de prever la inflación antes de fijar los salarios. Sin embargo, una vez se ha fijado el salario nominal, un nivel real de inflación superior al previsto erosionará el salario real, haciendo que los empresarios aumenten el empleo y la producción. La autoridad monetaria, por tanto, se enfrenta a un dilema al tener que escoger entre los costes de la inflación y las ventajas de reducir el paro y aumentar la producción ante una evolución imprevista del nivel de inflación.

Como en Barro y Gordon (1983), analizamos una versión en forma reducida de este modelo en el siguiente juego de etapa. Primero, los empresarios forman sus expectativas de inflación, π^e. En segundo lugar, la autoridad monetaria observa esta expectativa y escoge el nivel real de inflación, π. La ganancia de los empresarios es $-(\pi - \pi^e)^2$. Es decir, los empresarios quieren simplemente prever correctamente el nivel de inflación; alcanzan su ganancia máxima (que es cero) cuando $\pi = \pi^e$. A la autoridad monetaria, por su parte, le gustaría que la inflación fuera cero pero que la producción estuviera en su nivel de eficiencia (y^*). Escribimos la ganancia de la autoridad monetaria como

$$U(\pi,y) = -c\pi^2 - (y - y^*)^2,$$

donde el parámetro $c > 0$ refleja el dilema de la autoridad monetaria entre sus dos objetivos. Supongamos que el verdadero nivel de producción es la siguiente función del nivel de producción deseado y de la inflación imprevista:

$$y = by^* + d(\pi - \pi^e),$$

donde $b < 1$ refleja la presencia de un poder de monopolio en los mercados de productos (de forma que si no hubiera inflación imprevista, se produciría a un nivel por debajo del de eficiencia) y $d > 0$ mide el efecto de la inflación imprevista sobre la producción a través de los salarios reales, tal y como se describió en el párrafo anterior. Podemos entonces reescribir la ganancia de la autoridad monetaria como

$$W(\pi,\pi^e) = -c\pi^2 - [(b - 1)y^* + d(\pi - \pi^e)]^2.$$

Para hallar el resultado perfecto en subjuegos de este juego de etapa, calculamos primero la elección óptima de π por parte de la autoridad monetaria, dadas las expectativas de los empresarios π^e. Maximizando $W(\pi,\pi^e)$ obtenemos

$$\pi^*(\pi^e) = \frac{d}{c + d^2}[(1 - b)y^* + d\pi^e]. \tag{2.3.8}$$

Dado que los empresarios prevén que la autoridad monetaria escogerá $\pi^*(\pi^e)$, los empresarios escogerán la π^e que maximice $-[\pi^*(\pi^e) - \pi^e]^2$, lo que da $\pi^*(\pi^e) = \pi^e$, o

$$\pi^e = \frac{d(1 - b)}{c}y^* = \pi_s,$$

donde el subíndice s denota "juego de etapa". De forma similar, podría decirse que la *expectativa racional* que los empresarios deben mantener es la que será confirmada en lo sucesivo por la autoridad monetaria, de forma que $\pi^*(\pi^e) = \pi^e$, y por tanto $\pi^e = \pi_s$. Cuando los empresarios mantienen esta expectativa $\pi^e = \pi_s$, el coste marginal en que incurre la autoridad monetaria al fijar π ligeramente por encima de π_s compensa exactamente el beneficio marginal de la inflación imprevista. En este resultado perfecto en subjuegos, se espera que la autoridad monetaria cree inflación y así lo hace, pero estaría mejor si pudiera comprometerse a no crear inflación. Efectivamente, si los empresarios tuvieran expectativas racionales (es decir, $\pi = \pi^e$), una inflación cero maximiza la ganancia de la autoridad monetaria (es decir, $W(\pi,\pi_e) = -c\pi^2 - (b-1)^2 y^{*2}$ cuando $\pi = \pi^e$, de forma que $\pi = 0$ es óptimo).

Consideremos ahora el juego repetido infinitamente en el que ambos jugadores tienen el mismo factor de descuento δ. Derivaremos condiciones bajo las cuales $\pi = \pi^e = 0$ en cada periodo de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que incluya las siguientes estrategias. En el primer periodo, los empresarios mantienen la expectativa $\pi^e = 0$. En periodos sucesivos mantienen la expectativa $\pi^e = 0$ siempre y cuando todas las expectativas anteriores hayan sido $\pi^e = 0$ y todos los niveles de inflación anteriores hayan sido efectivamente $\pi = 0$; en caso contrario, los empresarios mantienen la expectativa $\pi^e = \pi_s$ (la expectativa racional en el juego de etapa). De forma similar, la autoridad monetaria fija $\pi = 0$ siempre y cuando la expectativa presente sea $\pi^e = 0$, todas las expectativas anteriores hayan sido $\pi^e = 0$ y todos los niveles de inflación anteriores hayan sido efectivamente $\pi = 0$; en caso contrario, la autoridad monetaria fija $\pi = \pi^*(\pi^e)$ (su mejor respuesta a las expectativas de los empresarios, tal como se indica en (2.3.8)).

Supongamos que los empresarios mantienen la expectativa $\pi^e = 0$ en el primer periodo. Dada la estrategia de los empresarios (es decir, la forma en que los empresarios actualizan sus expectativas después de observar el nivel verdadero de inflación), la autoridad monetaria puede restringir su atención a dos decisiones: (1) $\pi = 0$, lo que conducirá a $\pi^e = 0$ el periodo siguiente y, por tanto, a la misma decisión por parte de la autoridad monetaria en el siguiente periodo; y (2) $\pi = \pi^*(0)$ utilizando (2.3.8), lo que conducirá a $\pi^e = \pi_s$ en lo sucesivo, en cuyo caso la autoridad monetaria encontrará que es óptimo en lo sucesivo escoger $\pi = \pi_s$. En consecuencia, fijar $\pi = 0$ en este periodo resulta en la ganancia $W(0,0)$ por periodo, mientras que fijar $\pi = \pi^*(0)$ en este periodo resulta en la ganancia $W(\pi^*(0),0)$ en este periodo, pero $W(\pi_s,\pi_s)$ en lo sucesivo. Por lo tanto, la estrategia de la autoridad monetaria es la mejor respuesta

$$\frac{1}{1-\delta}W(0,0) \geq W\left(\pi^*(0),0\right) + \frac{\delta}{1-\delta}W(\pi_s,\pi_s), \tag{2.3.9}$$

que es análoga a (2.3.6).

Simplificando (2.3.9) obtenemos $\delta \geq c/(2c + d^2)$. Cada uno de los parámetros c y d tiene dos efectos. Un aumento en d, por ejemplo, hace que la inflación imprevista sea más efectiva de cara al aumento de la producción, y resulta por tanto más tentador para la autoridad monetaria ser indulgente con la inflación imprevista, aunque por la misma razón, un aumento en d también aumenta el resultado del juego de etapa π_s, lo que hace que la penalización sea más dolorosa para la autoridad monetaria. Del mismo modo, un aumento de c hace que la inflación sea más dolorosa, por lo que la inflación imprevista resulta menos tentadora, pero también hace que π_s disminuya. En ambos casos, el último efecto pesa más que el primero, de forma que el valor crítico del factor de descuento necesario para mantener este equilibrio, $c/(2c + d^2)$, decrece con d y crece con c.

Hasta ahora hemos demostrado que la estrategia de la autoridad monetaria es una mejor respuesta a la estrategia de los empresarios si (2.3.9) se cumple. Para demostrar que estas estrategias son un equilibrio de Nash, queda por demostrar que la última es una mejor respuesta a la primera, lo cual se deriva de la observación de que los empresarios obtienen su mejor ganancia posible (que es cero) en cada periodo. Demostrar que estas estrategias son perfectas en subjuegos requiere argumentos análogos a los de la sección anterior.

2.4 Juegos dinámicos con información completa pero imperfecta

2.4.A Representación de los juegos en forma extensiva

En el capítulo 1 estudiamos juegos estáticos representándolos en forma normal. Analizamos ahora juegos dinámicos representándolos en forma extensiva.[19] Este enfoque expositivo puede hacer que parezca que los juegos estáticos tienen que representarse en forma normal y los juegos dinámicos en forma extensiva, pero esto no es así. Cualquier juego puede representarse tanto en forma normal como extensiva, aunque para algu-

[19] Damos una descripción informal de la forma extensiva; para un tratamiento preciso consúltese Kreps y Wilson (1982).

nos juegos una de las dos formas es más apropiada que la otra. Vamos a ver cómo los juegos estáticos pueden representarse utilizando la forma extensiva y cómo los juegos dinámicos pueden ser representados utilizando la forma normal.

Recordemos de la sección 1.1.A que la representación en forma normal de un juego requiere precisar: (1) los jugadores, (2) las estrategias posibles de cada jugador y (3) las ganancias recibidas por cada jugador para cada combinación de estrategias posibles.

Definición. *La **representación en forma extensiva** de un juego exige precisar: (1) los jugadores, (2a) cuándo tiene que jugar cada jugador, (2b) lo que cada jugador puede hacer cada vez que tiene la oportunidad de jugar, (2c) lo que cada jugador sabe cada vez que tiene la oportunidad de jugar y (3) la ganancia recibida por cada jugador para cada combinación posible de jugadas.*

Aunque no lo dijimos en su momento, en las secciones 2.1 a 2.3 hemos analizado varios juegos representados en forma extensiva. La contribución de esta sección consiste en describir estos juegos en forma de árbol en vez de utilizar palabras, porque el uso de árboles a menudo facilita tanto la explicación como el análisis.

Como ejemplo de un juego en forma extensiva, consideremos el siguiente representante de la clase de juegos en dos etapas con información completa y perfecta presentada en la sección 2.1.A:

1. El jugador 1 escoge una acción a_1 del conjunto factible $A_1 = \{I,D\}$.
2. El jugador 2 observa a_1 y escoge entonces una acción a_2 del conjunto $A_2 = \{I',D'\}$.
3. Las ganancias son $u_1(a_1,a_2)$ y $u_2(a_1,a_2)$, como se indica en el árbol de la figura 2.4.1.

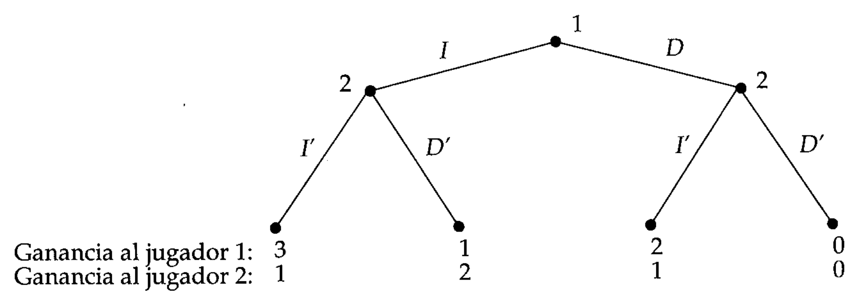


Figura 2.4.1

Este árbol empieza con un *nodo de decisión* correspondiente al jugador 1, donde 1 escoge entre I y D. Si el jugador 1 escoge I, se llega a un nodo de decisión del jugador 2, donde 2 escoge entre I' y D'. Del mismo modo, si el jugador 1 escoge D, se llega a otro nodo de decisión del jugador 2, donde 2 escoge entre I' y D'. Después de cada una de las decisiones de 2 se llega a un *nodo terminal* (es decir, el juego termina) y se reciben las ganancias indicadas.

Es inmediato extender el árbol de la figura 2.4.1 para representar cualquier juego dinámico con información completa y perfecta, es decir, cualquier juego en el que los jugadores toman sus decisiones uno después del otro, todas las decisiones previas son información del dominio público antes de realizar el siguiente movimiento y las ganancias a los jugadores con cada combinación factible de decisiones son información del dominio público. (Los espacios de acciones continuos, como en el modelo de Stackelberg, o los horizontes infinitos, como en el modelo de Rubinstein, presentan dificultades gráficas pero no conceptuales.) Derivamos seguidamente la representación en forma normal del juego de la figura 2.4.1. Concluimos por último esta sección demostrando que los juegos estáticos pueden representarse en forma extensiva y describiendo cómo representar en forma extensiva los juegos dinámicos con información completa pero imperfecta.

Tal como parecen indicar las convenciones sobre numeración en las definiciones de las formas normal y extensiva, existe una íntima relación entre las estrategias factibles de un jugador (apartado 2) dadas en la forma normal y la descripción de cuándo decide un jugador, qué puede hacer y qué sabe (apartados 2a, 2b, 2c) en la forma extensiva. Para representar un juego dinámico en forma normal, necesitamos traducir la información en forma extensiva en términos de la descripción del espacio de estrategias de cada jugador en la forma normal. Para hacer esto, recordemos la definición de estrategia dada (formalmente) en la sección 2.3.B:

Definición. *Una **estrategia** de un jugador es un plan de acción completo, es decir, especifica una acción factible del jugador en cada contingencia en la que al jugador le pudiera corresponder actuar.*

Puede parecer innecesario exigir que la estrategia de un jugador especifique una acción factible para cada contingencia en la que al jugador pudiera corresponderle decidir. Resulta claro, sin embargo, que no podríamos aplicar la noción de equilibrio de Nash a los juegos dinámicos con información completa si permitiéramos que las estrategias de un jugador dejaran sin especificar sus acciones en algunas contingencias. Para que el jugador j calcule una mejor respuesta a la estrategia del jugador i, puede que j necesite considerar cómo actuaría i en todas y cada una de las contingencias, no sólo en las contingencias que i o j creen que es posible que se den.

En el juego de la figura 2.4.1, el jugador 2 puede tomar dos acciones, pero posee cuatro estrategias, puesto que hay dos contingencias diferentes (concretamente, después de observar que el jugador 1 escoge I y después de observar que el jugador 1 escoge D) en las que podría corresponder actuar al jugador 2.

Estrategia 1: Si el jugador 1 juega I, entonces jugar I'; si el jugador 1 juega D, entonces jugar I', lo que denotamos por (I',I').
Estrategia 2: Si el jugador 1 juega I, entonces jugar I'; si el jugador 1 juega D, entonces jugar D', lo que denotamos por (I',D').
Estrategia 3: Si el jugador 1 juega I, entonces jugar D'; si el jugador 1 juega D, entonces jugar I', lo que denotamos por (D',I').
Estrategia 4: Si el jugador 1 juega I, entonces jugar D'; si el jugador 1 juega D, entonces jugar D', lo que denotamos por (D',D').

El jugador 1, sin embargo, tiene dos acciones pero sólo dos estrategias: jugar I y jugar D. La razón por la cual el jugador 1 sólo tiene dos estrategias es que sólo hay una contingencia en la que pudiera corresponder jugar al jugador 1 (concretamente, la primera jugada, que corresponde al jugador 1), de forma que el espacio de estrategias del jugador 1 es equivalente al espacio de acciones $A_1 = \{I,D\}$.

		Jugador 2			
		(I',I')	(I',D')	(D',I')	(D',D')
Jugador 1	I	3,1	3,1	1,2	1,2
	D	2,1	0,0	2,1	0,0

Figura 2.4.2

Dados estos espacios de estrategias de los dos jugadores, es inmediato derivar la representación en forma normal del juego a partir de su representación en forma extensiva. Denominemos las filas de la forma normal de acuerdo con las estrategias factibles del jugador 1 y las columnas de acuerdo con las estrategias factibles del jugador 2, y calculemos las ganancias a los jugadores en cada combinación posible de estrategias, como se indica en la figura 2.4.2.

Una vez mostrado que un juego dinámico puede representarse en forma normal, pasemos seguidamente a demostrar cómo un juego estático (es decir, de decisiones simultáneas) puede representarse en forma extensiva. Para ello, nos basamos en la observación hecha en la sección 1.1.A (en conexión con el dilema de los presos) de que no es necesario que los jugadores actúen simultáneamente: es suficiente con que cada uno escoja una estrategia sin conocer la decisión del otro, como sería el caso en el dilema de los presos si los presos tomaran sus decisiones en celdas separadas. Por tanto, podemos representar un juego de (digamos) decisiones simultáneas entre los jugadores 1 y 2 como sigue:

1. El jugador 1 escoge una acción a_1 del conjunto factible A_1.
2. El jugador 2 no observa la decisión del jugador 1, pero escoge una acción a_2 del conjunto factible A_2.
3. Las ganancias son $u_1(a_1,a_2)$ y $u_2(a_1,a_2)$.

Alternativamente, el jugador 2 podría jugar primero y el jugador 1 podría decidir sin obervar la acción de 2. Recordemos que en la sección 2.1.B demostramos que un juego consiste en escoger cantidades con esta forma temporal y estructura informativa difiere significativamente del juego de Stackelberg, que tiene la misma forma temporal pero una estructura informativa tal que la empresa 2 observa la decisión de la empresa 1. Hemos visto que el juego de decisiones sucesivas y acción del contrario no observada tiene el mismo equilibrio de Nash que el juego de Cournot de decisión simultánea.

Parà representar este tipo de ignorancia sobre los movimientos anteriores en un juego en forma extensiva, introducimos la noción de *conjunto de información* de un jugador.

Definición. *Un **conjunto de información** de un jugador es una colección de nodos de decisión que satisface:*

(i) al jugador le corresponde jugar en cada nodo del conjunto de información y
(ii) cuando en el transcurso del juego se llega a un nodo del conjunto de infor-

mación, el jugador al que le corresponde decidir no sabe a qué nodo dentro del conjunto de información se ha (o no se ha) llegado.

La parte (ii) de esta definición significa que, en un conjunto de información, el jugador debe tener el mismo conjunto de acciones factibles en cada nodo de decisión; en caso contrario el jugador sería capaz de inferir a partir del conjunto de acciones disponibles si ha llegado o no ha llegado a cierto(s) nodo(s).

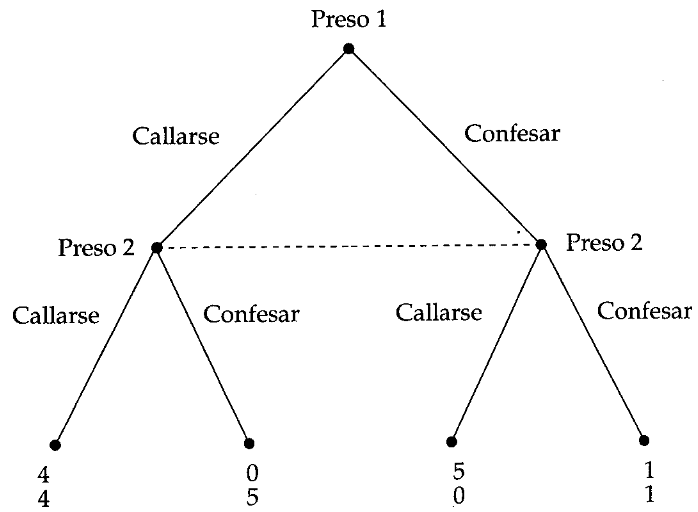


Figura 2.4.3

En un juego en forma extensiva, indicaremos que una colección de nodos de decisión constituye un conjunto de información con una línea discontinua, como en la representación en forma extensiva del dilema de los presos de la figura 2.4.3. Indicaremos a veces a qué jugador le corresponde mover en los nodos del conjunto de información por medio de una leyenda, como en la figura 2.4.3; alternativamente, podemos simplemente dar nombre a la línea discontinua que une esos nodos, como en la figura 2.4.4. La interpretación del conjunto de información del preso 2 en la figura 2.4.3 es que cuando al preso 2 le corresponde decidir, todo lo que sabe es que se ha llegado al conjunto de información (es decir, que el preso 1 ha decidido), pero no a qué nodo se ha llegado (es decir, lo que ha hecho). Veremos en el capítulo 4 que el preso 2 puede tener una opinión de lo que el preso 1 ha hecho, incluso sin haberlo observado, pero ignoraremos esta cuestión hasta entonces.

Como segundo ejemplo del uso de un conjunto de información para representar la ignorancia de las jugadas anteriores, consideremos el siguiente juego dinámico con información completa pero imperfecta:

1. El jugador 1 escoge una acción a_1 del conjunto factible $A_1 = \{I,D\}$.
2. El jugador 2 observa a_1 y escoge a continuación una acción a_2 del conjunto factible $A_2 = \{I',D'\}$.
3. El jugador 3 observa si $(a_1,a_2) = \{D,D'\}$ o no y escoge a continuación una acción a_3 del conjunto factible $A_3 = \{I'',D''\}$.

La representación en forma extensiva de este juego (ignoramos las ganancias para simplificar) aparece en la figura 2.4.4. En esta forma extensiva, el jugador 3 tiene dos conjuntos de información: uno con un único elemento que sigue a D por parte del jugador 1 y D' por parte del jugador 2 y otro con más de un elemento que incluye los demás nodos en los que le corresponde decidir al jugador 3. Por tanto, todo lo que el jugador 3 observa es si $(a_1,a_2) = \{D,D'\}$ o no.

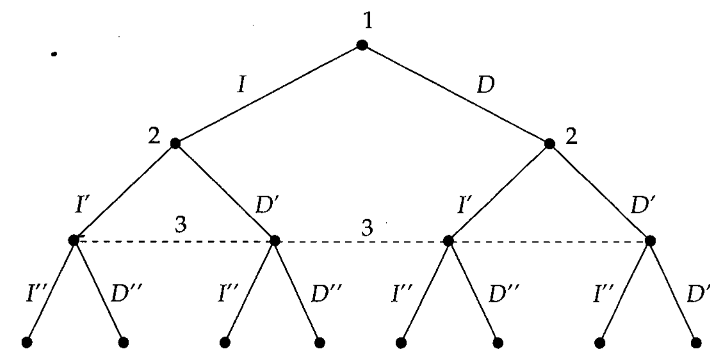


Figura 2.4.4

Ahora que hemos definido la noción de conjunto de información, podemos ofrecer una definición alternativa de la distinción entre información perfecta e imperfecta. Definimos previamente la información perfecta diciendo que en cada jugada, el jugador al que le corresponde jugar conoce toda la historia del juego hasta ese momento. Una definición equivalente es que cada conjunto de información contiene un único elemento. Por el contrario, la información imperfecta significa que existe al menos un conjunto de información con más de un elemento.[19] Por tanto, la representación en forma extensiva de un juego de decisiones simultáneas (como el dilema de los presos) es un juego con información imperfecta. De forma similar, los juegos en dos etapas estudiados en la sección 2.2.A poseen información imperfecta porque las decisiones de los jugadores 1 y 2 son simultáneas, como también lo son las decisiones de los jugadores 3 y 4. De forma más general, un juego dinámico con información completa pero imperfecta puede representarse en forma extensiva utilizando conjuntos de información con más de un elemento para indicar lo que cada jugador sabe (y no sabe) cuando le corresponde jugar, tal como hemos hecho en la figura 2.4.4.

2.4.B Equilibrio de Nash perfecto en subjuegos

En la sección 2.3.B dimos la definición general del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Sin embargo, aplicamos la definición sólo a juegos repetidos porque definimos los conceptos de estrategia y subjuego sólo para los juegos repetidos. En la sección 2.4.A dimos la definición general de estrategia. Presentamos ahora la definición general de subjuego, después de lo cual podremos aplicar la definición de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos a los juegos dinámicos con información completa en general.

Recordemos que en la sección 2.3.B definimos informalmente un subjuego como la parte del juego que queda por jugar empezando en cualquier momento en el que la historia completa del juego hasta entonces sea información del dominio público entre todos los jugadores, y dimos una definición formal en el caso de los juegos repetidos que entonces estábamos considerando. Ofrecemos ahora una definición formal para juegos dinámicos con información completa en general, en términos de la representación en forma extensiva del juego.

Definición. *Un **subjuego** en un juego en forma extensiva*

[19] Esta caracterización de la información perfecta e imperfecta en términos de conjuntos de información con uno o más elementos está restringida a los juegos con información completa porque, como veremos en el capítulo 4, la representación en forma extensiva de un juego con información perfecta pero incompleta tiene un conjunto de información con más de un elemento. En este capítulo, sin embargo, restringimos nuestra atención a la información completa.

(*a*) *empieza en un nodo de decisión n que sea un conjunto de información con un único elemento (pero que no sea el primer nodo de decisión del juego),*

(*b*) *incluye todos los nodos de decisión y terminales que siguen a n en el árbol (pero no los nodos que no siguen a n) y*

(*c*) *no intersecta a ningún conjunto de información (es decir, si un nodo de decisión n′ sigue a n en el árbol, todos los otros nodos en el conjunto de información que contiene a n′ deben también seguir a n y, por tanto, deben incluirse en el subjuego).*

Debido al comentario entre paréntesis de la parte (a), no contamos el juego completo como un subjuego, pero esto es sólo una cuestión de estilo: eliminar ese comentario entre paréntesis de la definición no tendría ningún efecto.

Podemos utilizar el juego de la figura 2.4.1 y el dilema de los presos de la figura 2.4.3 para ilustrar las partes (a) y (b) de esta definición. En la figura 2.4.1 hay dos subjuegos, que empiezan en cada uno de los nodos de decisión del jugador 2. En el dilema de los presos (o cualquier otro juego de decisión simultánea) no hay subjuegos. Para ilustrar la parte (c) de la definición, consideremos el juego de la figura 2.4.4. Sólo hay un subjuego, el que empieza en el nodo de decisión del jugador 3 que sigue a D por parte del jugador 1 y D' por parte del jugador 2. Debido a la parte (c), en este juego ningún subjuego empieza en ninguno de los nodos de decisión del jugador 2 , aun cuando estos dos nodos son conjuntos de información de un único elemento.

Una manera de motivar la parte (c) consiste en afirmar que queremos poder analizar un subjuego por sí mismo y que queremos que el análisis sea relevante para el juego completo. En la figura 2.4.4, si intentáramos definir un subjuego que empezara en el nodo de decisión del jugador 2 que sigue a la decisión I del jugador 1, estaríamos creando un subjuego en el que el jugador 3 ignora la decisión del jugador 2 pero conoce la decisión del jugador 1. Tal subjuego no sería relevante para el juego completo porque en este último el jugador 3 no conoce la jugada de 1, sino que tan sólo observa si $(a_1,a_2) = \{D,D'\}$ o no. Recordemos el argumento parecido por el que el t-ésimo juego de etapa de un juego repetido no es en sí mismo un subjuego del juego repetido, suponiendo en el caso finito que $t < T$.

Otra manera de motivar la parte (c) es dándonos cuenta de que la parte (a) sólo garantiza que el jugador al que le corresponde jugar en el nodo n conoce la historia completa del juego hasta ese momento, no que los demás jugadores también conozcan la historia. La parte (c) garantiza que la historia completa del juego hasta ese momento sea información del dominio público en el siguiente sentido: en cualquier nodo que sigue a n, digamos n', el jugador al que le corresponde decidir en n' sabe que el juego llegó al nodo n. Por tanto, incluso si n' pertenece a un conjunto de información con más de un elemento, todos los nodos en ese conjunto de información siguen a n, de forma que el jugador al que le corresponde decidir en ese conjunto de información sabe que el juego ha llegado a un nodo que sigue a n. (Si las dos últimas afirmaciones parecen difíciles es en parte porque la representación en forma extensiva de un juego especifica lo que el jugador i sabe en cada uno de sus nodos de decisión, pero no hace explícito lo que el jugador i sabe en los nodos de decisión de j.) Como se ha descrito anteriormente, la figura 2.4.4 ofrece un ejemplo de cómo podría no cumplirse la parte (c). Podemos ahora reinterpretar este ejemplo: si caracterizásemos (informalmente) lo que el jugador 3 sabe en el nodo de decisión del jugador 2 que sigue a la decisión I por parte del jugador 1, diríamos que 3 no conoce la historia del juego hasta ese momento, ya que 3 tiene otros nodos de decisión en los que 3 no sabe si 1 jugó I o D.

Dada la definición general de subjuego, podemos ahora aplicar la definición de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de la sección 2.3.B.

Definición. (Selten 1965): *Un equilibrio de Nash es **perfecto en subjuegos** si las estrategias de los jugadores constituyen un equilibrio de Nash en cada subjuego.*

Es inmediato demostrar que cualquier juego dinámico finito con información completa (es decir, cualquier juego dinámico en el que un número finito de jugadores tiene un conjunto de estrategias factibles finito) tiene un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, posiblemente con estrategias mixtas. El argumento procede por construcción, utilizando un procedimiento parecido a la inducción hacia atrás, y está basado en dos observaciones. Primero, aunque presentamos el teorema de Nash en el contexto de juegos estáticos con información completa, éste se extiende a todo juego finito en forma normal con información completa, y hemos visto que estos juegos pueden ser estáticos o dinámicos. En segundo lugar, un juego dinámico finito con información completa tiene un número finito de subjuegos, cada uno de los cuales cumple las hipótesis del teorema de Nash.[20]

[20] Para construir un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, identifiquemos primero todos los subjuegos menores que contienen nodos terminales en el árbol del juego original (donde un subjuego es un subjuego menor si no contiene más subjuegos). Sustituyamos entonces cada uno de estos subjuegos por las ganancias de uno de sus equilibrios de Nash. Pensemos ahora en los nodos iniciales de estos subjuegos como los nodos terminales en una versión truncada del juego original. Identifiquemos todos los subjuegos menores de este juego truncado que contengan estos nodos terminales y sustituyamos cada uno de estos subjuegos con las ganancias de uno de sus equilibrios de Nash. Procediendo de esta forma hacia atrás a lo largo del árbol, se obtiene un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, porque las estrategias de los jugadores constituyen un equilibrio de Nash (de hecho, un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos) en cada subjuego.

Hemos encontrado ya dos ideas íntimamente ligadas al equilibrio de Nash perfecto en subjuegos: el resultado por inducción hacia atrás definido en la sección 2.1.A y el resultado perfecto en subjuegos definido en la sección 2.2.A. En términos informales, la diferencia es que un equilibrio es una colección de estrategias (y una estrategia es un plan completo de acción), mientras que un resultado describe lo que pasará sólo en las contingencias que se espera que se den, no en cada posible contingencia. Para ser más precisos sobre esta diferencia entre equilibrio y resultado, y para ilustrar la noción de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, reconsideramos ahora los juegos definidos en las secciones 2.1.A y 2.2.A.

Definición. *En el juego en dos etapas con información completa y perfecta definido en la sección 2.1.A, el resultado por inducción hacia atrás es $(a_1^*, R_2(a_1^*))$ pero el **equilibrio de Nash perfecto en subjuegos** es $(a_1^*, R_2(a_1))$.*

En este juego, la acción a_1^* es una estrategia del jugador 1 porque sólo hay una contingencia en la que le puede corresponder actuar, el principio del juego. Sin embargo, del jugador 2, $R_2(a_1^*)$ es una acción (concretamente la mejor respuesta de 2 a a_1^*) pero no una estrategia, porque una estrategia para el jugador 2 debe especificar la acción que 2 tomará después de cualquier posible decisión de 1 en la primera ronda. La función de mejor respuesta $R_2(a_1)$, por otro lado, es una estrategia del jugador 2. En este juego, los subjuegos empiezan (y terminan) con el movimiento del jugador 2 en la segunda etapa. Hay un subjuego para cada acción factible, a_1 en A_1, del jugador 1. Para demostrar que $(a_1^*, R_2(a_1))$ es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, debemos por tanto demostrar que $(a_1^*, R_2(a_1))$ es un equilibrio de Nash y que las estrategias de los jugadores constituyen un equilibrio de Nash en cada uno de estos subjuegos. Como los subjuegos no son más que problemas de decisión unipersonales, se trata de exigir que la decisión del jugador 2 sea óptima en cada subjuego, que es exactamente el problema que la función de mejor respuesta, $R_2(a_1)$, soluciona. Finalmente, $(a_1^*, R_2(a_1))$ es un equilibrio de Nash porque las estrategias de los jugadores son mejor respuesta la una a la otra: a_1^* es una mejor respuesta a $R_2(a_1)$, es decir, a_1^* maximiza $u_1(a_1, R_2(a_1))$, y $R_2(a_1)$ es una mejor respuesta a a_1^*, es decir, $R_2(a_1^*)$ maximiza $u_2(a_1^*, a_2)$.

Los argumentos son análogos para los juegos considerados en la sección 2.2.A, de forma que nos ahorramos los detalles.

Definición. *En el juego en dos etapas con información completa pero imperfecta definido en la sección 2.2.A, el resultado perfecto en subjuegos es* $(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*))$, *pero el* ***equilibrio de Nash perfecto en subjuegos*** *es* $(a_1^*, a_2^*, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$.

En este juego, el par de acciones $(a_3^*(a_1^*, a_2^*), a_4^*(a_1^*, a_2^*))$ es el equilibrio de Nash del subjuego que juegan por separado los jugadores 3 y 4 (concretamente, el juego que queda después de que los jugadores 1 y 2 escogen (a_1^*, a_2^*)), mientras que $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$ es una estrategia del jugador 3 y una estrategia para el jugador 4, es decir unos planes de acción completos que describen una respuesta a cada par de movimientos factibles de los jugadores 1 y 2. En este juego, los subjuegos consisten en la interacción en la segunda etapa entre los jugadores 3 y 4, dadas las acciones tomadas por los jugadores 1 y 2 en la primera ronda. Tal y como exige el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos, el par de estrategias $(a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2))$ especifica un equilibrio de Nash en cada uno de esto subjuegos.

Concluimos esta sección (y este capítulo) con un ejemplo que ilustra el tema principal del capítulo: la perfección en los subjuegos elimina los equilibrios de Nash que se basan en promesas o amenazas que no son creíbles. Recordemos el juego en forma extensiva de la figura 2.4.1. Si hubiéramos encontrado este juego en la sección 2.1.A, lo habríamos resuelto por inducción hacia atrás del siguiente modo: si el jugador 2 alcanza el nodo de decisión que sigue a la decisión I del jugador 1, la mejor respuesta de 2 es jugar D' (lo que proporciona una ganancia de 2) en vez de jugar I' (que proporciona una ganancia de 1). Si 2 alcanza el nodo de decisión que sigue a la decisión D del jugador 1, la mejor respuesta de 2 es jugar I' (lo que proporciona una ganancia de 1) en vez de jugar D' (que proporciona una ganancia de 0). Dado que el jugador 1 puede resolver el problema del jugador 2 tanto como el propio jugador 2, el problema de 1 en la primera ronda se concreta en escoger entre I (que conduce a una ganancia de 1 por parte del jugador 1 después de que 2 juege D')

y D (que conduce a una ganancia de 2 por parte del jugador 1 después de que 2 juege I'). Por tanto, la mejor respuesta de 1 al comportamiento previsto del jugador 2 es jugar D en la primera etapa, de forma que el resultado por inducción hacia atrás del juego es (D, I'), como se indica con la trayectoria en negrita que empieza en el nodo de decisión del jugador 1 en la figura 2.4.5. Hay una trayectoria en negrita adicional que emana del nodo de decisión del jugador 2 que sigue a la decisión I del jugador 1. Esta trayectoria parcial a lo largo del árbol indica que el jugador 2 habría escogido D' si se hubiera llegado a ese nodo de decisión.

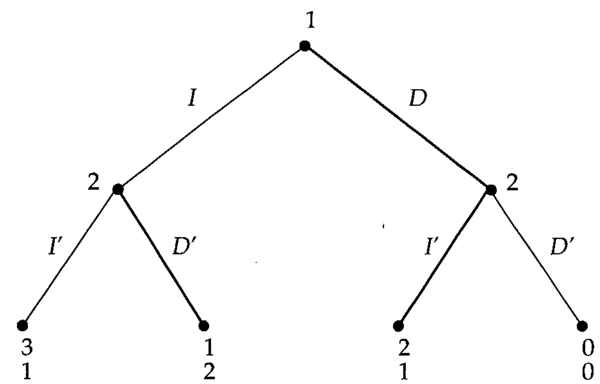


Figura 2.4.5

Recordemos que la representación en forma normal de este juego se dio en la figura 2.4.2. Si hubiéramos encontrado este juego en forma normal en la sección 1.1.C, habríamos hallado sus equilibrios de Nash (con estrategias puras). Éstos son $(D, (D', I'))$ e $(I, (D', D'))$. Podemos ahora comparar estos equilibrios de Nash en el juego en forma normal de la figura 2.4.2 con los resultados del procedimiento por inducción hacia atrás en el juego en forma extensiva de la figura 2.4.5: el equilibrio de Nash $(D, (D', I'))$ en la representación en forma normal corresponde a *todas* las trayectorias en negrita de la figura 2.4.5. En la sección 2.1.A llamamos a (D, I') el *resultado* por inducción hacia atrás del juego. Sería natural llamar a $(D, (D', I'))$ el *equilibrio* de Nash por inducción hacia atrás del juego, pero utilizaremos una terminología más general y lo llamaremos el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. La diferencia entre el resultado y el equilibrio es que el resultado sólo especifica la trayectoria en negrita que empieza en el primer nodo de decisión del juego y acaba en un nodo terminal, mientras que el equilibrio también especifica la trayectoria en negrita adicional que emana del nodo de decisión del jugador 2 que sigue a la decisión I del jugador 1. Es decir, el equilibrio especifica una estrategia completa del jugador 2.

Pero, ¿qué pasa con el otro equilibrio de Nash, $(I,(D',D'))$? En este equilibrio, la estrategia del jugador 2 es jugar D' no sólo si el jugador 1 escoge I (como también ocurría en el primer equilibrio) sino también si el jugador 1 escoge D. Dado que D' (si sigue a D) conduce a una ganancia de 0 del jugador 1, la mejor respuesta de 1 a esta estrategia por parte del jugador 2 es jugar I, consiguiendo con ello una ganancia de 1 (después de que el jugador 2 escoja D'), que es mejor que 0. Utilizando un lenguaje vago pero sugerente, podría decirse que el jugador 2 está amenazando con jugar D' si el jugador 1 juega D. (Estrictamente hablando, 2 no tiene la oportunidad de llevar a cabo esta amenaza antes de que 1 escoja una acción. Si la tuviera, estaría incluida en la forma extensiva.) Si esta amenaza funciona (es decir, si 1 escoge jugar I), 2 no tiene la oportunidad de llevar a cabo su amenaza. Sin embargo, la amenaza no debería funcionar, ya que no es creíble: si al jugador 2 se le diera la oportunidad de llevarla a cabo (es decir, si el jugador 1 jugara D), 2 decidiría jugar I' antes que D'. De un modo más formal, el equilibrio de Nash $(I,(D',D'))$ no es perfecto en subjuegos, porque las estrategias de los jugadores no constituyen un equilibrio de Nash en uno de los subjuegos. En particular, la elección de D' por parte del jugador 2 no es óptima en el subjuego que empieza (y acaba) en el nodo de decisión del jugador 2 que sigue a la decisión D del jugador 1.

En un juego con información completa y perfecta, la inducción hacia atrás elimina las amenazas que no son creíbles. Dado que cada conjunto de información contiene un único elemento, cada nodo de decisión del árbol representa una contingencia posible en la que podría corresponderle actuar a un jugador. El proceso de moverse hacia atrás a lo largo de la forma extensiva, nodo a nodo, se concreta por tanto en forzar a cada jugador a considerar llevar a cabo todas y cada una de las amenazas que el jugador pudiera hacer. En un juego con información imperfecta, sin embargo, las cosas no son tan sencillas, ya que tales juegos contienen al menos un conjunto de información con más de un elemento. Aquí se podría intentar el mismo enfoque: proceder hacia atrás a lo largo de la forma extensiva y alcanzar eventualmente un nodo de decisión contenido en un conjunto de información con más de un elemento. Pero forzar al jugador a considerar lo que haría si se llegase a ese nodo de decisión *no*

es equivalente a forzar al jugador a considerar una posible contingencia en la que le correspondería jugar, ya que si en el transcurso del juego se llega a ese conjunto de información, el jugador no sabe si se ha llegado a ese nodo de decisión o no, precisamente porque el nodo de decisión está contenido en un conjunto de información con más de un elemento.

Una forma de tratar el problema de los conjuntos de información con más de un elemento cuando se utiliza inducción hacia atrás, es proceder hacia atrás a lo largo de la forma extensiva hasta que se encuentre un conjunto de información con más de un elemento, pero saltándoselo y siguiendo hacia arriba en el árbol hasta encontrar un conjunto de información con un único elemento. Llegados ahí habrá que considerar no sólo lo que el jugador al que le corresponde jugar en ese conjunto de información con un único elemento haría si se alcanzase ese nodo de decisión, sino también la acción que tomaría el jugador al que le corresponde jugar en cada uno de los conjuntos de información con más de un elemento que se han saltado. En términos poco formales, este procedimiento proporciona un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Una segunda manera de tratar el problema es proceder hacia atrás a lo largo de la forma extensiva hasta encontrar un conjunto de información con más de un elemento. Forzar entonces al jugador al que le corresponde jugar en ese conjunto de información a considerar lo que haría de llegarse a ese conjunto de información. (Hacer esto requiere que el jugador tenga una valoración probabilística con respecto a qué nodo se ha llegado en el conjunto de información. Tal valoración dependerá naturalmente de las posibles decisiones de los jugadores que están por encima en el árbol, de forma que una pasada de abajo arriba a lo largo del árbol utilizando este método no puede proporcionar una solución.) En términos informales, este procedimiento proporciona un equilibrio bayesiano perfecto (véase capítulo 4).

2.5 Lecturas adicionales

Sección 2.1: Sobre los salarios y el empleo en empresas con fuerte implantación sindical, véase un modelo de negociación repetida en Espinosa y Rhee (1989; ejercicio 2.10) y un modelo de una única negociación en el que las empresas pueden escoger negociar sobre salarios y empleo o sólo sobre salarios, en Staiger (1991). Sobre la negociación sucesiva, véase un modelo al estilo de Rubinstein de negociación entre una empresa y un sindicato en

Fernández y Glazer (1991), con la característica nueva de que el sindicato debe decidir si convocar o no una huelga después de que el sindicato o la empresa rechacen una oferta. Existen múltiples equilibrios perfectos en subjuegos eficientes que incorporan, a su vez, equilibrios perfectos en subjuegos ineficientes (es decir, que incluyen huelgas), aun cuando haya información completa. El libro de Osborne y Rubinstein (1990) examina muchos modelos de negociación en teoría de juegos, los relaciona con el enfoque axiomático de Nash sobre la negociación y utiliza los modelos de negociación como base de la teoría del mercado.

Sección 2.2: Sobre los pánicos bancarios, véase Jacklin y Bhattacharya (1988). El libro de McMillan (1986) examina las primeras aplicaciones de teoría de juegos a la economía internacional; véase un trabajo más reciente sobre la deuda exterior en Bulow y Rogoff (1989). Sobre los torneos, consúltese un modelo en el que los trabajadores pueden tanto aumentar su producción como sabotear la de los demás, en Lazear (1989; ejercicio 2.8). Véase en Rosen (1986) el tema de los premios necesarios para mantener los incentivos en una sucesión de torneos en los que los perdedores en una etapa no pasan a la siguiente.

Sección 2.3: Benoit y Krishna (1985) analizan juegos repetidos finitos. Sobre la renegociación en los juegos repetidos finitos, consúltese Benoit y Krishna (1989), y en los juegos repetidos infinitos véase el artículo panorámico de Farrell y Maskin (1989). Tirole (1988, capítulo 6) examina modelos dinámicos de oligopolio. El libro de Akerlof y Yellen (1986) recoge algunos de los trabajos más importantes sobre salarios de eficiencia y ofrece una introducción integradora. Sobre política monetaria, véase en Ball (1990) un resumen de los hechos estilizados, una revisión de los modelos existentes y un modelo que explica la trayectoria temporal de la inflación.

Sección 2.4: Véase un tratamiento formal de los juegos en forma extensiva en Kreps y Wilson (1982), y un enfoque más verbal en Kreps (1990, capítulo 11).

2.6 Ejercicios

2.1 Supongamos que un padre y un hijo participan en el siguiente juego, analizado originalmente por Becker (1974). Primero el hijo toma una acción, A, que resulta en un ingreso para él, $I_H(A)$, y en un ingreso para el padre, $I_P(A)$. (Pensemos en $I_H(A)$ como el ingreso del hijo, neto de cualquier coste de la acción A.) En segundo lugar, el padre observa los ingresos I_A e I_P y escoge una herencia, B, que dejar al hijo. La ganancia del hijo es $U(I_H + B)$; la del padre es $V(I_P - B) + kU(I_H + B)$, donde $k > 0$ refleja la preocupación del padre por el bienestar del hijo. Supongamos que la acción es un número no negativo, $A \geq 0$, que las funciones de ingreso $I_H(A)$ e $I_P(A)$ son estrictamente cóncavas y tienen un máximo en $A_H > 0$ y $A_P > 0$ respectivamente, que la herencia B puede ser positiva o negativa y que las funciones de utilidad U y V son crecientes y estrictamente cóncavas. Demuéstrese el teorema del "niño mimado": en el resultado por inducción hacia atrás, el hijo escoge la acción que maximiza el ingreso agregado de la familia $I_H(A) + I_P(A)$, a pesar de que sólo la función de ganancias del padre es de alguna forma altruista.

2.2 Supongamos ahora que padre e hijo juegan un juego diferente, analizado originalmente por Buchanan (1975). Los ingresos I_H e I_P están fijados exógenamente. Primero, el hijo decide qué parte del ingreso I_H ahorrará (S) para el futuro, consumiendo el resto ($I_H - S$) hoy. En segundo lugar, el padre observa la elección de S por parte del hijo y escoge una herencia, B. La ganancia del hijo es la suma de las utilidades presente y futura: $U_1(I_H - S) + U_2(S + B)$. La ganancia del padre es $V(I_P - B) + k[U_1(I_H - S) + U_2(S + B)]$. Supongamos que las funciones de utilidad U_1, U_2, y V son crecientes y estrictamente cóncavas. Demuéstrese que hay un "dilema del samaritano": en el resultado por inducción hacia atrás, el hijo ahorra demasiado poco, para inducir al padre a dejarle una herencia mayor (es decir, tanto las ganancias del padre como las del hijo podrían aumentar si S fuera convenientemente más alto y B convenientemente más bajo).

2.3 Supongamos que los jugadores en el juego de la negociación con horizonte infinito de Rubinstein tienen factores de descuento diferentes: δ_1 corresponde al jugador 1 y δ_2 al jugador 2. Adóptese el argumento dado en el texto para demostrar que en el resultado por inducción hacia atrás, el jugador 1 ofrece el acuerdo

$$\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right)$$

al jugador 2, quien lo acepta.

2.4 A dos socios les gustaría completar un proyecto. Cada socio recibe la ganancia V una vez el proyecto ha sido completado, pero ninguno de ellos recibe ganancia alguna antes de que el proyecto se haya podido terminar. El coste que queda hasta que el proyecto se complete es R. Ninguno de los socios puede comprometerse a hacer aportaciones futuras de cara a completar el proyecto, de forma que deciden establecer el siguiente juego de dos periodos: En el periodo 1 el socio 1 escoge contribuir con c_1 de cara a completar el proyecto. Si esta contribución es suficiente para completar el proyecto, el juego se acaba y cada socio recibe V. Si esta contribución no es suficiente para completar el proyecto (es decir, $c_1 < R$), en el periodo 2 el socio 2 escoge contribuir con c_2 con el fin de completar el proyecto. Si la suma (sin descontar) de las dos contribuciones es suficiente para completar el proyecto, el juego acaba y cada socio recibe V. Si la suma es insuficiente para completar el juego, éste termina y ningún socio recibe nada.

Cada socio debe obtener el dinero con el que contribuye a financiar el proyecto de otras actividades lucrativas. La forma óptima de hacerlo es sacar primero dinero de las alternativas menos rentables. El coste (de oportunidad) que resulta de una contribución es, por tanto, convexo con respecto al tamaño de la contribución. Supongamos que el coste de una contribución c es c^2 para cada socio. Supongamos que el socio 1 descuenta los beneficios del segundo periodo de acuerdo con el factor de descuento δ. Calcúlese el único resultado por inducción hacia atrás de este juego de contribuciones de dos periodos para cada trío de parámetros (V,R,δ); véase el caso con horizonte infinito en Admati y Perry (1991).

2.5 Supongamos que una empresa quiere que un trabajador adquiera la preparación necesaria para desarrollar una determinada tarea, pero dicha tarea es tan inconcreta que ningún tribunal podría verificar si el trabajador ha adquirido o no la preparación necesaria. (Por ejemplo, la empresa podría pedir al trabajador que se familiarizase con "nuestra forma de hacer las cosas", o se hiciera un experto en "este nuevo mercado en el que podríamos entrar".) La empresa, por tanto, no puede firmar un contrato para reembolsar al trabajador el coste de esta preparación: incluso si el trabajador adquiere esta preparación, la empresa puede decir que el trabajador no lo ha hecho, y ningún tribunal podría decidir quién tiene razón. Del mismo modo, el trabajador no puede firmar un contrato para adquirir esta preparación si se le ha pagado por adelantado.

La empresa podría utilizar, como incentivo para que el trabajador adquiera la preparación, promesas (creíbles) de ascenso de la siguiente forma. Supongamos que hay dos trabajos en la empresa, uno fácil (E) y otro difícil (D), y que la preparación es útil en los dos empleos, pero más en el difícil: $y_{D0} < y_{E0} < y_{ES} < y_{DS}$, donde y_{ij} es lo que el trabajador produce en el trabajo i (= E o D) cuando el trabajador tiene un nivel de preparación de j (= 0 o S). Supongamos que la empresa puede comprometerse a pagar salarios diferentes en los dos empleos, w_E y w_D, pero ninguno de estos dos salarios puede ser menor que el salario alternativo del trabajador, que normalizamos a cero.

El desarrollo temporal del juego es el siguiente: En el momento 0 la empresa escoge w_E y w_D y el trabajador observa estos salarios. En el momento 1 el trabajador entra a formar parte de la empresa y puede adquirir el nivel de preparación S a un coste C. (Ignoramos la producción y los salarios en el primer periodo. Puesto que el trabajador no ha adquirido aún la preparación, lo eficiente es que se le asigne el trabajo E.) Supongamos que $y_{DS} - y_{E0} > C$, de forma que al trabajador le conviene adquirir la preparación. En el momento 2 la empresa observa si el trabajador ha adquirido o no la preparación y decide entonces si concederle el ascenso al trabajo D o no durante el segundo (y último) periodo de empleo del trabajador.

Los beneficios de la empresa en el segundo periodo son $y_{ij} - w_i$, donde el trabajador realiza el trabajo i y tiene un nivel de preparación j. La ganancia del trabajador por realizar el trabajo i en el segundo periodo es w_i o $w_i - C$, dependiendo de si el trabajador se ha preparado o no en el primer periodo. Hállese el resultado por inducción hacia atrás. Véase un modelo más complejo en Prendergast (1992).

2.6 Tres oligopolistas operan en un mercado con una demanda inversa dada por $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2 + q_3$ y q_j es la cantidad producida por la empresa j. Cada empresa tiene un coste marginal de producción constante, c, sin costes fijos. Las empresas escogen sus cantidades de la siguiente manera: (1) la empresa 1 escoge $q_1 \geq 0$; (2) las empresas 2 y 3 observan q_1 y escogen entonces simultáneamente q_2 y q_3 respectivamente. ¿Cuál es el resultado perfecto en subjuegos?

2.7 Supongamos que un sindicato representa en su totalidad a la fuerza de trabajo de todas las empresas de un oligopolio, como el Sindicato Unido de Trabajadores del Automóvil en el caso de la General Motors, Ford, Chrysler y otras. Sea la sucesión temporal de las jugadas análoga al modelo de la sección 2.1.C: (1) el sindicato realiza una demanda salarial, w, en *todas* las empresas; (2) las empresas observan (y aceptan) w y las ganancias del sindicato escogen simultáneamente los niveles de empleo, L_i de la empresa i; (3) las ganancias del sindicato son $(w - w_a)L$, donde w_a es el salario que los miembros del sindicato podrían ganar en un empleo alternativo, $L = L_1 + \ldots + L_n$ es el nivel total de empleo en las empresas, y los beneficios de la empresa i son $\pi(w,L_i)$. A continuación se describen los determinantes de los beneficios de dicha empresa: todas las empresas tienen la siguiente función de producción: el nivel de producción es igual al nivel de empleo; $q_i = L_i$. El precio de equilibrio es $P(Q) = a - Q$ cuando la cantidad agregada en el mercado es $Q = q_1 + \ldots + q_n$. Para no complicar las cosas, supongamos que las empresas no tienen más costes que los salariales. ¿Cuál es el resultado perfecto en subjuegos de este juego? ¿Cómo (y por qué) afecta el número de empresas a la utilidad del sindicato en el resultado perfecto en subjuegos?

2.8 Modifiquemos el modelo de torneos de la sección 2.2.D de forma que la producción del trabajador i sea $y_i = e_i - (1/2)s_j + \epsilon_i$, donde $s_j \geq 0$ representa el sabotaje por parte del jugador j, y la desutilidad del esfuerzo (productivo y destructivo) del jugador i es $g(e_i) + g(s_i)$, como en Lazear (1989). Demuéstrese que el premio óptimo $w_A - w_B$ es menor que cuando no hay posibilidad de sabotaje (como en el texto).

2.9 Consideremos dos países. En la fecha 1, ambos países tienen aranceles tan altos que no hay comercio entre ellos. Dentro de cada país, los salarios y el nivel de empleo se determinan como en el modelo de monopolio y sindicato de la sección 2.1.C. En la fecha 2, todos los aranceles desaparecen, ahora cada sindicato fija el salario en su país, pero cada empresa produce para los dos mercados.

Supongamos que en cada país la demanda inversa es $P(Q) = a - Q$, donde Q es la cantidad agregada en el mercado de ese país. Sea $q = L$ la función de producción de cada empresa, de forma que los salarios son el único coste de la empresa, y sea $U(w,L) = (w - w_0)L$ la función de utilidad del sindicato, donde w_0 es un salario alternativo para los trabajadores. Calcúlese el resultado por inducción hacia atrás en la fecha 1.

Considérese ahora el siguiente juego en la fecha 2. Primero, los dos sindicatos escogen simultáneamente los salarios, w_1 y w_2. Las empresas observan los salarios y escogen los niveles de producción para los mercados interior y exterior, que denotamos mediante h_i y e_i en el caso de la empresa del país i. Toda la producción de la empresa se realiza en su propio país, de forma que el coste total es $w_i(h_i + e_i)$. Calcúlese el resultado perfecto en subjuegos. Demuéstrese que los salarios, nivel de empleo y beneficios (y, por tanto, también la utilidad del sindicato y el excedente del consumidor) aumentan cuando los aranceles desaparecen. Véase otros ejemplos en la misma línea, en Huizinga (1989).

2.10 El juego de decisión simultánea que a continuación se describe se juega dos veces, habiéndose observado el resultado de la primera etapa antes de que empiece la segunda. No hay descuento. La variable x es mayor que 4, de forma que (4, 4) no es una ganancia de equilibrio del juego jugado una sola vez. ¿Para qué valores de x es la siguiente estrategia (jugada por ambos jugadores) un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

Jugar Q_i en la primera etapa. Si el resultado de la primera etapa es (Q_1,Q_2), jugar P_i en la segunda etapa. Si el resultado de la primera etapa es (y,Q_2) donde $y \neq Q_1$, jugar R_i en la segunda etapa. Si el resultado de la primera etapa es (Q_1,z) donde $z \neq Q_2$, jugar S_i en la segunda etapa. Si el resultado de la primera etapa es (y,z) donde $y \neq Q_1$ y $z \neq Q_2$, jugar P_i en la segunda etapa.

	P_2	Q_2	R_2	S_2
P_1	2,2	x,0	−1,0	0,0
Q_1	0,x	4,4	−1,0	0,0
R_1	0,0	0,0	0,2	0,0
S_1	0, − 1	0, − 1	−1, − 1	2,0

2.11 El juego de decisión simultánea que a continuación se describe se juega dos veces, habiéndose observado el resultado de la primera etapa antes de que empiece la segunda. No hay descuento. ¿Puede alcanzarse en la primera etapa la ganancia (4, 4) en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos con estrategias puras? En caso afirmativo, especifíquense las estrategias que lo permiten. En caso negativo, demuéstrese por qué no.

	I	C	D
A	3,1	0,0	5,0
M	2,1	1,2	3,1
B	1,2	0,1	4,4

2.12 ¿Qué es una estrategia en un juego repetido? ¿Qué es un subjuego en un juego repetido? ¿Qué es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

2.13 Recuérdese el modelo de duopolio de Bertrand estático (con productos homogéneos) del ejercicio 1.7: las empresas fijan los precios simultáneamente; la demanda del producto de la empresa i es $a - p_i$ si $p_i < p_j$, es 0 si $p_i > p_j$ y es $(a - p_i)/2$ si $p_i = p_j$; los costes marginales son $c < a$. Considérese el juego repetido infinitamente basado en este juego de etapa. Demuéstrese que las empresas pueden utilizar estrategias del disparador (que significan jugar para siempre el equilibrio de Nash del juego de etapa después de cualquier desviación) para mantener el nivel de precios de monopolio de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos si y sólo si $\delta \geq 1/2$.

2.14 Supongamos que la demanda fluctúa de forma aleatoria en el juego de Bertrand repetido infinitamente, descrito en el ejercicio 2.13: en cada periodo, el punto de interacción de la función de demanda con el eje de abcisas es a_A con probabilidad π y a_B $(< a_A)$ con probabilidad $1 - \pi$; las demandas en los diferentes periodos son independientes. Supongamos que en cada periodo el nivel de demanda es revelado a ambas empresas antes de que éstas escojan los precios de ese periodo. ¿Cuáles son los niveles de precios de monopolio (p_A y p_B) para los dos niveles de demanda? Calcúlese δ^*, el menor valor de δ tal que las empresas pueden utilizar estrategias del disparador para mantener estos niveles de precios de monopolio (es decir, jugar p_i cuando la demanda es a_i, para $i = A,B$) en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Para cada valor de δ entre $1/2$ y δ^* hállese el precio máximo $p(\delta)$ tal que las empresas puedan utilizar estrategias del disparador para mantener el precio $p(\delta)$ cuando la demanda es alta y el precio p_B cuando la demanda es baja en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. (Véase Rotemburg y Saloner 1986.)

2.15 Supongamos que hay n empresas en un oligopolio de Cournot. La demanda inversa viene dada por $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + \ldots + q_n$. Consideremos el juego repetido infinitamente basado en este juego de etapa. ¿Cuál es el valor menor de δ tal que las empresas pueden utilizar estrategias del disparador para mantener el nivel de producción de monopolio en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos? ¿Cómo varía la respuesta al cambiar n? ¿Por qué? Si δ es demasiado pequeño para que las empresas utilicen estrategias del disparador para mantener el nivel de producción de monopolio, ¿cuál es el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos simétrico más rentable al que puede llegarse utilizando estrategias del disparador?

2.16 En el modelo de salarios y nivel de empleo analizado en la sección 2.1.C, el resultado por inducción hacia atrás no es socialmente eficiente. En la práctica, sin embargo, una empresa y un sindicato negocian hoy los términos de un contrato por tres años, renegocian al cabo de tres años los términos de un segundo contrato y así sucesivamente. Por tanto, esta relación se puede caracterizar con más o menos exactitud como un juego repetido, como en Espinosa y Rhee (1989).

En este problema se derivan condiciones bajo las cuales un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego repetido infinitamente es superior en el sentido de Pareto al resultado por inducción hacia atrás del juego jugado una sola vez. Denotemos por U^* y π^*, respectivamente, la utilidad del sindicato y los beneficios de la empresa en el resultado por inducción hacia atrás del juego jugado una sola vez. Consideremos un par utilidad-beneficio alternativo (U,π) asociado con un par salario-empleo alternativo (w,L). Supongamos que ambas partes tienen el mismo factor de descuento δ (para cada periodo de tres años). Derívense condiciones sobre (w,L) tales que: (1) (U,π) domine en el sentido de Pareto a (U^*,π^*) y (2) (U,π) sea el resultado de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos del juego repetido infinitamente, donde se juega (U^*,π^*) para siempre después de cualquier desviación.

2.17 Consideremos el siguiente juego con horizonte infinito entre una única empresa y una sucesión de trabajadores, cada uno de los cuales vive durante un periodo del juego. En cada periodo, el trabajador decide si esforzarse y producir por tanto a un nivel y con un coste por el esfuerzo de c, o no esforzarse, no producir nada y no incurrir en ningún coste. Lo que se produzca es propiedad de la empresa, pero ésta puede compartirlo con el trabajador pagándole un salario como se describe a continuación: supongamos que al principio del periodo el trabajador dispone de una oportunidad alternativa con un valor de cero (neto del coste por el esfuerzo) y que no se puede obligar al trabajador a aceptar un salario por debajo de cero. Supongamos también que $y > c$ de forma que esforzarse es eficiente.

Dentro de cada periodo, el desarrollo temporal es el siguiente: primero el trabajador escoge un nivel de esfuerzo, a continuación tanto la empresa como el trabajador observan el nivel de producción y finalmente la empresa escoge un salario para pagar al trabajador. Supongamos que no existe manera de hacer cumplir los contratos salariales: no hay ninguna restricción sobre la elección del salario por parte de la empresa. En el juego de un periodo, sin embargo, perfección en subjuegos implica que la empresa ofrecerá un salario de cero produzca lo que produzca el trabajador, de forma que el trabajador no se esforzará.

Consideremos ahora el problema con horizonte infinito. Recordemos que cada trabajador vive sólo por un periodo. Supongamos, sin embargo, que al principio del periodo t, la historia del juego hasta el periodo $t-1$ es conocida por el trabajador que trabajará en el periodo t. (Pensemos como si esta información se transmitiese de generación a generación entre los trabajadores.) Supongamos que la empresa descuenta el futuro de acuerdo con el factor de descuento δ por periodo. Descríbanse las estrategias de la empresa y de cada trabajador en un equilibrio perfecto en subjuegos del juego con horizonte infinito en las que en equilibrio cada trabajador se esfuerza y produce por tanto a un nivel y, siempre y cuando el factor de descuento sea lo suficientemente alto. Dése una condición necesaria y suficiente para que su equilibrio exista.

2.18 ¿Qué es una estrategia (en un juego arbitrario)? ¿Qué es un conjunto de información? ¿Qué es un subjuego (en un juego arbitrario)?

2.19 En la versión de tres periodos del modelo de la negociación de Rubinstein analizada en la sección 2.1.D, calculamos el resultado por inducción hacia atrás. ¿Cuál es el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

2.20 Consideremos las siguientes estrategias en la versión de horizonte infinito del modelo de la negociación de Rubinstein. (Recordemos la convención notacional de que la oferta $(s,1-s)$ significa que el jugador 1 obtendrá s y el jugador 2 obtendrá $1-s$, independientemente de quien haga la oferta.) Sea $s^* = 1/(1+\delta)$. El jugador 1 siempre ofrece $(s^*,1-s^*)$ y acepta una oferta $(s,1-s)$ sólo si $s \geq \delta s^*$. El jugador 2 siempre ofrece $(1-s^*,s*)$ y acepta una oferta $(s,1-s)$ sólo si $1-s \geq \delta s^*$. Demuéstrese que estas estrategias son un equilibrio de Nash. Demuéstrese que este equilibrio es perfecto en subjuegos.

2.21 Proporciónense las representaciones en forma extensiva y normal del juego de la granada descrito en la sección 2.1. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash en estrategias puras? ¿Cuál es el resultado por inducción hacia atrás? ¿Cuál es el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

2.22 Proporciónense las representaciones en forma extensiva y normal del juego del pánico bancario discutido en la sección 2.2.B. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras?

2.23 Un comprador y un vendedor desearían realizar un intercambio. Antes de hacerlo, el comprador puede efectuar una inversión que aumenta el valor que asigna al objeto a intercambiar. Esta inversión no puede ser observada por el comprador y no afecta el valor que el vendedor asigna al objeto, que normalizamos a cero. (Como ejemplo, pensemos en una empresa que compra otra. En algún momento antes de la fusión, el comprador podría haber actuado en el sentido de cambiar los productos que su empresa planea introducir en el mercado de forma que se complementen después de la fusión con los productos de la empresa comprada. Si el desarrollo de un producto lleva tiempo y el ciclo vital del producto es corto, no hay tiempo suficiente para que el comprador lleve a cabo esta inversión después de la fusión.) Para el comprador el valor inicial del objeto es $v > 0$; una inversión de I aumenta este valor a $v + I$, pero cuesta I^2. El desarrollo temporal del juego es el siguiente: en primer lugar, el comprador escoge un nivel de inversión I e incurre en el coste I^2. En segundo lugar, el comprador no observa I pero ofrece vender el objeto por un precio p. En tercer lugar, el comprador acepta o rechaza la oferta del vendedor: si el comprador acepta, la ganancia del comprador es $v + I - p - I^2$ y la del vendedor es p; si el comprador rechaza, estas ganancias son $-I^2$ y cero respectivamente. Demuéstrese que no existe ningún equilibrio de Nash perfecto en subjuegos con estrategias puras en este juego. Calcúlese el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos con estrategias mixtas en el que la estrategia mixta del comprador sólo asigna probabilidad positiva a dos niveles de inversión y la estrategia mixta del vendedor sólo asigna probabilidad positiva a dos precios.

2.7 Referencias

ABREU, D. 1986. "Extremal Equilibria of Oligopolistic Supergames." *Journal of Economic Theory* 39:191-225.

—. 1988. "On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting." *Econometrica* 56:383-96.

ABREU, D., D. PEARCE, y E. STACCHETTI. 1986. "Optimal Cartel Equilibria with Imperfect Monitoring." *Journal of Economic Theory* 39:251-69.

ADMATI, A., y M. PERRY. 1991. "Joint Projects without Commitment." *Review of Economic Studies* 58:259-76.

AKERLOF, G., y J. YELLEN, eds. 1986. *Efficiency Wage Models of the Labor Market*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

BALL, L. 1990. "Time-Consistent Policy and Persistent Changes in Inflation." National Bureau of Economic Research Working Paper #3529 (December).

BARRO, E., y D. GORDON. 1983. "Rules, Discretion, and Reputation in a Model of Monetary Policy." *Journal of Monetary Economics* 12:101-21.

BECKER, G. 1974. "A Theory of Social Interactions." *Journal of Political Economy* 82:1063-93.

BENOIT, J-P., y V. Krishna. 1985. "Finitely Repeated Games." *Econometrica* 53:905-22.

—. 1989. "Renegotiation in Finitely Repeated Games." Harvard Business School Working Paper #89-004.

BUCHANAN, J. 1975. "The Samaritan's Dilemma." In *Altruism, Morality, and Economic Theory*, E. Phelps, ed. New York: Russell Sage Foundation.

BULOW, J., y K. ROGOFF. 1989. "Sovereign Debt: Is to Forgive to Forget?" *American Economic Review* 79:43- 50.

DIAMOND, D., y P. DYBVIG. 1983. "Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity." *Journal of Political Economy* 91:401-19.

ESPINOSA, M., y C. RHEE. 1989. "Efficient Wage Bargaining as a Repeated Game." *Quarterly Journal of Economics* 104:565-88.

FARRELL, J., y E. MASKIN. 1989. "Renegotiation in Repeated Games." *Games and Economic Behavior* 1:327-60.

FERNÁNDEZ, R., y J. GLAZER. 1991. "Striking for a Bargain Between Two Completely Informed Agents." *American Economic Review* 81:240-52.

FRIEDMAN, J. 1971. "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames." *Review of Economic Studies* 38:1-12.

FUDENBERG, D., y E. MASKIN. 1986. "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting and Incomplete Information." *Econometrica* 54:533-54.

GREEN, E., y R. PORTER. 1984. "Noncooperative Collusion Under Imperfect Price Information." *Econometrica* 52:87-100.

HUIZINGA, H. 1989. "Union Wage Bargaining and Industry Structure." Stanford University, Mimeo.

JACKLIN, C., y S. BHATTACHARYA. 1988. "Distinguishing Panics and Information-based Bank Runs: Welfare and Policy Implications." *Journal of Political Economy* 96:568-92.

KREPS, D. 1990. *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

KREPS, D., y R. WILSON. 1982. "Sequential Equilibrium." *Econometrica* 50:863-94.

LAZEAR, E. 1989. "Pay Equality and Industrial Politics." *Journal of Political Economy* 97:561-80.

LAZEAR, E., y S. ROSEN. 1981. "Rank-Order Tournaments as Optimum Labor Contracts." *Journal of Political Economy* 89:841-64.

LEONTIEF, W. 1946. "The Pure Theory of the Guaranteed Annual Wage Contract." *Journal of Political Economy* 54:76-79.

MCMILLAN, J. 1986. *Game Theory in International Economics*. Chur, Suiza: Harwood Academic Publishers.

OSBORNE, M., y A. RUBINSTEIN. 1990. *Bargaining and Markets*. San Diego: Academic Press.

PRENDERGAST, C. 1992. "The Role of Promotion in Inducing Specific Human Capital Acquisition." De próxima aparición en *Quarterly Journal of Economics*.

ROSEN, S. 1986. "Prizes and Incentives in Elimination Tournaments." *American Economic Review* 76:701-15.

ROTEMBERG, J., y G. SALONER. 1986. "A Supergame-Theoretic Model of Business Cycles and Price Wars during Booms." *American Economic Review* 76:390-407.

RUBINSTEIN, A. 1982. "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model." *Econometrica* 50:97-109.

SELTEN, R. 1965. "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit." *Zeitshcrift für Gesamte Staatswissenschaft* 121:301-24.

SHAKED, A., y J. SUTTON. 1984. "Involuntary Unemployment as a Perfect Equilibrium in a Bargaining Model." *Econometrica* 52:1351-64.

SHAPIRO, C., y J. STIGLITZ. 1984. "Equilibrium Unemployment as a Discipline Device." *American Economic Review* 74:433-44.

SOBEL, J., y J. TAKAHASHI. 1983. "A Multistage Model of Bargaining." *Review of Economic Studies* 50:411- 26.

STACKELBERG, H. VON. 1934. *Marktform und Gleichgewicht*. Viena: Julius Springer.

STAIGER, D. 1991. "Why Do Union Contracts Exclude Employment?" Stanford University, Mimeo.

TIROLE, J. 1988. *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge: MIT Press.

3. JUEGOS ESTÁTICOS CON INFORMACIÓN INCOMPLETA

Con este capítulo comienza nuestro estudio de los juegos con *información incompleta*, también llamados *juegos bayesianos*. Recordemos que en un juego con información completa las funciones de ganancias de los jugadores son información del dominio público. Por el contrario, en un juego con información incompleta, al menos un jugador no está seguro de la función de ganancias de otro jugador. Un ejemplo común de un juego estático con información incompleta es una subasta de sobre cerrado: cada participante conoce su propia valoración del bien subastado, pero no conoce las valoraciones de los otros participantes, y las pujas se entregan en sobres cerrados, por lo que las decisiones de los jugadores pueden considerarse simultáneas. Sin embargo, la mayoría de los juegos bayesianos con interés económico son dinámicos. Como veremos en el capítulo 4, la existencia de información privada conduce de forma natural a que las partes informadas intenten comunicar (o a confundirlos), y que las partes no informadas intenten conseguir información. Estas cuestiones son intrínsecamente dinámicas.

En la sección 3.1, definimos la representación en forma normal de un juego bayesiano estático y el equilibrio bayesiano de Nash en dicho juego. Puesto que estas definiciones son abstractas y algo complejas, introduciremos las ideas principales con un ejemplo sencillo, el de la competencia a la Cournot bajo información asimétrica.

En la sección 3.2 consideramos tres aplicaciones. En primer lugar, ofrecemos una discusión formal de la interpretación de las estrategias mixtas dada en el capítulo 1: la estrategia mixta del jugador j representa la incertidumbre del jugador i con respecto a la estrategia pura que elegirá j, y la elección de j depende de una cierta información privada. En segundo lugar, analizamos una subasta de sobre cerrado en la que las valoraciones de los participantes son información privada, mientras que la valoración del vendedor es conocida. Finalmente, consideramos el caso en el que un comprador y un vendedor tienen, cada uno de ellos, información privada sobre sus valoraciones (como cuando una empresa conoce el producto marginal de un trabajador y el trabajador conoce las oportunidades alternativas de que dispone). Analizamos un juego de intercambio llamado subasta doble: el vendedor anuncia un precio de venta y el comprador anuncia simultáneamente un precio de compra; el intercambio tiene lugar al precio medio si el último es mayor que el primero.

En la sección 3.3 enunciamos y demostramos el *Principio de revelación*, e indicamos brevemente cómo puede aplicarse al diseño de juegos cuando los jugadores tienen información privada.

3.1 Teoría: Juegos bayesianos estáticos y equilibrio bayesiano de Nash

3.1.A Un ejemplo: Competencia a la Cournot bajo información asimétrica

Consideremos un modelo de duopolio de Cournot con demanda inversa dada por $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$ es la cantidad agregada en el mercado. La función de costes de la empresa 1 es $C_1(q_1) = cq_1$. Sin embargo, la función de costes de la empresa 2 es $C_2(q_2) = c_A q_2$ con probabilidad θ y $C_2(q_2) = c_B q_2$ con probabilidad $1-\theta$, donde $c_B < c_A$. Además, la información es asimétrica: la empresa 2 conoce su función de costes y la de la empresa 1, pero la empresa 1 sólo conoce su función de costes y que el coste marginal de la empresa 2 es c_A con probabilidad θ y c_B con probabilidad $1-\theta$. (La empresa 2 podría ser nueva en el sector o haber desarrollado una nueva tecnología.) Todo esto es información del dominio público: la empresa 1 sabe que la empresa 2 cuenta con mejor información, y la empresa 2 sabe que la empresa 1 lo sabe, y así sucesivamente.

Naturalmente, la empresa 2 querrá elegir una cantidad diferente (y presumiblemente menor) si su coste marginal es alto que si es bajo. Por su parte, la empresa 1 debería prever que la empresa 2 puede ajustar su cantidad al coste de la manera indicada. Sean $q_2^*(c_A)$ y $q_2^*(c_B)$ las cantidades elegidas en función de sus costes, y sea q_1^* la cantidad elegida por la empresa 1. Si el coste de la empresa 2 es alto, ésta elegirá $q_2^*(c_A)$ tal que sea una solución de

$$\max_{q_2} [(a - q_1^* - q_2) - c_A]q_2.$$

De modo similar, si el coste de la empresa 2 es bajo, $q_2^*(c_B)$ será la solución de

$$\max_{q_2} [(a - q_1^* - q_2) - c_B]q_2.$$

Finalmente, la empresa 1 sabe que el coste de la empresa 2 es alto con probabilidad θ y debería prever que la cantidad elegida por la empresa 2 será $q_2^*(c_A)$ o $q_2^*(c_B)$, dependiendo del coste de esta empresa. Por tanto, la empresa 1 elige q_1^* que resuelve

$$\max_{q_1} \theta \left[(a - q_1 - q_2^*(c_A)) - c\right] q_1 + (1-\theta) \left[(a - q_1 - q_2^*(c_B)) - c\right] q_1$$

para maximizar el beneficio esperado.

Las condiciones de primer orden de estos problemas de optimización son

$$q_2^*(c_A) = \frac{a - q_1^* - c_A}{2}$$
$$q_2^*(c_B) = \frac{a - q_1^* - c_B}{2}$$

y

$$q_1^* = \frac{\theta\left[a - q_2^*(c_A) - c\right] + (1-\theta)\left[a - q_2^*(c_B) - c\right]}{2}.$$

Supongamos que estas condiciones de primer orden caracterizan las soluciones de los problemas de optimización anteriores. (Recordemos del ejercicio 1.6 que, en un duopolio de Cournot con información completa, si los costes de las empresas son lo suficientemente diferentes entre sí, la empresa con el coste alto no produce nada en equilibrio. Como ejercicio, hállese una condición suficiente para excluir aquí problemas análogos.) Las soluciones a las tres condiciones de primer orden son

$$q_2^*(c_A) = \frac{a - 2c_A + c}{3} + \frac{1-\theta}{6}(c_A - c_B),$$
$$q_2^*(c_B) = \frac{a - 2c_B + c}{3} + \frac{\theta}{6}(c_A - c_B),$$

y

$$q_1^* = \frac{a - 2c + \theta c_A + (1-\theta)c_B}{3}.$$

Comparemos $q_2^*(c_A)$, $q_2^*(c_B)$ y q_1^* con el equilibrio de Cournot con información *completa* y costes c_1 y c_2. Suponiendo que los valores de c_1 y c_2 son tales que ambas cantidades de equilibrio son positivas, la empresa i produce $q_i^* = (a - 2c_i + c_j)/3$, en este caso con información completa. Por el contrario, en el caso con información incompleta, $q_2^*(c_A)$ es mayor que $(a - 2c_A + c)/3$ y $q_2^*(c_B)$ es menor que $(a - 2c_B + c)/3$. Esto ocurre porque la empresa 2 no sólo ajusta su cantidad a su coste, sino que también responde al hecho de que la empresa 1 no puede hacerlo. Por ejemplo, si el coste de la empresa 2 es alto, ésta produce menos porque su coste es alto, pero por otro lado produce más porque sabe que la empresa 1 producirá una cantidad que maximice su beneficio esperado y que, por ello, es menor de lo que produciría si supiera que el coste de la empresa 2 es alto. (Una característica de este ejemplo que puede prestarse a confusión, es que q_1^* es exactamente igual a las cantidades de Cournot esperadas que la empresa 1 produciría en los dos juegos correspondientes con información completa. Esto no es cierto normalmente; consideremos por ejemplo el caso en el cual el coste total de la empresa i es $c_i q_i^2$.)

3.1.B Representación en forma normal de los juegos bayesianos estáticos

Recordemos que la representación en forma normal de un juego con información *completa* de n jugadores es $G = \{S_1 \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, donde S_i es el espacio de estrategias del jugador i y $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ es la ganancia al jugador i cuando los jugadores eligen las estrategias $(s_1, \ldots, s_n)$. Sin embargo, como discutimos en la sección 2.3.B, en un juego de decisión simultánea con información completa, para un jugador una estrategia es simplemente una acción, por lo que podemos escribir $G = \{A_1 \ldots, A_n; u_1, \ldots, u_n\}$, donde A_i es el espacio de acciones de i y $u_i(a_1, \ldots, a_n)$ es la ganancia del jugador i cuando los jugadores eligen las acciones $(a_1, \ldots, a_n)$. Para preparar nuestra descripción del desarrollo temporal de un juego estático con información *incompleta*, describimos la secuencia temporal de un juego estático con información *completa* del siguiente modo: (1) los jugadores toman simultáneamente sus decisiones (el jugador i elige a_i del conjunto factible A_i), y luego (2) reciben las ganancias $u_i(a_1, \ldots, a_n)$.

Ahora queremos representar en forma normal un juego de decisión simultánea con información incompleta, también llamado juego bayesiano estático. El primer paso consiste en representar la idea de que cada jugador conoce su función de ganancias, pero puede no conocer las de otros

jugadores. Sean la posibles funciones de ganancias de i $u_i(a_1, \ldots, a_n; t_i)$, donde t_i es el *tipo* del jugador i, que pertenece a un conjunto de tipos posibles (o *espacio de tipos*) T_i. Cada tipo t_i corresponde a una de las funciones de ganancias diferente que el jugador i podría tener.

Como ejemplo abstracto, supongamos que el jugador i tiene dos posibles funciones de ganancias. Diríamos en este caso que el jugador i tiene dos tipos, t_{i1} y t_{i2}, que el espacio de tipos del jugador i es $T_i = \{t_{i1}, t_{i2}\}$ y que las dos funciones de ganancias del jugador i son $u_i(a_1, \ldots, a_n; t_{i1})$ y $u_i(a_1, \ldots, a_n; t_{i2})$. Podemos utilizar la idea de que cada uno de los tipos del jugador corresponde a una de las funciones de ganancias diferente que el jugador podría tener, con el fin de representar la posibilidad de que cada jugador puede tener diferentes conjuntos de acciones factibles, como veremos a continuación. Supongamos, por ejemplo, que el conjunto de acciones factibles del jugador i es $\{a,b\}$ con probabilidad q y $\{a,b,c\}$ con probabilidad $1 - q$. Entonces podemos afirmar que i tiene dos tipos (t_{i1} y t_{i2}, donde la probabilidad de t_{i1} es q) y podemos decir que el conjunto de acciones factibles de i es $\{a,b,c\}$ para ambos tipos, pero hacer que la ganancia derivada de elegir c sea $-\infty$ para el tipo t_{i1}.

Como ejemplo más concreto, consideremos el juego de Cournot de la sección anterior. Las acciones de las empresas son sus decisiones sobre las cantidades q_1 y q_2. La empresa 2 tiene dos posibles funciones de costes y, por ello, dos posibles funciones de beneficios o ganancias:

$$\pi_2(q_1, q_2; c_B) = \left[(a - q_1 - q_2) - c_B\right] q_2$$

y

$$\pi_2(q_1, q_2; c_A) = \left[(a - q_1 - q_2) - c_A\right] q_2$$

La empresa 1 sólo tiene una función de ganancias posible:

$$\pi_1(q_1, q_2; c) = \left[(a - q_1 - q_2) - c\right] q_1$$

Podemos decir que el espacio de tipos de la empresa 2 es $T_2 = \{c_B, c_A\}$ y que el espacio de tipos de la empresa 1 es $T_1 = \{c\}$.

Dada esta definición del tipo de un jugador, decir que el jugador i conoce su función de ganancias es equivalente a decir que el jugador i conoce su tipo. Del mismo modo, decir que el jugador i puede no estar seguro de las funciones de ganancias de otros jugadores es equivalente a decir que puede no estar seguro de los tipos de otros jugadores, denotados por $t_{-i} = (t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$. Utilizamos T_{-i} para indicar el conjunto de todos los posibles valores de t_{-i}, y utilizamos la distribución de probabilidad $p_i(t_{-i}|t_i)$ para designar la *conjetura* sobre los tipos de los otros jugadores, t_{-i}, dado el conocimiento del jugador i de su tipo t_i. En cada aplicación analizada en la sección 3.2 (y en la mayor parte de la literatura), los tipos de los jugadores son independientes, en cuyo caso $p_i(t_{-i}|t_i)$ no depende de t_i, por lo que podemos escribir la conjetura del jugador i como $p_i(t_{-i})$. Sin embargo, hay contextos en los que los tipos de los jugadores están correlacionados, por lo que deberemos tenerlo en cuenta en nuestra definición de juego bayesiano estático, escribiendo la conjetura del jugador i como $p_i(t_{-i}|t_i)$.[1]

Uniendo los nuevos conceptos de tipos y conjeturas con los elementos ya familiares de la representación en forma normal de un juego estático con información completa, obtenemos la representación en forma normal de un juego estático bayesiano.

Definición. *La* ***representación en forma normal*** *de un juego bayesiano estático de n jugadores exige concretar los espacios de acciones de los jugadores $A_1, \ldots, A_n$, sus espacios de tipos $T_1, \ldots, T_n$, sus conjeturas $p_1, \ldots, p_n$ y sus funciones de ganancias $u_1, \ldots, u_n$. El* ***tipo*** *del jugador i, t_i, es conocido sólo por el jugador i, determina la función de ganancias del jugador i, $u_i(a_1, \ldots, a_n; t_i)$, y es un elemento del conjunto de tipos posibles T_i. La* ***conjetura*** *del jugador i, $p_i(t_{-i}|t_i)$, describe la incertidumbre de i respecto a los posibles tipos de los otros $n-1$ jugadores, t_{-i}, dado el propio tipo de i, t_i. Denotamos este juego como $G = \{A_1, \ldots, A_n; T_1, \ldots, T_n; p_1, \ldots, p_n; u_1, \ldots, u_n\}$.*

Siguiendo a Harsanyi (1967), suponemos que el desarrollo temporal de un juego bayesiano estático es la siguiente: (1) el azar determina un vector de tipos $t = (t_1, \ldots, t_n)$, donde t_i se obtiene del conjunto de tipos posibles T_i; (2) el azar revela t_i al jugador i, pero a ningún otro jugador; (3) los jugadores toman sus decisiones simultáneamente; el jugador i elige a_i del conjunto factible A_i, y (4) se reciben las ganancias $u_i(a_1, \ldots, a_n; t_i)$. Con la introducción ficticia del azar en (1) y (2), hemos descrito un juego con información *incompleta* como un juego con información *imperfecta*, donde

[1] Imaginemos que dos empresas están compitiendo por desarrollar una nueva tecnología. La posibilidad de éxito de cada empresa depende en parte de la dificultad en desarrollar la tecnología, dificultad que es desconocida. Cada empresa sólo sabe si lo ha logrado o no, pero no si la otra lo ha conseguido. Sin embargo, si la empresa 1 ha tenido éxito, es más probable que la tecnología sea fácil de desarrollar y, por ello, también más probable que la empresa 2 la haya desarrollado. Por lo tanto, la conjetura de la empresa 1 sobre el tipo de la empresa 2 depende del conocimiento por parte de la empresa 1 de su propio tipo.

con información imperfecta queremos decir (como en el capítulo 2) que en alguna ronda del juego el jugador al que le corresponde decidir no conoce la historia completa del desarrollo anterior del juego. Aquí, como el azar revela el tipo del jugador i al jugador i pero no al jugador j en el paso (2), el jugador j no conoce la historia completa del juego cuando toma sus decisiones en el paso (3).

Necesitamos tratar otras dos cuestiones algo más técnicas para completar la discusión sobre la representación en forma normal de los juegos bayesianos estáticos. En primer lugar, existen juegos en los cuales el jugador i tiene información privada no sólo sobre su propia función de ganancias, sino también sobre la función de ganancias de otro jugador. Por ejemplo, en el ejercicio 3.2, cambiamos la información asimétrica del modelo de Cournot de la sección 3.1.A de manera que los costes son simétricos y del dominio público, pero una empresa conoce el nivel de demanda y la otra no. Puesto que el nivel de demanda afecta las funciones de ganancias de ambos jugadores, el tipo de la empresa informada aparece en la función de ganancias de la empresa no informada. En el caso de n jugadores, capturamos esta posibilidad permitiendo que la ganancia del jugador i dependa no sólo de las acciones $(a_1, \ldots, a_n)$, sino

también de todos los tipos $(t_1, \ldots, t_n)$. Escribimos esta ganancia como $u_i(a_1, \ldots, a_n; t_1, \ldots, t_n)$.

La segunda cuestión técnica se refiere a las conjeturas $p_i(t_{-i}|t_i)$. Suponemos que es del dominio público que en el paso (1) del desarrollo temporal del juego estático bayesiano, el azar escoge un vector de tipos $t = (t_1, \ldots, t_n)$ de acuerdo con la distribución a priori de probabilidad $p(t)$. Cuando el azar revela t_i al jugador i, éste puede calcular la conjetura $p_i(t_{-i}|t_i)$ utilizando la regla de Bayes:[2]

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}.$$

Además, los otros jugadores pueden calcular las distintas conjeturas que podría formarse el jugador i, dependiendo del tipo de i, concretamente

[2] La regla de Bayes es una fórmula para calcular $P(A|B)$, la probabilidad (condicionada) de que un suceso A ocurra dado que un suceso B ha ocurrido ya. Sean $P(A)$, $P(B)$ y $P(A,B)$ las probabilidades (a priori, es decir, las probabilidades antes de que A o B hayan podido ocurrir) de que A ocurra, de que B ocurra y de que ambos A y B ocurran respectivamente. La regla de Bayes establece que $P(A|B) = P(A,B)/P(B)$. Es decir, la probabilidad condicional de que se dé A es igual a la probabilidad de que se den tanto A como B, dividida por la probabilidad a priori de que ocurra B.

$p_i(t_{-i}|t_i)$ para cada t_i en T_i. Como ya indicamos, vamos a suponer a menudo que los tipos de los jugadores son independientes, en cuyo caso $p_i(t_{-i})$ no depende de t_i, pero se obtiene a partir de la distribución a priori $p(t)$. En este caso, los otros jugadores conocen la conjetura de i sobre sus tipos.

3.1.C Definición del equilibrio bayesiano de Nash

Ahora queremos definir el concepto de equilibrio de los juegos bayesianos estáticos. Para ello, necesitamos definir primero los espacios de estrategias de los jugadores en dicho juego. Recordemos de las secciones 2.3.B y 2.4.B que la estrategia de un jugador es un plan de acción completo, que establece una acción factible para cada contingencia en la que el jugador podría tener que actuar. Dada la secuencia temporal del juego estático bayesiano en el cual el azar comienza el juego eligiendo los tipos de los jugadores, una estrategia (pura) del jugador i debe establecer una acción posible para *cada* uno de los tipos posibles del jugador i.

Definición. *En el juego bayesiano estático $G = \{A_1, \ldots, A_n; T_1, \ldots, T_n; p_1, \ldots, p_n; u_1, \ldots, u_n\}$, una* ***estrategia*** *del jugador i es una función $s_i(t_i)$ donde, para cada tipo t_i en T_i, $s_i(t_i)$ determina la acción del conjunto factible A_i que el tipo t_i elegiría si el azar determinara que el jugador es de este tipo.*

Al contrario que en los juegos (tanto estáticos como dinámicos) con información completa, en un juego bayesiano, los espacios de estrategias no se dan en la representación en forma normal del juego, sino que se construyen a partir de los espacios de tipos y acciones. El conjunto de posibles estrategias (puras) del jugador i, S_i, es el conjunto de todas las funciones posibles con dominio T_i y recorrido A_i. Por ejemplo, en una estrategia *de separación*, cada tipo t_i en T_i elige una acción diferente a_i de A_i. Por el contrario, en una estrategia *de agrupación*, todos los tipos eligen la misma acción. Esta distinción entre estrategias de separación y de agrupación es importante para la discusión de los juegos dinámicos con información incompleta del capítulo 4. Introducimos la distinción aquí sólo para ayudar a describir la gran variedad de estrategias que pueden construirse a partir de un determinado par de espacios de tipos y acciones, T_i y A_i.

Puede parecer innecesario exigir que la estrategia del jugador i determine una acción factible para cada uno de los tipos posibles del jugador

i. Después de todo, una vez el azar ha elegido un tipo particular y se lo ha revelado a un jugador, puede parecer que el jugador no necesita preocuparse por las acciones que podría haber tomado de haber salido elegido otro tipo. Sin embargo, el jugador i necesita tener en cuenta lo que harán los otros jugadores, y lo que harán depende de lo que piensen que hará el jugador i para cada t_i en T_i. Por lo tanto, para decidir qué hacer una vez que un tipo ha sido elegido, el jugador i tendrá que pensar qué habría hecho para cada otro tipo de T_i que podría haber sido elegido.

Consideremos, por ejemplo, el juego de Cournot con información asimétrica de la sección 3.1.A. Argumentamos allí que la solución del juego consiste en la elección de tres cantidades: $q_2^*(c_A)$, $q_2^*(c_B)$ y q_1^*. En términos de la definición de estrategia que acabamos de dar, el par $(q_2^*(c_A), q_2^*(c_B))$ es la estrategia de la empresa 2 y q_1^* es la estrategia de la empresa 1. Es fácil imaginar que la empresa 2 elegirá diferentes cantidades dependiendo de su coste. Sin embargo, es igualmente importante darse cuenta de que la elección de la cantidad de la empresa 1 debería tener en cuenta que la cantidad de la empresa 2 dependerá del coste de la empresa 2. Por lo tanto, si nuestro concepto de equilibrio es requerir que la estrategia de la empresa 1 sea una mejor respuesta a la estrategia de la empresa 2, la estrategia de la empresa 2 debe ser un *par* de cantidades, una para cada posible coste tipo, o si no, la empresa 1 no podría calcular si su estrategia es efectivamente una mejor respuesta a la estrategia de la empresa 2.

De forma más general, no podríamos aplicar la noción de equilibrio de Nash a juegos bayesianos si permitiéramos que la estrategia de un jugador no especificara lo que el jugador haría si algunos tipos resultaran elegidos por el azar. Este argumento es análogo a uno del capítulo 2: puede haber parecido innecesario exigir que la estrategia del jugador i en un juego dinámico con información completa especificase una acción factible para cada contingencia en la cual el jugador i podría haber tenido que jugar, pero no podríamos haber aplicado la noción de equilibrio de Nash a juegos dinámicos con información completa si hubiéramos permitido que alguna estrategia dejara sin determinar las acciones del jugador en alguna contingencia.

Una vez dada la definición de estrategia en un juego bayesiano, abordamos ahora la definición del equilibrio bayesiano de Nash. A pesar de la complejidad notacional de la definición, la idea central es simple y familiar: la estrategia de cada jugador debe ser una mejor respuesta a las estrategias de los restantes jugadores. Es decir, un equilibrio bayesiano de Nash es simplemente un equilibrio de Nash en un juego bayesiano.

Definición. *En el juego bayesiano estático* $G = \{A_1, \ldots, A_n; T_1, \ldots, T_n; p_1, \ldots, p_n; u_1, \ldots, u_n\}$ *las estrategias* $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ *forman un* ***equilibrio bayesiano de Nash*** *(con estrategias puras) si para cada jugador* i *y para cada uno de sus tipos* t_i *en* T_i, $s_i^*(t_i)$ *es una solución de*

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i\left(s_1^*(t_1), \ldots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, s_n^*(t_n); t\right) p_i\left(t_{-i}|t_i\right).$$

Es decir, ningún jugador quiere cambiar su estrategia, incluso si el cambio supone cambiar sólo una acción para un tipo.

Es inmediato demostrar que en un juego bayesiano estático finito (es decir, un juego en el cual n es finito y $(A_1, \ldots, A_n)$ y $(T_1, \ldots, T_n)$ son todos conjuntos finitos) existe un equilibrio bayesiano de Nash, tal vez con estrategias mixtas. La demostración es muy similar a la de la existencia de un equilibrio de Nash con estrategias mixtas en juegos finitos con información completa, por lo que la omitimos.

3.2 Aplicaciones

3.2.A Revisión de las estrategias mixtas

Como mencionamos en la sección 1.3.A, Harsanyi (1973) interpretó la estrategia mixta del jugador j como la incertidumbre del jugador i sobre la estrategia pura elegida por el jugador j y que, a su vez, la elección de j depende de cierta información privada. Ahora damos un enunciado más preciso de esta idea: un equilibrio de Nash con estrategias mixtas en un juego con información completa puede (casi siempre) interpretarse como un equilibrio bayesiano de Nash con estrategias puras en un juego muy similar con algo de información incompleta. (No tendremos en cuenta los casos raros en los cuales tal interpretación no es posible.) De un modo más evocador, la característica crucial de un equilibrio de Nash con estrategias mixtas no es que el jugador j elija una estrategia al azar, sino que el jugador i no sabe con certeza la elección del jugador j. Esta falta de certeza puede provenir de algún suceso aleatorio o (más probablemente) de un poco de información incompleta, como en el siguiente ejemplo.

Recordemos que en la batalla de los sexos existen dos equilibrios de Nash con estrategias puras, (ópera, ópera) y (boxeo, boxeo), y uno con estrategias mixtas, en el que Chris elige la ópera con probabilidad 2/3 y Pat elige el boxeo con probabilidad 2/3.

		Pat: Ópera	Pat: Boxeo
Chris	Ópera	2,1	0,0
	Boxeo	0,0	1,2

La batalla de los sexos

Ahora supongamos que, aunque se conocen desde hace mucho tiempo, Chris y Pat no están seguros de las ganancias del otro. En particular, supongamos que: la ganancia de Chris si ambos van a la ópera es $2+t_c$, donde t_c es información privada de Chris; la ganancia de Pat si ambos van al boxeo es $2 + t_p$, donde t_p es información privada de Pat, y t_c y t_p se obtienen independientemente de una distribución uniforme en $[0,x]$. (La elección de una distribución uniforme en $[0,x]$ no es importante; la idea que queremos recoger es que los valores t_c y t_p sólo afectan ligeramente a las ganancias en el juego original, para lo cual podemos pensar que x es pequeña.) El resto de las ganancias son las mismas. En términos del juego bayesiano estático abstracto en forma normal $G = \{A_c, A_p; T_c, T_p; p_c, p_p; u_c, u_p\}$ los espacios de acciones son $A_c = A_p = \{$ópera, boxeo$\}$, los espacios de tipos son $T_c = T_p = [0,x]$, las conjeturas son $p_c(t_p) = p_p(t_c) = 1/x$ para cada t_c y t_p, y las ganancias son las siguientes:

		Pat: Ópera	Pat: Boxeo
Chris	Ópera	$2 + t_c$,1	0,0
	Boxeo	0,0	1,$2 + t_p$

La batalla de los sexos con información incompleta

Vamos a construir un equilibrio bayesiano de Nash con estrategias puras de la versión con información incompleta de la batalla de los sexos en el cual Chris elige la ópera si t_c es mayor que un valor crítico c y elige el boxeo en cualquier otro caso, y Pat elige el boxeo si t_p es mayor que un valor crítico p y elige la ópera en cualquier otro caso. En tal equilibrio, Chris elige la ópera con probabilidad $(x - c)/x$ y Pat elige el boxeo con probabilidad $(x - p)/x$. Vamos a demostrar que, cuando la información incompleta desaparece (es decir, cuando x tiende a cero), el comportamiento de los jugadores en este equilibrio bayesiano de Nash en estrategias puras tiende a su comportamiento en el equilibrio de Nash con estrategias mixtas del juego original con información completa. Es decir, tanto $(x - c)/x$ y $(x - p)/x$ tienden a 2/3 cuando x tiende a cero.

Supongamos que Chris y Pat eligen las estrategias que acabamos de describir. Para un valor dado de x vamos a determinar los valores de c y p tales que las estrategias formen un equilibrio bayesiano de Nash. Dada la estrategia de Pat, las ganancias esperadas de Chris al elegir la ópera y el boxeo son

$$\frac{p}{x}(2 + t_c) + \left[1 - \frac{p}{x}\right] \cdot 0 = \frac{p}{x}(2 + t_c)$$

y

$$\frac{p}{x} \cdot 0 + \left[1 - \frac{p}{x}\right] \cdot 1 = 1 - \frac{p}{x},$$

respectivamente. Por lo tanto, elegir la ópera es óptimo si y sólo si

$$t_c \geq \frac{x}{p} - 3 = c. \tag{3.2.1}$$

De forma similar, dada la estrategia de Chris, las ganancias esperadas de Pat por elegir el boxeo y la ópera son

$$\left[1 - \frac{c}{x}\right] \cdot 0 + \frac{c}{x}(2 + t_p) = \frac{c}{x}(2 + t_p)$$

y

$$\left[1 - \frac{c}{x}\right] \cdot 1 + \frac{c}{x} \cdot 0 = 1 - \frac{c}{x},$$

respectivamente. Por lo tanto, elegir el boxeo es óptimo si y sólo si

$$t_p \geq \frac{x}{c} - 3 = p. \tag{3.2.2}$$

Resolviendo (3.2.1) y (3.2.2) simultáneamente obtenemos $p = c$ y $p^2 + 3p - x = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado se demuestra que la probabilidad de que Chris elija la ópera, concretamente $(x - c)/x$, y la de que Pat elija el boxeo, concretamente $(x - p)/x$, son ambas iguales a

$$1 - \frac{-3 + \sqrt{9 + 4x}}{2x},$$

que tiende a 2/3 cuando x tiende a cero. Por lo tanto, cuando la información incompleta desaparece, el comportamiento de los jugadores en este equilibrio bayesiano de Nash con estrategias puras del juego con información incompleta tiende a su comportamiento en el equilibrio de Nash con estrategias mixtas en el juego original con información completa.

3.2.B Una subasta

Consideremos la siguiente subasta de sobre cerrado al primer precio. Hay dos participantes que denominamos $i = 1, 2$. El participante i tiene una valoración v_i del bien, es decir, si i consigue el bien y paga el precio p, la ganancia de i es $v_i - p$. Las valoraciones de los dos participantes están uniformemente distribuidas de forma independiente en [0, 1]. Las pujas no pueden ser negativas. Los participantes entregan sus pujas simultáneamente. La puja más alta gana la subasta y el ganador paga el precio de su puja, mientras que el otro participante no obtiene nada ni paga nada. En caso de empate, el ganador se determina lanzando una moneda. Los participantes son neutrales al riesgo. Todo esto es información del dominio público.

Para formular este problema como un juego bayesiano estático, debemos identificar los espacios de acciones, los espacios de tipos, las conjeturas y las funciones de ganancias. La acción del jugador i es entregar una puja b_i (no negativa) y su tipo es su valoración v_i. (En términos del juego abstracto $G = \{A_1,A_2;T_1,T_2;p_1,p_2;u_1,u_2\}$, el espacio de acciones es $A_i = [0,\infty)$ y el espacio de tipos es $T_i = [0,1]$.) Como las valoraciones son independientes, el jugador i cree que v_j está uniformemente distribuido en [0,1], independientemente del valor de v_i. Finalmente, la función de ganancias del jugador i es

$$u_i(b_1,b_2;v_1,v_2) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si } b_i > b_j, \\ (v_i - b_i)/2 & \text{si } b_i = b_j, \\ 0 & \text{si } b_i < b_j. \end{cases}$$

Para obtener un equilibrio bayesiano de Nash de este juego comenzamos construyendo los espacios de estrategias de los jugadores. Recordemos que en un juego bayesiano estático, una estrategia es una función que va de tipos a acciones. Por lo tanto, para el jugador i una estrategia es una función $b_i(v_i)$ que determina la puja que elegiría cada uno de los tipos (es decir, valoraciones) de i. En un equilibrio bayesiano de Nash, la estrategia $b_1(v_1)$ del jugador 1 es una mejor respuesta a la estrategia $b_2(v_2)$ del jugador 2 y viceversa. Formalmente, el par de estrategias $(b_1(v_1), b_2(v_2))$ constituye un equilibrio bayesiano de Nash si, para cada v_i en [0,1], $b_i(v_i)$ es una solución de

$$\max_{b_i}(v_i - b_i)\operatorname{Prob}\{b_i > b_j(v_j)\} + \frac{1}{2}(v_i - b_i)\operatorname{Prob}\{b_i = b_j(v_j)\}.$$

Simplificamos la exposición buscando un equilibrio lineal: $b_1(v_1) = a_1 + c_1v_1$ y $b_2(v_2) = a_2 + c_2v_2$. Nótese que *no* estamos limitando los espacios de estrategias de los jugadores para incluir sólo estrategias lineales, sino que estamos permitiendo que los jugadores elijan estrategias arbitrarias y nos preguntamos si existe un equilibrio lineal. Resulta que, puesto que las valoraciones de los jugadores están uniformemente distribuidas, no sólo existe un equilibrio lineal sino que éste es único (en un sentido que precisaremos). Veremos que $b_i(v_i) = v_i/2$. Es decir, cada jugador entrega una puja igual a la mitad de su valoración. Tal puja refleja el dilema fundamental al que se enfrenta cualquier participante en una subasta de este tipo: cuanto más alta sea la puja más posibilidades tiene de ganar; cuanto más baja sea la puja, mayor será la ganancia si gana.

Supongamos que el jugador j adopta la estrategia $b_j(v_j) = a_j + c_jv_j$. Para un valor dado v_i la mejor respuesta del jugador i es una solución de

$$\max_{b_i}(v_i - b_i)\operatorname{Prob}\{b_i > a_j + c_jv_j\},$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\operatorname{Prob}\{b_i = b_j(v_j)\} = 0$ (puesto que $b_j(v_j) = a_j + c_jv_j$ y v_j está uniformemente distribuida, también lo está b_j). Puesto que no tiene sentido que el jugador i puje por debajo de la puja mínima del jugador j y sería tonto por parte de i pujar por encima del máximo del jugador j, tenemos que $a_j \leq b_i \leq a_j + c_j$, por lo que

$$\operatorname{Prob}\{b_i > a_j + c_jv_j\} = \operatorname{Prob}\left\{v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\right\} = \frac{b_i - a_j}{c_j}.$$

Por lo tanto, la mejor respuesta del jugador i es

$$b_i(v_i) = \begin{cases} (v_i + a_j)/2 & \text{si } v_i \geq a_j, \\ a_j & \text{si } v_i < a_j. \end{cases}$$

Si $0 < a_j < 1$, existen varios valores de v_i tales que $v_i < a_j$, en cuyo caso $b_i(v_i)$ no es lineal, sino plana al principio y con pendiente positiva después. Como estamos buscando un equilibrio lineal, excluimos $0 < a_j < 1$, centrándonos en $a_j \geq 1$ y $a_j \leq 0$. Pero el primero no puede darse en equilibrio: puesto que es óptimo para un tipo más alto pujar tanto al menos como la puja óptima del tipo más bajo, tenemos que $c_j \geq 0$, pero entonces $a_j \geq 1$ implicaría que $b_j(v_j) \geq v_j$, lo que no puede ser óptimo. Por lo tanto, si $b_i(v_i)$ tiene que ser lineal, debemos tener $a_j \leq 0$, en cuyo caso $b_i(v_i) = (v_i + a_j)/2$, por lo que $a_i = a_j/2$ y $c_i = 1/2$.

Podemos repetir el mismo análisis para el jugador j suponiendo que el jugador i adopta la estrategia $b_i(v_i) = a_i + c_iv_i$, con lo que obtenemos $a_i \leq 0$, $a_j = a_i/2$ y $c_j = 1/2$. Combinando estos dos conjuntos de resultados tenemos que $a_i = a_j = 0$ y $c_i = c_j = 1/2$, es decir, $b_i(v_i) = v_i/2$, como dijimos antes.

Podríamos preguntarnos si hay otros equilibrios bayesianos de Nash en este juego, y también cómo las pujas en equilibrio cambian cuando la distribución de las valoraciones de los jugadores cambia. Ninguna de estas cuestiones puede resolverse utilizando la técnica que acabamos de aplicar (proponer estrategias lineales y después derivar los coeficientes que las convierten en equilibrio). No conduce a ninguna parte intentar adivinar todas las formas funcionales que podrían tener otros equilibrios de este juego, y no existe equilibrio lineal para ninguna otra distribución de valoraciones. En el apéndice, derivamos un equilibrio bayesiano simétrico,[3] nuevamente para el caso de valoraciones uniformemente distribuidas. Suponiendo que las estrategias de los jugadores son estrictamente crecientes y diferenciables, demostramos que el único equilibrio bayesiano de Nash simétrico es el equilibrio lineal que ya hemos derivado. La técnica que utilizamos puede extenderse fácilmente a una clase más amplia de distribuciones de las valoraciones, y también al caso de n participantes.[4]

[3] Un equilibrio bayesiano de Nash se denomina simétrico si las estrategias de los jugadores son idénticas. Es decir, en un equilibrio bayesiano de Nash simétrico existe una sola función $b(v_i)$ tal que la estrategia $b_1(v_1)$ del jugador 1 es $b(v_1)$ y la estrategia $b_2(v_2)$ del jugador 2 es $b(v_2)$, y esta única estrategia es una mejor respuesta a sí misma. Por supuesto, puesto que las valoraciones de los jugadores serán normalmente diferentes, sus pujas también lo serán, incluso si ambos utilizan la misma estrategia.

[4] La omisión de este apéndice no impedirá la comprensión del resto del libro.

Apéndice

Supongamos que el jugador j adopta la estrategia $b(\cdot)$ y supongamos que $b(\cdot)$ es estrictamente creciente y diferenciable. Entonces, para un valor dado de v_i la puja óptima del jugador i es una solución de

$$\max_{b_i}(v_i - b_i)\,\text{Prob}\{b_i > b(v_j)\}.$$

Sea $b^{-1}(b_j)$ la valoración que el participante j debe tener para pujar b_j; esto es, $b^{-1}(b_j) = v_j$ si $b_j = b(v_j)$. Puesto que v_j está uniformemente distribuida en [0,1], $\text{Prob}\{b_i > b(v_j)\} = \text{Prob}\{b^{-1}(b_i) > v_j\} = b^{-1}(b_i)$. La condición de primer orden para la optimización del problema del jugador i es

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i)\frac{d}{db_i}b^{-1}(b_i) = 0.$$

Esta condición es una ecuación implícita de la mejor respuesta del jugador i a la estrategia $b(\cdot)$ jugada por j dado que la valoración de i es v_i. Si la estrategia $b(\cdot)$ tiene que ser un equilibrio bayesiano de Nash simétrico, es necesario que la solución a la condición de primer orden sea $b(v_i)$. Es decir, para cada una de las posibles valoraciones del pujador i, éste no quiere desviarse de la estrategia $b(\cdot)$ dado que el jugador j utiliza esta estrategia. Para imponer este requisito, sustituimos $b_i = b(v_i)$ en la condición de primer orden, obteniendo

$$-b^{-1}(b(v_i)) + (v_i - b(v_i))\frac{d}{db_i}b^{-1}(b(v_i)) = 0.$$

Por supuesto, $b^{-1}(b(v_i))$ es simplemente v_i. Además, $d\{b^{-1}(b(v_i))\}/db_i = 1/b'(v_i)$. Es decir, $d\{b^{-1}(b_i)\}/db_i$ mide cuánto debe cambiar la valoración del jugador i para producir un cambio de una unidad en la puja, mientras que $b'(v_i)$ mide cuánto cambia la puja en respuesta a un cambio de una unidad en la valoración. Por lo tanto, $b(\cdot)$ debe satisfacer la ecuación diferencial de primer orden

$$-v_i + (v_i - b(v_i))\frac{1}{b'(v_i)} = 0,$$

la cual se expresa de un modo más conveniente como $b'(v_i)v_i + b(v_i) = v_i$. La parte izquierda de esta ecuación diferencial es precisamente $d\{b(v_i)v_i\}/dv_i$. Integrando ambas partes de la ecuación obtenemos

$$b(v_i)v_i = \frac{1}{2}v_i^2 + k,$$

donde k es una constante de integración. Para eliminar k necesitamos una condición de frontera. Afortunadamente, un razonamiento económico simple nos ofrece una: ningún jugador debería pujar por encima de su propia valoración. Por tanto, debe cumplirse que $b(v_i) \leq v_i$ para cada v_i. En particular, debe ocurrir que $b(0) \leq 0$. Puesto que las pujas están restringidas a ser no negativas, esto implica que $b(0) = 0$, y entonces $k = 0$ y $b(v_i) = v_i/2$, como dijimos.

3.2.C Una subasta doble

A continuación consideramos el caso en el cual un comprador y un vendedor tienen cada uno información privada sobre sus valoraciones, como en Chatterjee y Samuelson (1983). (En Hall y Lazear [1984] el comprador es una empresa y el vendedor un trabajador. La empresa conoce el producto marginal del trabajador, y el trabajador conoce sus otras oportunidades. Véase el ejercicio 3.8.) Analizamos un juego de intercambio llamado subasta doble. El vendedor anuncia un precio de venta p_s, y el comprador simultáneamente anuncia un precio de compra p_b. Si $p_b \geq p_s$, el intercambio tiene lugar a un precio $p = (p_b + p_s)/2$. Si $p_b < p_s$ no se da el intercambio.

La valoración por parte del comprador del bien del vendedor es v_b; la del vendedor es v_s. Estas valoraciones son información privada y se obtienen independientemente de distribuciones uniformes en [0,1]. Si el comprador obtiene el bien por el precio p, su utilidad es $v_b - p$; si no hay intercambio la utilidad del comprador es cero. Si el vendedor vende el bien por el precio p, su utilidad es $p - v_s$; si no hay intercambio su utilidad es cero. (Cada una de estas funciones de utilidad mide el cambio en la utilidad de cada parte. Si no hay intercambio, no hay cambio en utilidad. No cambiaría nada definir, digamos, la utilidad del vendedor como p si hay intercambio a un precio p y v_s si no hay intercambio.)

En este juego bayesiano estático, una estrategia del comprador es una función $p_b(v_b)$ que determina el precio que el comprador ofrecerá para cada una de sus posibles valoraciones.. Del mismo modo, una estrategia del vendedor es una función $p_s(v_s)$ que especifique el precio que el vendedor pedirá para cada una de sus posibles valoraciones. Un par de estrategias $\{p_b(v_b),p_s(v_s)\}$ constituye un equilibrio bayesiano de Nash si se cumplen las dos condiciones siguientes. Para cada v_b en $[0, 1]$, $p_b(v_b)$ es una solución de

$$\max_{p_b}\left[v_b - \frac{p_b + E[p_s(v_s) \mid p_b \geq p_s(v_s)]}{2}\right]\text{Prob}\{p_b \geq p_s(v_s)\}, \qquad (3.2.3)$$

donde $E[p_s(v_s)|p_b \geq p_s(v_s)]$ es el precio esperado que pedirá el vendedor, condicionado a que lo que pida sea menor que el precio p_b ofrecido por el comprador. Para cada v_s en [0,1], $p_s(v_s)$ es una solución de

$$\max_{p_s} \left[\frac{p_s + E[p_b(v_b)|p_b(v_b) \geq p_s]}{2} - v_s\right] \text{Prob}\{p_b(v_b) \geq p_s\}, \tag{3.2.4}$$

donde $E[p_b(v_b)|p_b(v_b) \geq p_s]$ es el precio esperado que ofrecerá el comprador condicionado a que lo que ofrezca sea mayor que el precio p_s que pide el vendedor.

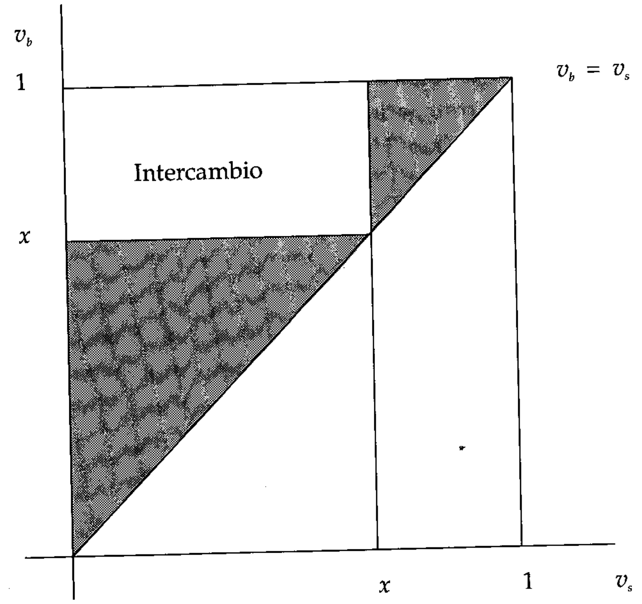


Figura 3.2.1

Existen muchísimos equilibrios bayesianos de Nash de este juego. Consideremos, por ejemplo, el siguiente equilibrio de precio único en el cual el intercambio ocurre a un único precio si es que ocurre. Para cualquier valor de x en [0,1], sea la estrategia del comprador ofrecer x si $v_b \geq x$ y ofrecer cero en cualquier otro caso, y sea la estrategia del vendedor pedir x si $v_s \leq x$ y pedir uno en cualquier otro caso. Dada la estrategia del comprador, las posibilidades del vendedor se concretan en un intercambio a x o en que no haya intercambio, por lo que la estrategia

del vendedor es una mejor respuesta a la del comprador, ya que para los tipos del vendedor que hacen que el intercambio se prefiera a la ausencia de intercambio éste ocurre, y viceversa. El argumento análogo demuestra que la estrategia del comprador es una mejor respuesta a la del vendedor, por lo que estas estrategias forman un equilibrio bayesiano de Nash. En este equilibrio el intercambio se da para los pares (v_s,v_b) indicados en la figura 3.2.1; el intercambio sería eficiente para todos los pares (v_s,v_b) tales que $v_b \geq v_s$, pero no se da en las dos regiones sombreadas de la figura.

Ahora derivamos un equilibrio bayesiano de Nash lineal de la subasta doble. Como en la sección anterior, *no* restringimos los espacios de estrategias de los jugadores de manera que se incluyan solamente las estrategias lineales, sino que permitimos que los jugadores elijan estrategias arbitrarias pero nos preguntamos si existe un equilibrio que sea lineal. Existen muchos otros equilibrios además de los equilibrios de precio único y el equilibrio lineal, pero el equilibrio lineal tiene propiedades de eficiencia interesantes que describiremos más adelante.

Supongamos que la estrategia del vendedor es $p_s(v_s) = a_s + c_s v_s$. Entonces p_s está uniformemente distribuido en $[a_s,a_s + c_s]$, por lo que (3.2.3) se convierte en

$$\max_{p_b} \left[v_b - \frac{1}{2}\left\{p_b + \frac{a_s + p_b}{2}\right\}\right] \frac{p_b - a_s}{c_s},$$

cuya condición de primer orden consiste en

$$p_b = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{3}a_s. \tag{3.2.5}$$

Por lo tanto, si el vendedor utiliza una estrategia lineal, la mejor respuesta del comprador también es lineal. Análogamente, supongamos que la estrategia del comprador es $p_b(v_b) = a_b + c_b v_b$. Entonces, p_b está uniformemente distribuido en $[a_b,a_b + c_b]$, por lo que (3.2.4) se convierte en

$$\max_{p_s} \left[\frac{1}{2}\left\{p_s + \frac{p_s + a_b + c_b}{2}\right\} - v_s\right] \frac{a_b + c_b - p_s}{c_b},$$

cuya condición de primer orden es

$$p_s = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{3}(a_b + c_b). \tag{3.2.6}$$

Por lo tanto, si el comprador utiliza una estrategia lineal, la mejor respuesta del vendedor también es lineal. Si las estrategias lineales de los jugadores han de ser mejores respuestas la una a la otra, (3.2.5) implica que $c_b = 2/3$

y $a_b = a_s/3$, y (3.2.6) implica que $c_s = 2/3$ y $a_s = (a_b + c_b)/3$. Por lo tanto, las estrategias de equilibrio lineal son

$$p_b(v_b) = \frac{2}{3}v_b + \frac{1}{12} \tag{3.2.7}$$

y

$$p_s(v_s) = \frac{2}{3}v_s + \frac{1}{4} \tag{3.2.8}$$

como muestra la figura 3.2.2.

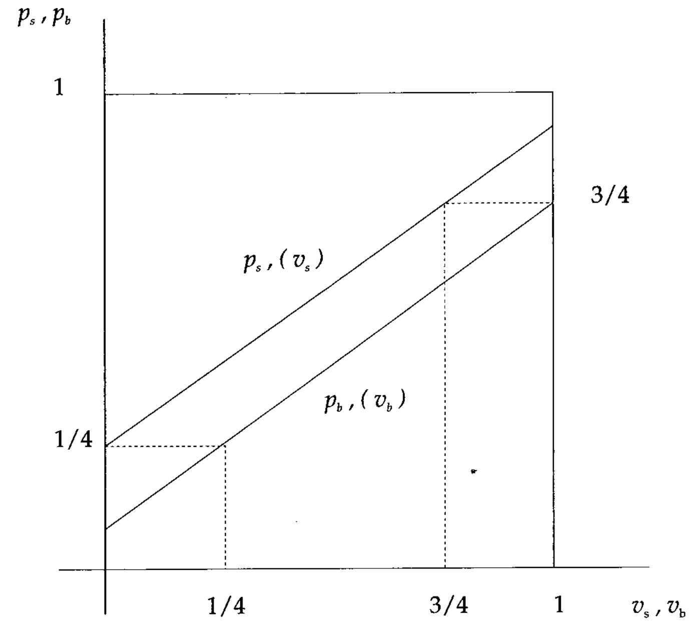


Figura 3.2.2

Recordemos que el intercambio en la subasta doble se da si y sólo si $p_b \geq p_s$. Manipulando (3.2.7) y (3.2.8) se demuestra que el intercambio ocurre en el equilibrio lineal si y sólo si $v_b \geq v_s + (1/4)$, como muestra la figura 3.2.3. (De acuerdo con esto, la figura 3.2.2 revela que, para los tipos del vendedor por encima de 3/4, se realizan demandas por encima de la oferta más alta del comprador $p_b(1) = 3/4$, y que para los tipos del vendedor por debajo de 1/4 se realizan ofertas por debajo de la oferta más baja del vendedor, $p_s(0) = 1/4$.)

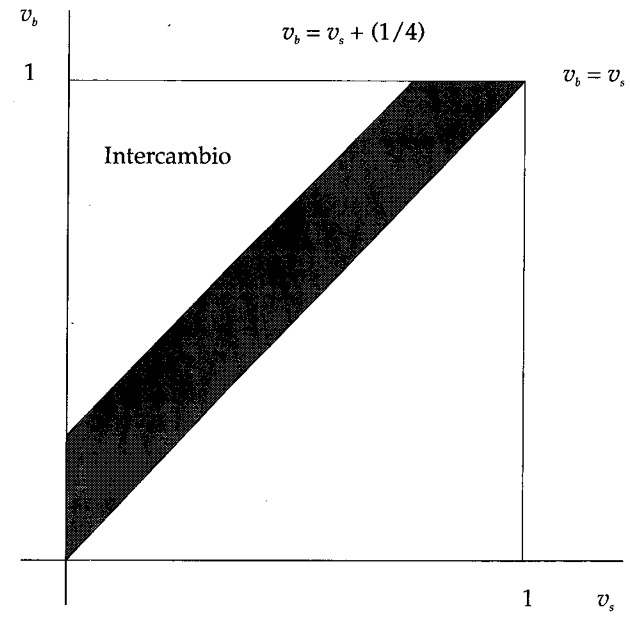


Figura 3.2.3

Comparemos las figuras 3.2.1 y 3.2.3 (las descripciones de los pares de valoraciones para los cuales el intercambio ocurre en los equilibrios de precio único y simétrico respectivamente). En ambos casos se da el intercambio posible más valioso (concretamente $v_s = 0$ y $v_b = 1$). Pero al equilibrio de precio único le faltan algunos intercambios valiosos (como $v_s = 0$ y $v_b = x - \epsilon$, donde ϵ es pequeño, y logra algunos intercambios que casi no valen nada (como $v_s = x - \epsilon$ y $v_b = x + \epsilon$). Por el contrario, al equilibrio lineal le faltan todos los intercambios que casi no valen nada pero logra todos los intercambios de valor al menos 1/4. Esto sugiere que el equilibrio lineal puede dominar los equilibrios de precio único en términos de las ganancias esperadas de los jugadores, pero también plantea la posibilidad de que los jugadores pudieran estar incluso mejor en un equilibrio alternativo.

Myerson y Satterthwaite (1983) demuestran que, para distribuciones uniformes de las valoraciones como las consideradas aquí, el equilibrio lineal consigue ganancias esperadas mayores que ningún otro equilibrio bayesiano de Nash en subasta doble (incluyendo equilibrios múltiples). Esto significa que no existe un equilibrio bayesiano de Nash en subasta doble tal que el intercambio ocurra si y sólo si es eficiente (es decir, si y sólo si $v_b \geq v_s$). También demuestran que este último resultado es muy general: si v_b está distribuida de forma continua en $[x_b, y_b]$ y v_s está distribuida de forma continua en $[x_s, y_s]$, donde $y_s > x_b$ e $y_b > x_s$, no existe ningún juego de negociación al que quisieran jugar el comprador y el vendedor que tenga un equilibrio bayesiano de Nash en el que el intercambio ocurra si y sólo si es eficiente. En la próxima sección vamos a indicar cómo puede utilizarse el principio de revelación para demostrar este resultado general. Concluimos esta sección aplicando este resultado al modelo de empleo de Hall y Lazear: si la empresa tiene información privada sobre el producto marginal m del trabajador y el trabajador tiene información privada sobre una oportunidad alternativa v, no existe ningún juego de negociación que la empresa y el trabajador quisieran jugar que produzca empleo si y sólo si es eficiente (es decir, si y sólo si $m \geq v$).

3.3 El principio de revelación

El principio de revelación, debido a Myerson (1979) en el contexto de los juegos bayesianos (y en otros en contextos relacionados), es un instrumento importante para diseñar juegos cuando los jugadores tienen información privada. Puede aplicarse a los problemas de las subastas y del intercambio bilateral descritos en las dos secciones anteriores, así como a una amplia gama de problemas. En esta sección enunciamos y demostramos el principio de revelación para juegos bayesianos estáticos. (La extensión de la demostración a juegos bayesianos dinámicos es inmediata.) No obstante, antes de hacerlo, vamos a indicar cómo se utiliza el principio de revelación en los problemas de subastas y de intercambio bilateral.

Consideremos un vendedor que quiere diseñar una subasta que maximice sus ingresos. Sería una ardua tarea detallar todas y cada una de las diferentes subastas posibles. En la subasta de la sección 3.2.B, por ejemplo, el participante que puja más alto paga al vendedor y consigue el bien subastado, pero existen muchas otras posibilidades. Los participantes, por ejemplo, pueden tener que pagar una entrada. De forma más general, algunos de los participantes que pierden pudieran tener que pagar dinero, tal vez en cantidades que dependan de sus pujas y de las de los demás. También podría el vendedor establecer un precio de reserva, un precio mínimo por debajo del cual no se aceptaran pujas. De forma más general, puede existir cierta probabilidad de que el vendedor se quede con el bien

o de que éste no siempre vaya a quien puje más alto. Afortunadamente, el vendedor puede utilizar el principio de revelación para simplificar considerablemente este problema de dos maneras. En primer lugar, el vendedor puede limitar su atención a la siguiente clase de juegos:

1. Los participantes hacen declaraciones (posiblemente falsas) sobre sus tipos (es decir, sus valoraciones). El jugador i puede declarar ser cualquier tipo τ_i del conjunto T_i de posibles tipos de i, independientemente de cuál sea el verdadero tipo i, t_i.

2. Dadas las declaraciones de los participantes $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, el jugador i ofrece $x_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ y recibe el bien subastado con probabilidad $q_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Para cada posible combinación de declaraciones $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, la suma de las probabilidades $q_1(\tau_1, \ldots, \tau_n) + \ldots + q_n(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ debe ser menor o igual a uno.

Los juegos de esta clase (es decir, los juegos estáticos bayesianos en los cuales la única acción del jugador es hacer una declaración sobre su tipo) se llaman *mecanismos directos*.

La segunda manera en la que el vendedor puede utilizar el principio de revelación es limitando su atención a los mecanismos directos, en los cuales decir la verdad constituye un equilibrio bayesiano de Nash para cada participante, es decir, a las funciones de oferta y de probabilidad $\{x_1(\tau_1, \ldots, \tau_n), \ldots, x_n(\tau_1, \ldots, \tau_n); q_1(\tau_1, \ldots, \tau_n), \ldots, q_n(\tau_1, \ldots, tau_n)\}$ tales que la estrategia de equilibrio de cada jugador i sea declarar $\tau_i(t_i) = t_i$ para cada t_i en T_i. Un mecanismo directo en el cual decir la verdad constituye un equilibrio bayesiano de Nash se llama *de incentivos compatibles*.

Fuera del contexto del diseño de una subasta, el principio de revelación puede seguir siendo utilizado de estas dos maneras. Cualquier equilibrio bayesiano de Nash de un juego bayesiano puede representarse con un nuevo equilibrio bayesiano de Nash en un nuevo juego bayesiano adecuadamente escogido, en el cual por "representado" queremos decir que para cada posible combinación de tipos de los jugadores $(t_i, \ldots, t_n)$, las acciones y las ganancias de los jugadores en el nuevo equilibrio son idénticos a los del equilibrio original. Independientemente de cuál sea el juego original, el nuevo juego bayesiano es siempre un mecanismo directo; independientemente del equilibrio original, el nuevo equilibrio siempre consiste en decir la verdad. De manera más formal:

Teorema. (El principio de revelación). *Cualquier equilibrio bayesiano de Nash en un juego bayesiano puede representarse mediante un mecanismo directo de incentivos compatibles.*

En la subasta analizada en la sección 3.2.B supusimos que las valoraciones de los participantes eran independientes entre sí. También supusimos (de forma implícita en la definición de las valoraciones de los participantes) que conocer la valoración del jugador j no cambiaría la valoración del jugador i (aunque tal conocimiento cambiaría normalmente la puja de i). Caracterizamos estos dos supuestos diciendo que los participantes tienen valores privados e independientes. En este caso, Myerson (1981) determina qué mecanismos directos tienen un equilibrio de decir la verdad y cuáles de estos equilibrios maximizan la ganancia esperada del vendedor. El principio de revelación garantiza entonces que no hay otra subasta con un equilibrio bayesiano de Nash que proporcione al vendedor una ganancia esperada más alta, puesto que el equilibrio de tal subasta habría sido representado por un equilibrio de decir la verdad de un mecanismo directo, y ya consideramos todos los mecanismos directos de incentivos compatibles. También demuestra Myerson que el equilibrio bayesiano de Nash simétrico de la subasta analizada en la sección 3.2.B es equivalente a este equilibrio de decir la verdad maximizador de la ganancia (como los equilibrios simétricos de otras conocidas subastas).

Como segundo ejemplo del principio de revelación, consideremos el problema del intercambio bilateral descrito en la sección 3.2.C. Allí analizamos un juego de intercambio entre un comprador y un vendedor, la subasta doble. En ese juego, si había intercambio, el comprador pagaba al vendedor, mientras que si no, no había pago; sin embargo existen muchas otras posibilidades. Podría haber pagos (del comprador al vendedor o viceversa) incluso sin intercambio, y la probabilidad de un intercambio podría estar estrictamente entre cero y uno. También, la regla para determinar si va haber intercambio podría exigir que la oferta del comprador fuera mayor que la demanda del vendedor en una cierta cantidad (positiva o negativa); dicha cantidad podría incluso variar dependiendo de los precios anunciados por las partes.

Podemos capturar estas posibilidades considerando la siguiente clase de mecanismos directos: el comprador y el vendedor realizan simultáneamente declaraciones sobre sus tipos, τ_b y τ_s, tras lo cual el comprador paga al vendedor $x(\tau_b,\tau_s)$, que puede ser positivo o negativo, y el comprador recibe el bien con probabilidad $q(\tau_b,\tau_s)$. Myerson y Satterthwaite determinan qué mecanismos directos tienen un equilibrio de decir la verdad. Luego imponen la restricción de que cada tipo de cada parte quiera jugar (es decir, que cada tipo de cada parte tenga una ganancia esperada en equilibrio no inferior a la ganancia que ese tipo podría conseguir negándose a jugar, concretamente cero para cada tipo de comprador y t_s para el tipo de vendedor t_s). Finalmente, demuestran que en ninguno de estos mecanismos directos de incentivos compatibles, el intercambio se da con probabilidad uno si y sólo si el intercambio es eficiente. El principio de revelación garantiza entonces que no hay juego de negociación que quieran seguir el comprador y el vendedor que tenga un equilibrio bayesiano de Nash en el cual se dé el intercambio si y sólo si es eficiente.

Para dar un enunciado formal y una demostración del principio de revelación, consideremos el equilibrio bayesiano de Nash $s^* = (s_1^*,\ldots,s_n^*)$ en el juego bayesiano estático $G = \{A_1,\ldots,A_n;T_1,\ldots,T_n;p_1,\ldots,p_n;u_1,\ldots,u_n\}$. Vamos a construir un mecanismo directo con un equilibrio de decir la verdad que represente s^*. El mecanismo directo adecuado es un juego bayesiano estático con los mismos espacios de tipos y de conjeturas que G, pero con nuevos espacios de acciones y nuevas funciones de ganancias. Los nuevos espacios de acciones son simples. Las acciones factibles del jugador i en el mecanismo directo son declaraciones (posiblemente falsas) sobre sus posibles tipos. Es decir, el espacio de acciones del jugador i es T_i. Las nuevas funciones de ganancias son más complicadas. Dependen no sólo del juego original G, sino también del equilibrio original en dicho juego, s^*. La idea crucial es utilizar el hecho de que s^* es un equilibrio en G para garantizar que decir la verdad es un equilibrio del mecanismo directo, como vemos a continuación.

Decir que s^* es un equilibrio bayesiano de Nash de G, significa que para cada jugador i, s_i^* es la mejor respuesta de i a las estrategias $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$ de los demás jugadores. Más concretamente, para cada uno de los tipos t_i en T_i de i, $s_i^*(t_i)$ es la mejor acción de A_i que puede elegir i, dado que las estrategias de los otros jugadores son $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$. Por tanto, si el tipo de i es t_i, y permitimos a i elegir una acción de un subgrupo A_i que incluye $s_i^*(t_i)$, entonces la elección óptima de i sigue siendo $s_i^*(t_i)$, suponiendo de nuevo que las estrategias de los otros jugadores son $(s_1^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*)$. Las funciones de ganancias en el mecanismo directo se eligen para confrontar a cada jugador con una elección exactamente de esta clase.

Definimos las ganancias en el mecanismo directo sustituyendo las declaraciones de tipos de los jugadores en el nuevo juego $\tau = (\tau_1,\ldots,\tau_n)$

en las estrategias de equilibrio del juego original, s^*, y luego sustituyendo las acciones resultantes en el juego original $s^*(\tau) = (s_1^*(\tau_1), \ldots, s_n^*(\tau_n))$ en las funciones de ganancias del juego original. Formalmente, la función de ganancias de i es

$$v_i(\tau,t) = u_i[s^*(\tau),t],$$

donde $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Se podría pensar que estas ganancias se dan porque un observador imparcial se acerca a los jugadores y pronuncia el siguiente discurso:

> Sé que ustedes ya conocen sus tipos y que van a jugar el equilibrio s^* del juego G. Pero permítanme que les presente un nuevo juego, un mecanismo directo. En primer lugar, cada uno de ustedes firmará un contrato que me permita a mí dictar la acción que tomarán cuando juguemos G. En segundo lugar, cada uno de ustedes escribirá una declaración sobre su tipo τ_i y me la entregará. Seguidamente utilizaré la declaración del tipo de cada uno de ustedes en el nuevo juego, τ_i, junto con su estrategia de equilibrio en el juego original, s_i^*, para calcular la acción que habrían elegido en el equilibrio s^* si su tipo fuera verdaderamente τ_i, concretamente $s_i^*(\tau_i)$. Finalmente, determinaré que cada uno de ustedes tome la acción que he calculado, y recibirán las ganancias resultantes (que dependerán de estas acciones y de sus tipos verdaderos).

Concluimos esta sección (y la demostración del principio de revelación) demostrando que decir la verdad es un equilibrio bayesiano de Nash de este mecanismo directo. Al declarar ser del tipo τ_i de T_i, el jugador i está en efecto escogiendo tomar la acción $s_i^*(\tau_i)$ de A_i. Si todos los demás jugadores dicen la verdad, están efectivamente jugando las estrategias $(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$. Pero discutimos anteriormente que si juegan esas estrategias, cuando el tipo de i es t_i la mejor acción que puede elegir i es $s_i^*(t_i)$. Por tanto, si los otros jugadores dicen la verdad, cuando el tipo de i sea t_i el mejor tipo del que se puede declarar ser es t_i. Es decir, decir la verdad es un equilibrio. De un modo más formal, jugar la estrategia de decir la verdad $\tau_i(t_i) = t_i$ para cada t_i en T_i es un equilibrio bayesiano de Nash del juego bayesiano estático $\{T_1, \ldots, T_n; T_1, \ldots, T_n; p_1, \ldots, p_n; v_1, \ldots, v_n\}$ para cada jugador i.

3.4 Lecturas adicionales

Myerson (1985) ofrece una introducción más detallada a los juegos bayesianos, el equilibrio bayesiano de Nash y al principio de revelación. Consúltese McAfee y McMillan (1987) para un examen de la literatura sobre subastas, incluyendo una introducción a la maldición del ganador. Bulow y Klemperer (1991) extienden el modelo de subastas de la sección 3.2.B para dar una interesante explicación de los pánicos y de los hundimientos racionales en los (digamos) mercados de valores. Sobre el empleo bajo información asimétrica consúltese Deere (1988), quien analiza un modelo dinámico en el cual el trabajador va encontrándose con distintas empresas a lo largo del tiempo, cada una con su propio producto marginal conocido de forma privada. Para aplicaciones del principio de revelación consúltese Baron y Myerson (1982) sobre la regulación de un monopolio con costes desconocidos, Hart (1983) sobre los contratos implícitos y el paro involuntario y Sappington (1983) sobre la teoría de la agencia.

3.5 Ejercicios

3.1 ¿Qué es un juego bayesiano estático? ¿Qué es una estrategia (pura) en tal juego? ¿Qué es un equilibrio bayesiano de Nash (con estrategias puras) en dicho juego?

3.2 Consideremos un duopolio de Cournot que opera en un mercado con demanda inversa $P(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$ es la cantidad agregada en el mercado. Ambas empresas tienen unos costes totales de $c_i(q_i) = cq_i$, pero la demanda es incierta: es alta ($a = a_A$) con probabilidad θ y baja ($a = a_B$) con probabilidad $1 - \theta$. Además, la información es asimétrica. La empresa 1 sabe si la demanda es alta o baja, pero la empresa 2 no lo sabe. Todo esto es información del dominio público. Las dos empresas eligen cantidades simultáneamente. ¿Cuáles son los espacios de estrategias de las dos empresas? Háganse supuestos sobre a_A, a_B, θ y c de manera que todas las cantidades de equilibrio sean positivas. ¿Cuál es el equilibrio bayesiano de este juego?

3.3 Consideremos el siguiente modelo de duopolio de Bertrand con información asimétrica y productos diferenciados. La demanda que se dirige a la empresa i es $q_i(p_i, p_j) = a - p_i - b_i \cdot p_j$. Los costes son cero para ambas empresas. La sensibilidad de la demanda de la empresa i al precio de la empresa j es o alta o baja. Es decir, b_i es o b_A o b_B, donde $b_A > b_B > 0$. Para cada empresa, $b_i = b_A$ con probabilidad θ y $b_i = b_B$ con probabilidad $1-\theta$, independientemente de b_j. Cada empresa conoce su propio b_i pero no el de su competidora. Todo esto es información del dominio público. ¿Cuáles son los espacios de acciones, espacios de tipos, conjeturas y funciones de utilidad en este juego? ¿Cuáles son los espacios de estrategias? ¿Qué condiciones definen un equilibrio bayesiano de Nash simétrico con estrategias puras de este juego? Hállese dicho equilibrio.

3.4 Hállense todos los equilibrios bayesianos de Nash con estrategias puras en el siguiente juego bayesiano estático:

1. El azar determina si las ganancias son como en el juego 1 o como en el juego 2, siendo cada juego igualmente probable.
2. El jugador 1 se entera de si el azar ha escogido el juego 1 o el 2, pero el jugador 2 no.
3. El jugador 1 elige A o B; simultáneamente el jugador 2 elige D o I.
4. Las ganancias son las que se dan en el juego que determina el azar.

	I	D
A	1,1	0,0
B	0,0	0,0

Juego 1

	I	D
A	0,0	0,0
B	0,0	2,2

Juego 2

3.5 Recordemos de la sección 1.3 que el juego de las monedas (un juego estático con información completa) no tiene equilibrios de Nash con estrategias puras, pero tiene un equilibrio de Nash con estrategias mixtas: cada jugador elige *cara* con probabilidad 1/2.

		Jugador 2	
		cara	cruz
Jugador 1	cara	1, − 1	−1,1
	cruz	−1,1	1, − 1

Hállese un equilibrio bayesiano de Nash con estrategias puras del juego correspondiente con información incompleta tal que, conforme la información incompleta desaparece, la conducta de los jugadores en el equilibrio bayesiano de Nash tienda a su comportamiento en el equilibrio de Nash con estrategias mixtas del juego original con información completa.

3.6 Consideremos una subasta de sobre cerrado al primer precio en la cual las valoraciones de los participantes están distribuidas de forma independiente y uniforme en [0,1]. Demuéstrese que si hay n participantes, la estrategia de pujar $(n-1)/n$ veces la propia valoración es un equilibrio bayesiano de Nash simétrico.

3.7 Consideremos una subasta de sobre cerrado al primer precio en la cual las valoraciones de los participantes están distribuidas idénticamente y de forma independiente según la densidad estrictamente positiva $f(v_i)$ en [0,1]. Calcúlese un equilibrio bayesiano de Nash simétrico para el caso de dos participantes.

3.8 Considérese al comprador y al vendedor de la subasta doble analizada en la sección 3.2.C como una empresa que conoce el producto marginal m del trabajador y un trabajador que conoce su oportunidad alternativa v, como en Hall y Lazear (1984). En este contexto, un intercambio significa que el trabajador está empleado por la empresa, y el precio al cual las partes negocian es el salario del trabajador w. Si se da el intercambio, la ganancia de la empresa es $m-w$, y la del trabajador es w; si no hay intercambio, la ganancia de la empresa es cero y la del trabajador v.

Supongamos que m y v son obtenidos independientemente según una distribución uniforme en [0,1] como en el texto. Con fines comparativos, calcúlense las ganancias esperadas de los jugadores en el equilibrio lineal de la subasta doble. Ahora consideremos los dos juegos de intercambio siguientes como alternativas a la subasta doble.

Juego 1: Antes de que las partes conozcan su información privada, firman un contrato aceptando que si el trabajador es empleado por la empresa, su salario será w, pero también que cualquiera de las partes puede romper la relación de empleo sin coste alguno. Después de que las partes conocen los respectivos valores de su información privada, anuncian simultáneamente si aceptan el salario w o si lo rechazan. Si ambos anuncian que lo aceptan, hay intercambio; si no, no. Dado un valor de v arbitrario en [0,1], ¿cuál es el equilibrio bayesiano de Nash de este juego? Dibújese un diagrama análogo a la figura 3.2.3 mostrando los pares de tipos para los que hay intercambio. Hállese el valor de w que maximiza la suma de las ganancias esperadas de los jugadores y calcúlese esta suma.

Juego 2: Antes de que las partes conozcan su información privada, firman un contrato aceptando que el siguiente juego dinámico se utilizará para determinar si el trabajador se une a la empresa y, si lo hace, con qué salario. (Estrictamente hablando, este juego pertenece al capítulo 4. Vamos a adelantarnos al capítulo 4 aduciendo que este juego puede resolverse combinando las lecciones de este capítulo con las del capítulo 2.) Una vez que las partes conocen los respectivos valores de su información privada, la empresa elige un salario w que ofrece al trabajador, salario que el trabajador acepta o rechaza. Analícese este juego utilizando el procedimiento de inducción hacia atrás, tal como hicimos en la sección 2.1.A con los juegos análogos de información completa. Dados w y v, ¿qué hará el trabajador? Si la empresa prevé lo que hará el trabajador, dado m ¿qué hará la empresa? ¿Cuál es la suma de las ganancias esperadas de los jugadores?

3.6 Referencias

BARON, D., y R. MYERSON. 1982. "Regulating a Monopolist with Unknown Costs." *Econometrica* 50:911-30.

BULOW, J., y P. KLEMPERER. 1991. "Rational Frenzies and Crashes." Stanford University Graduate School of Business Research Paper #1150.

CHATTERJEE, K., y W. SAMUELSON. 1983. "Bargaining under Incomplete Information." *Operations Research* 31:835-51.

DEERE, D. 1988. "Bilateral Trading as an Efficient Auction over Times." *Journal of Political Economy* 96:100-15.

HALL, R., y E. LAZEAR. 1984. "The Excess Sensitivity of Layoffs and Quits to Demand." *Journal of Labor Economics* 2:233-57.

HARSANYI, J. 1967. "Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players Parts I II and III." *Management Science* 14:159-82, 320-34, 486-502.

—. 1973. "Games with Randomly Disturbed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points." *International Journal of Game Theory* 2:1-23.

HART, O. 1983. "Optimal Labour Contracts under Asymmetric Information." *Review of Economic Studies* 50:3-35.

MCAFEE, P. y J. MCMILLAN. 1987. "Auctions and Bidding." *Journal of Economic Literature* 25:699-738.

MYERSON, R. 1979. "Incentive Compatability and the Bargaining Problem." *Econometrica* 47:61-73.

—. 1981. "Optimal Auction Design." *Mathematics of Operations Research* 6:58-73.

—. 1985. "Bayesian Equilibrium and Incentive Compatibility: An Introduction." In *Social Goals and Social Organization*. L. Hurwicz, D. Schmeidler, y H. Sonnenschein, eds. Cambridge: Cambridge University Press.

MYERSON, R., y M. SATTERHWAITE. 1983. "Efficient Mechanisms for Bilateral Trading." *Journal of Economic Theory* 28:265-81.

SAPPINGTON, D. 1983. "Limited Liability Contracts between Principal and Agent." *Journal of Economic Theory* 21:1-21.