EJERCICIOS: EQUILIBRIOS BAYESIANOS

Ejercicio 1

Considere un juego de dos jugadores en el que cada jugador tiene dos acciones posibles. El jugador 1 juega primero. El jugador 2 observa la jugada de 1 antes de tomar su propia decisión, pero no sabe con certeza cuáles son las preferencias de 1. Sabe que hay tres tipos posibles de jugador 1 y la probabilidad de enfrentar a cada uno de los tres tipos es 1/3. El tipo “A” de jugador 1 obtiene un pago de 100 si juega “izquierda” y 0 si juega “derecha”, con independencia de lo que haga el jugador 2. El tipo “B” de jugador 1 obtiene un pago de 50 si juega “izquierda” y el jugador 2 juega “arriba” y obtiene 40 si juega “izquierda” y el jugador 2 juega “abajo”. El tipo “B” de jugador 1 obtiene un pago de 10 si juega “derecha” y el jugador 2 juega “arriba” y obtiene 20 si juega “derecha” y el jugador 2 juega “abajo”. Finalmente, el tipo “C” de jugador 1 obtiene un pago de 0 si juega “izquierda” y de 40 si juega “derecha”, con independencia de lo que haga el jugador 2.

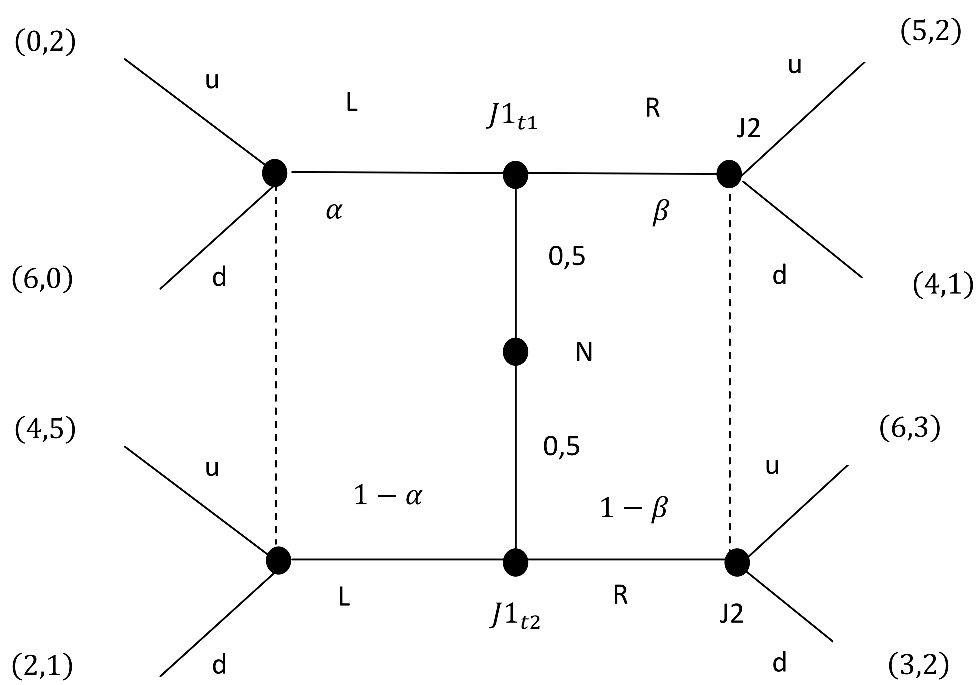
1.1. ¿Cuál es la probabilidad que el jugador 2 debería asignar a que el jugador 1 fuera de tipo “C” después de haber observado que el jugador 1 jugó “izquierda”? Fundamente su respuesta.

1.2. ¿Cuál es la probabilidad que el jugador 2 debería asignar a que el jugador 1 fuera de tipo “A” después de haber observado que el jugador 1 jugó “izquierda”? Fundamente su respuesta.

1.3. ¿Cuál es la probabilidad que el jugador 2 debería asignar a que el jugador 1 fuera de tipo “B” después de haber observado que el jugador 1 jugó “derecha”? Fundamente su respuesta.

Ejercicio 2

Considere un juego de información incompleta con la siguiente forma extensiva:



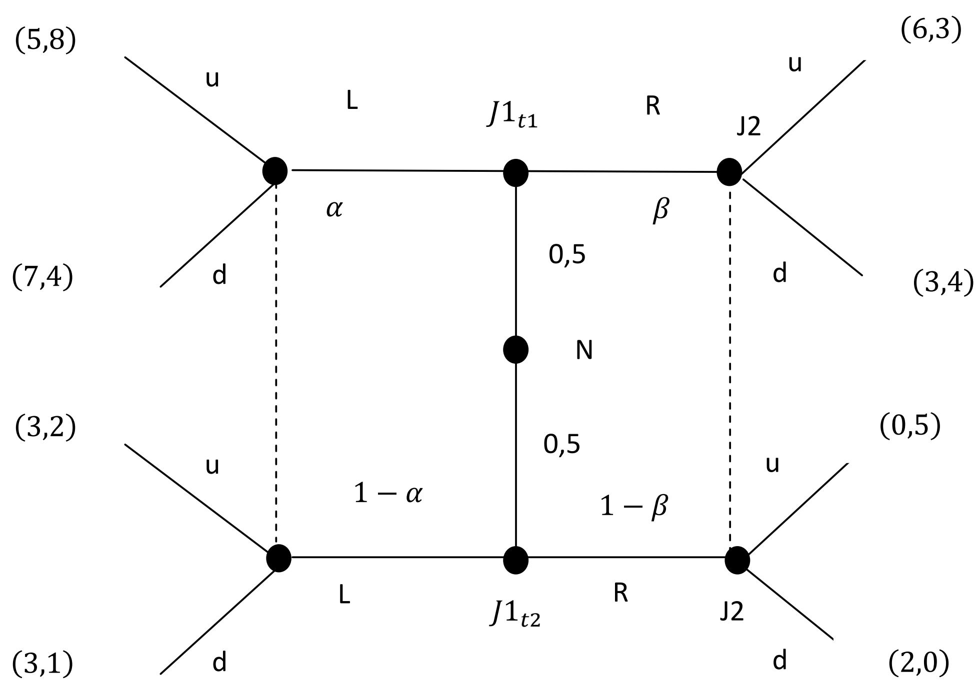
Determine los equilibrios existentes en este juego y explique en caso de descartar algún equilibrio.

Ejercicio 3
Considere un juego de dos jugadores en el que el jugador 1 tiene tres acciones posibles y el jugador 2 dos acciones. El jugador 1 juega primero. El jugador 2 observa la jugada de 1 antes de tomar su propia decisión, pero no sabe con certeza cuáles son las preferencias de 1. Sabe que hay cuatro tipos posibles de jugador 1 y observa 20 elecciones de la naturaleza y del jugador 1 de acuerdo a la siguiente tabla:

	L	M	R
J1t1	1	2	2
J1t2	2	3	0
J1t3	3	1	1
J1t4	4	0	1

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente jugada el jugador 2 se enfrente a un jugador 1 de tipo 3?
3.2. Calcule la probabilidad de que cada tipo de jugador 1 realice cada acción específica.
3.3. Calcule la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 1 dado que jugó L.
3.4. Calcule la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 2 dado que jugó M.
3.5. Calcule la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 3 dado que jugó R.

Ejercicio 4
Considere un juego de información incompleta con la siguiente forma extensiva:

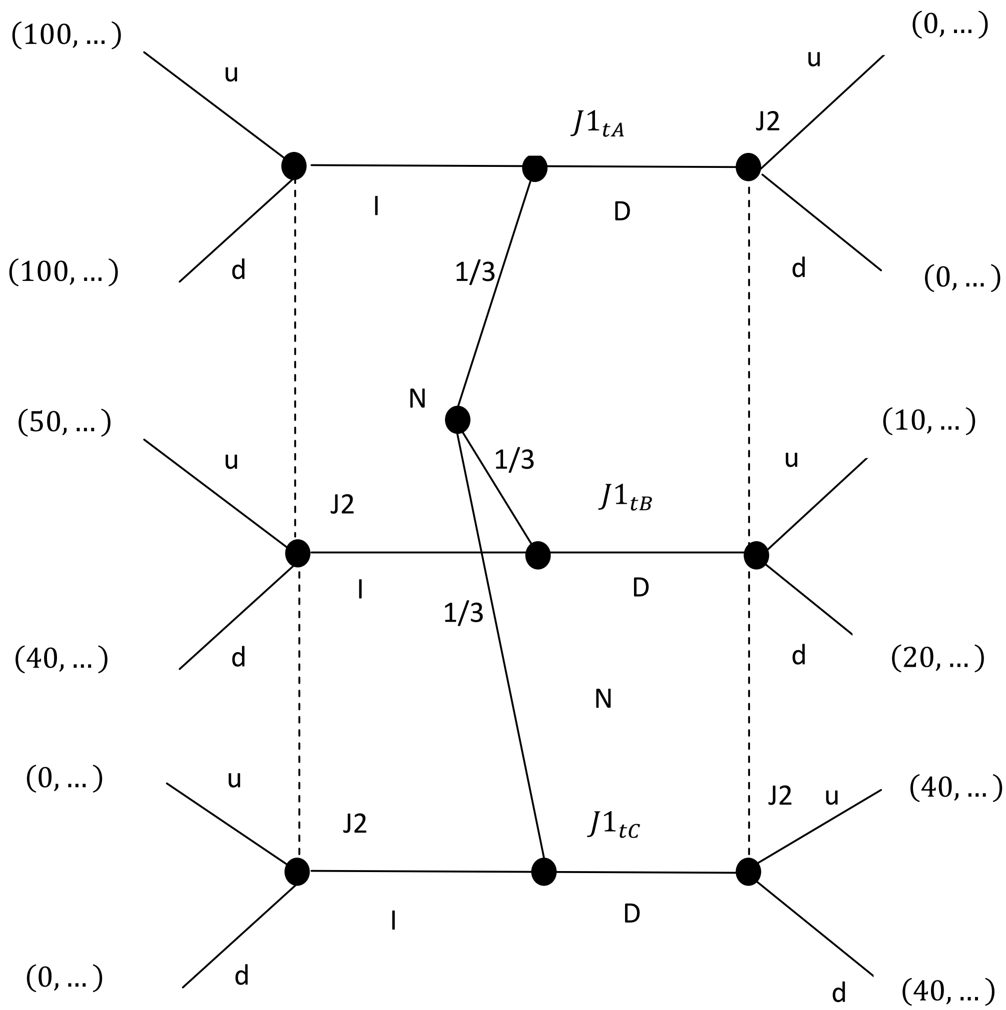


Determine los equilibrios existentes en este juego y explique en caso de descartar algún equilibrio.

Pauta de respuesta

Ejercicio 1

Haciendo la transformación de Harsanyi, este juego puede representarse con la siguiente forma extensiva:



1.1. ¿Cuál es la probabilidad que el jugador 2 debería asignar a que el jugador 1 fuera de tipo "C" después de haber observado que el jugador 1 jugó "izquierda"? Fundamente su respuesta.

Revisando los pagos, es claro que $J1_{tC}$ nunca jugaría izquierda, ya que obtiene 40 si juega derecha y 0 si juega izquierda. Por lo tanto, la probabilidad que debería asignar J2 a que J1 fuera de tipo C después de haber observado que J1 jugó izquierda es cero.

Esto mismo puede deducirse más formalmente como sigue. Mirando los pagos, concluimos que $P(I|J1_{tC}) = 0$. Por lo tanto, aplicando la fórmula de Bayes, llegamos a que la probabilidad de que J1 sea tipo C si jugó I es cero:

$$P(J1_{tC}|I) = \frac{P(I|J1_{tC})P(J1_{tC})}{P(I)} = 0$$

1.2. ¿Cuál es la probabilidad que el jugador 2 debería asignar a que el jugador 1 fuera de tipo "A" después de haber observado que el jugador 1 jugó "izquierda"? Fundamente su respuesta.

Observando los pagos vemos que $J1_{tA}$ juega I, pero $J1_{tB}$ también juega I. Entonces, después de observar que $J1$ jugó izquierda, lo único que puede concluir $J2$ es que $J1$ es de tipo A o B. A su vez, la probabilidad de que $J1$ sea de tipo A es 1/3 y la probabilidad de que sea de tipo B es también 1/3. Por lo tanto, la probabilidad de que sea de tipo A después de haber observado que jugo I es $1/2 = (1/3)/(2/3)$.

Muestro lo mismo ahora más formalmente. La probabilidad que buscamos es $P(J1_{tA}|I)$. Usando Bayes:

$$P(J1_{tA}|I) = \frac{P(I|J1_{tA})P(J1_{tA})}{P(I)}$$

Sabemos que la probabilidad a priori de que J1 sea de tipo A es: $P(J1_{tA}) = 1/3$. Y observando los pagos en la forma extensiva concluimos que $P(I|J1_{tA}) = 1$. Falta entonces determinar $P(I)$.

La probabilidad no condicional de I resulta de sumar los productos de las probabilidades de que cada tipo juegue I por las probabilidades de cada tipo:

$$P(I) = P(I|J1_{tA})P(J1_{tA}) + P(I|J1_{tB})P(J1_{tB}) + P(I|J1_{tC})P(J1_{tC})$$

Y observando los pagos, concluimos que: $P(I|J1_{tA}) = P(I|J1_{tB}) = 1$ y $P(I|J1_{tC}) = 0$. Sabemos que las probabilidades a priori de los tres tipos son 1/3. Por lo tanto:

$$P(I) = 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Concluimos entonces que:

$$P(J1_{tA}|I) = \frac{P(I|J1_{tA})P(J1_{tA})}{P(I)} = \frac{1 \times 1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

1.3. ¿Cuál es la probabilidad que el jugador 2 debería asignar a que el jugador 1 fuera de tipo "B" después de haber observado que el jugador 1 jugó "derecha"? Fundamente su respuesta.

Sabemos a partir de observar los pagos que un jugador 1 de tipo B siempre juega izquierda. Por lo tanto, la probabilidad que J2 debería asignar a que J1 fuera de tipo B después de haber observado que jugó derecha es cero.

Más formalmente:

$$P(J1_{tB}|D) = \frac{P(D|J1_{tB})P(J1_{tB})}{P(D)} = 0$$

Ya que $P(D|J1_{tB}) = 0$.

Ejercicio 2.

Se trata de determinar todos los equilibrios posibles. Vamos viendo uno por vez.

2.1. ¿Existe un equilibrio agrupador en L?

Si existiera un equilibrio agrupador en L, la elección de L por parte del jugador 1 no sería informativa para el jugador 2. No podría deducir nada después de observar esa jugada. Por lo tanto, la probabilidad que J2 asigna a que J1 sea de tipo 1 es igual antes y después de observar que J1 jugó L: $\alpha = 0{,}5$.

¿Cuáles son las mejores respuestas de J2?

a) Si J1 juega L:

$$UE_{J2}(u|L) = \alpha 2 + (1-\alpha)5 = 5 - 3\alpha = 3{,}5$$
$$UE_{J2}(d|L) = \alpha 0 + (1-\alpha)1 = 1 - \alpha = 0{,}5$$

⇨ J2 juega u si J1 juega L.

b) Si J1 juega R:

$$UE_{J2}(u|R) = \beta 2 + (1-\beta)3 = 3 - \beta$$
$$UE_{J2}(d|R) = \beta 1 + (1-\beta)2 = 2 - \beta$$

⇨ J2 juega u si J1 juega R.

¿Cuáles son las mejores respuestas de J1?

a) Si J1 es de tipo 1:

$$UE_{J1_{t1}}(L) = 0 < 5 = UE_{J1_{t1}}(R)$$

Dado que, como sabemos, J2 juega siempre u.

⇨ $J1_{t1}$ juega R.

Con esto ya podemos afirmar que **no** hay un equilibrio agrupador en L. De todos modos, veamos qué ocurre con el otro tipo de jugador 1.

b) Si J1 es de tipo 2:

$$UE_{J1_{t2}}(L) = 4 < 6 = UE_{J1_{t2}}(R)$$

⇨ $J1_{t2}$ juega R.

2.2. ¿Existe un equilibrio agrupador en R?

Si existiera un equilibrio agrupador en R, la elección de R por parte del jugador 1 no sería informativa para el jugador 2. Por lo tanto, la probabilidad que J2 asigna a que J1 sea de tipo 1 es igual antes y después de observar que J1 jugó R: $\beta = 0{,}5$.

¿Cuáles son las mejores respuestas de J2?

a) Si J1 juega L:

$$UE_{J2}(u|L) = \alpha 2 + (1-\alpha)5 = 5 - 3\alpha$$
$$UE_{J2}(d|L) = \alpha 0 + (1-\alpha)1 = 1 - \alpha$$

Por lo tanto, J2 jugaría u si y sólo si $5 - 3\alpha > 1 - \alpha$ o, lo que es lo mismo, si $\alpha < 2$. Pero esto siempre ocurre ya que $0 \leq \alpha \leq 1$.

- ⇨ $J2$ juega u si J1 elige L.

b) Si J1 juega R:

$$UE_{J2}(u|R) = 3 - \beta = 2{,}5$$
$$UE_{J2}(d|R) = 2 - \beta = 1{,}5$$

- ⇨ J2 juega u si J1 juega R.

¿Cuáles son las mejores respuestas de J1?

a) Si J1 es de tipo 1:

$$UE_{J1_{t1}}(L) = 0 < 5 = UE_{J1_{t1}}(R)$$

Dado que, como sabemos, J2 juega siempre u.

- ⇨ $J1_{t1}$ juega R.

b) Si J1 es de tipo 2:

$$UE_{J1_{t2}}(L) = 4 < 6 = UE_{J1_{t2}}(R)$$

- ⇨ $J1_{t2}$ juega R.

Conclusión: hay un equilibrio agrupador en R. En este equilibrio, J2 siempre juega u.

2.3. ¿Existe un equilibrio separador en el que el tipo 1 juega L y el tipo 2 juega R?

No hay un equilibrio de este tipo porque $J1_{t1}$ sabe que J2 siempre juega u, lo cual implica que $J1_{t1}$ obtendría 0 si jugara L cuando podría obtener 5 jugando R.

2.4. ¿Existe un equilibrio separador en el que el tipo 1 juega R y el tipo 2 juega L?

En un equilibrio de este tipo, $\beta = 1, \alpha = 0$. J2 juega u. $J1_{t1}$ obtendría 5 si jugara R y 0 si jugara L. Por lo tanto $J1_{t1}$ jugaría R. A su vez, $J1_{t2}$ obtendría 6 si jugara R y 4 si jugara L. Por lo tanto $J1_{t2}$ también jugaría R. No hay entonces un equilibrio separador RL.

2.5. ¿Existen equilibrios semi-separadores?

No hay en este juego equilibrios de este tipo porque no hay nada que haga aleatorias las estrategias del jugador 1.

Ejercicio 3

3.1. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente jugada el jugador 2 se enfrente a un jugador 1 de tipo 3?

Calculo las probabilidades marginales en los tipos de jugador 1:

	L	M	R	Prob marginal en tipos
J1t1	1/20	2/20	2/20	5/20
J1t2	2/20	3/20	0/20	5/20
J1t3	3/20	1/20	1/20	5/20
J1t4	4/20	0/20	1/20	5/20

La probabilidad de que el jugador 2 enfrente a un jugador 1 de tipo 3 en la siguiente jugada es entonces: $P(J1_{t1}) = 5/20 = 1/4$.

3.2. Calcule la probabilidad de que cada tipo de jugador 1 realice cada acción específica.

Estas son las probabilidades condicionales a los tipos. Por ejemplo, la probabilidad de que un jugador 1 de tipo 1 juegue L es: $P(L|J1_{t1}) = 1/5$. Esto también puede leerse como la probabilidad de que el jugador 1 juegue L condicional a que es de tipo 1 o dado que es de tipo 1. Presento en el siguiente cuadro todas estas probabilidades:

	L	M	R
J1t1	1/5	2/5	2/5
J1t2	2/5	3/5	0/5
J1t3	3/5	1/5	1/5
J1t4	4/5	0/5	1/5

3.3. Calcule la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 1 dado que jugó L.

Esa probabilidad puede calcularse usando Bayes:

$$P(J1_{t1}|L) = \frac{P(L|J1_{t1})P(J1_{t1})}{P(L)}$$

Sabemos que $P(L|J1_{t1}) = 1/5$ y que $P(J1_{t1}) = 1/4$. Podemos calcular el denominador como:

$$P(L) = P(L|J1_{t1})P(J1_{t1}) + P(L|J1_{t2})P(J1_{t2}) + P(L|J1_{t3})P(J1_{t3}) + P(L|J1_{t4})P(J1_{t4})$$

Usando los resultados obtenidos en 3.1 y 3.2:

$$P(L) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

Por lo tanto:

$$P(J1_{t1}|L) = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{4}}{0{,}5} = 0{,}1$$

3.4. Calcule la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 2 dado que jugó M.
Por un procedimiento análogo al del punto anterior, llegamos a que:

$$P(J1_{t2}|M) = \frac{3}{6} = 0{,}5$$

3.5. Calcule la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 3 dado que jugó R.

$$P(J1_{t3}|R) = \frac{1}{4}$$

Ejercicio 4

Se trata de determinar todos los equilibrios posibles. Vamos viendo uno por vez.

4.1. ¿Existe un equilibrio agrupador en L?

Si existiera un equilibrio agrupador en L, la elección de L por parte del jugador 1 no sería informativa para el jugador 2. No podría deducir nada después de observar esa jugada. Por lo tanto, en un equilibrio de este tipo, la probabilidad que J2 asigna a que J1 sea de tipo 1 es igual antes y después de observar que J1 jugó L: $\alpha = 0{,}5$.

¿Cuáles son las mejores respuestas de J2?
a) Si J1 juega L:

$$UE_{J2}(u|L) = \alpha 8 + (1-\alpha)2 = 2 + 6\alpha = 5$$
$$UE_{J2}(d|L) = \alpha 4 + (1-\alpha)1 = 1 + 3\alpha = 2{,}5$$

- ⇨ J2 juega u si J1 juega L.

b) Si J1 juega R:

$$UE_{J2}(u|R) = \beta 3 + (1-\beta)5 = 5 - 2\beta$$
$$UE_{J2}(d|R) = \beta 4 + (1-\beta)0 = 4\beta$$

- ⇨ $UE_{J2}(u|R) > UE_{J2}(d|R)$ y J2 juega *u* **si** la probabilidad que asigna a que el jugador 1 sea de tipo 1 después de observar que jugó R es $\beta < 5/6$. Si, en cambio, piensa que $\beta > 5/6$, entonces juega *d*. Si piensa que $\beta = 5/6$, entonces J2 es estrictamente indiferente y se supone que tira una moneda para decidir si juega *u* o *d*.

Comentario: en un equilibrio agrupador en L, como el que estamos analizando, una jugada R no se observa en equilibrio, porque el jugador 1 nunca jugaría R. Entonces el jugador 2 no tiene posibilidades de hacer una actualización bayesiana de sus creencias acerca del tipo del jugador 1 después de observar esta jugada que está "fuera del sendero de equilibrio". Nada restringe entonces esas creencias. El jugador 2 puede perfectamente creer que la probabilidad de que el jugador 1 sea de tipo 1 después de que jugó R sea menor, igual o mayor a $5/6$ y, por lo tanto, puede responder a una jugada R por parte del jugador 1 eligiendo *u* o *d*. El jugador 1 no puede descartar ninguna de estas posibilidades.

¿Cuáles son las mejores respuestas de J1?

a) Si J1 es de tipo 1:

$$UE_{J1_{t1}}(L) = 5 < 6 = UE_{J1_{t1}}(R) \;\; si\; \beta < \frac{5}{6}$$
$$UE_{J1_{t1}}(L) = 5 > 3 = UE_{J1_{t1}}(R) \;\; si\; \beta > \frac{5}{6}$$
$$UE_{J1_{t1}}(L) = 5 > 4{,}5 = 0{,}5 \times 6 + 0{,}5 \times 3 = UE_{J1_{t1}}(R) \;\; si\; \beta = 5/6$$

Por lo tanto, $J1_{t1}$ juega L con certeza, si $\beta > 5/6$, y juega L con 50% de probabilidad, si $\beta = 5/6$. No juega L si $\beta < 5/6$.

Veamos qué ocurre con el otro tipo de jugador 1.

b) Si J1 es de tipo 2:

$$UE_{J1_{t2}}(L) = 3 > 0 = UE_{J1_{t2}}(R) \;\; si\; \beta < \frac{5}{6}$$
$$UE_{J1_{t2}}(L) = 3 > 2 = UE_{J1_{t2}}(R) \;\; si\; \beta > \frac{5}{6}$$
$$UE_{J1_{t2}}(L) = 3 > 1 = 0{,}5 \times 0 + 0{,}5 \times 2 = UE_{J1_{t2}}(R) \;\; si\; \beta = 5/6$$

Por lo tanto, $J1_{t2}$ juega L, independientemente de cuáles sean las creencias β. Concluimos entonces que hay un equilibrio agrupador en L si $\beta > 5/6$.

4.2. ¿Existe un equilibrio agrupador en R?

Los resultados anteriores pueden usarse para demostrar que no hay un equilibrio agrupador en R en este ejemplo. Esto es inmediato ya que el jugador 1 de tipo 2 prefiere jugar L antes que R, con independencia de las creencias fuera del sendero de equilibrio del jugador 2.

4.3. ¿Existe un equilibrio separador en el que el tipo 1 juega L y el tipo 2 juega R?

No lo hay ya que el jugador 1 de tipo 2 no jugaría R. En efecto, lo máximo que puede obtener $J1_{t2}$ si juega R es 2 y lo mínimo que puede obtener si juega L es 3. Por lo tanto, $J1_{t2}$ juega L. Sin usar este argumento de dominancia, podemos llegar a la misma conclusión notando que, en un equilibrio separador como el indicado, $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. El jugador 2 elige siempre *u* ya que $8 > 4\; y\; 5 > 0$. Entonces $UE_{J1_{t2}}(L) = 3 > 0 = UE_{J1_{t2}}(R)$.

4.4. ¿Existe un equilibrio separador en el que el tipo 1 juega R y el tipo 2 juega L?

Tampoco hay un equilibrio de este tipo en este ejemplo. En un equilibrio separador como este, el jugador 2 concluye que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Entonces elige u, si observa L (2>1), y d, si observa R (3<4). El jugador 1 sabe esto y concluye que $UE_{J1_{t1}}(L) = 5 > 3 = UE_{J1_{t1}}(R)$. Por lo tanto, el jugador 1 de tipo 1 juega L. No hay entonces un equilibrio separador RL.