

Ejercicios 3

1. Considere la siguiente versión del juego del ultimátum. Hay 3 monedas. J1 puede ofrecer quedarse con 1 o con 2. J2 acepta o rechaza. Si rechaza, los dos jugadores obtienen 0. Suponga que los jugadores sólo se preocupan por la cantidad de monedas que obtienen y prefieren tener más monedas.

1.1. ¿Es este un juego de información perfecta o imperfecta? Fundamente su respuesta.

1.2. Identifique todos los subjuegos. Explique.

1.3. Para cada equilibrio de Nash del juego, diga si es o no perfecto por subjuegos. Fundamente su respuesta.

2. Tres jugadores participan en un juego en el que cada jugador tiene una sola jugada con dos acciones posibles que, por comodidad, llamaremos izquierda (I) y derecha (D). El jugador 1 (J1) juega primero. El jugador 2 (J2) juega segundo. Cuando llega su turno de jugar, conoce la decisión tomada antes por el jugador 1. El jugador 3 (J3) es el último en jugar. Cuando le toca jugar, conoce la jugada elegida por el jugador 2, pero desconoce qué jugada hizo antes el jugador 1.

2.1. ¿Es un juego de información perfecta o imperfecta? Fundamente su respuesta.

2.2. Represente el árbol del juego. Identifique los conjuntos de información. Explique.

2.3. Identifique todos los subjuegos. Explique.

3. Dos jugadores juegan dos veces el siguiente juego de etapa:

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	A	(4,4)	(0,9)
	B	(9,0)	(2,2)

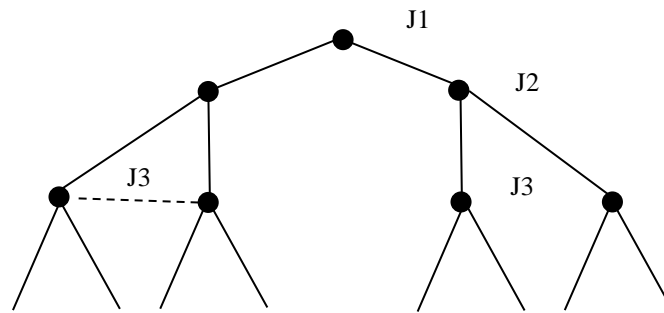
En cada etapa, los jugadores eligen en forma simultánea entre las acciones A y B. Los números que aparecen en la matriz son los pagos que los jugadores obtienen en cada etapa. Al terminar la primera etapa, los jugadores observan las jugadas elegidas y, por lo tanto, pueden determinar los pagos de la etapa. El pago total es la suma simple (sin descuento o con tasa de descuento cero) de los pagos de cada etapa.

3.1. Represente la forma extensiva del juego. Explique.

3.2. Identifique los subjuegos. Explique.

3.3. Identifique un equilibrio perfecto por subjuegos. Explique.

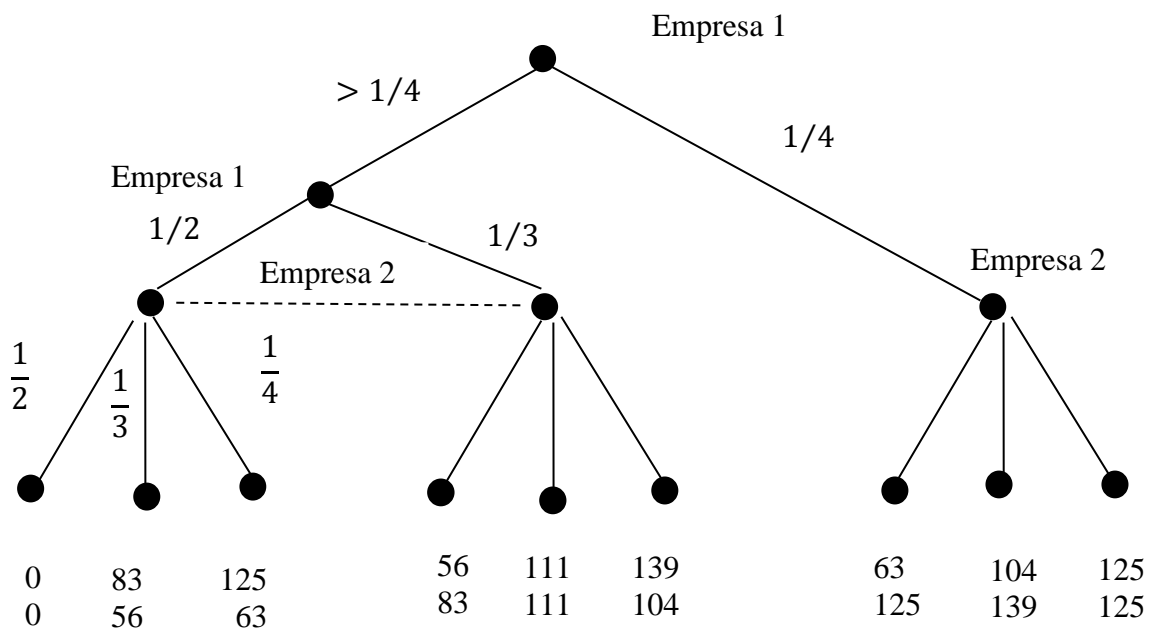
4. Considere el siguiente árbol de un juego con tres jugadores:



4.1. (1 punto) ¿Es este un juego de información perfecta o imperfecta? Fundamente su respuesta.

4.2. (1 punto) Identifique todos los subjuegos. Explique.

5. Considere el siguiente duopolio en el que la empresa 1 hace una jugada inicial que determina si podrá producir un cuarto o más de un cuarto. Si elige producir más de un cuarto, luego hace otra jugada en la que decide si produce un tercio o un medio. Cuando le toca jugar, la empresa 2 observa la primera jugada de la empresa 1, pero no la segunda. El árbol del juego es el que sigue:



5.1. (1 punto) Identifique todos los subjuegos. Explique.

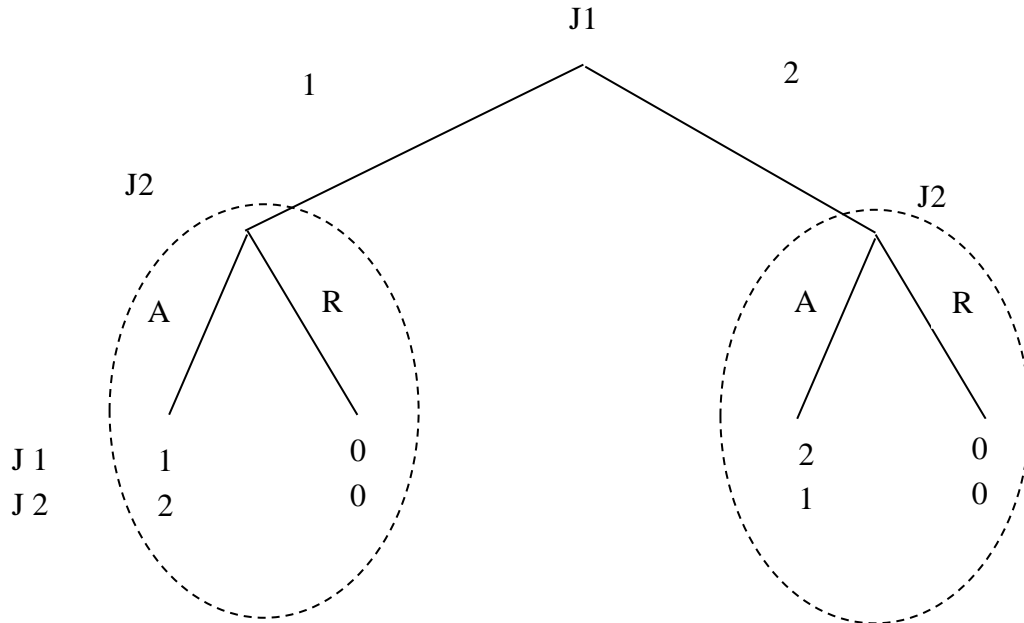
5.2. (1 punto) Identifique todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras) de cada subjuego. Explique.

5.3. (1 punto) Identifique el o los equilibrios perfectos por subjuegos. Explique.

Pauta de respuesta

1.1. Es un juego de información perfecta ya que los dos jugadores conocen todas las jugadas previas del juego. Más formalmente, todos los conjuntos de información son “singletons”, es decir que están integrados por un único nodo.

1.2. Para identificar los subjuegos es útil presentar el árbol del juego:



Identificamos dos subjuegos que empiezan en los dos nodos en que le toca jugar a J2. (a) En los dos nodos en que le toca jugar a J2 el conjunto de información inicial contiene un único nodo. (b) Los dos subjuegos contienen a todos los nodos que le siguen (en este caso, sólo le siguen nodos terminales). (c) No se intersecta ningún otro conjunto de información.

1.3. Ya mostramos en clase que este juego tiene la siguiente representación en forma normal y los siguientes tres equilibrios de Nash:

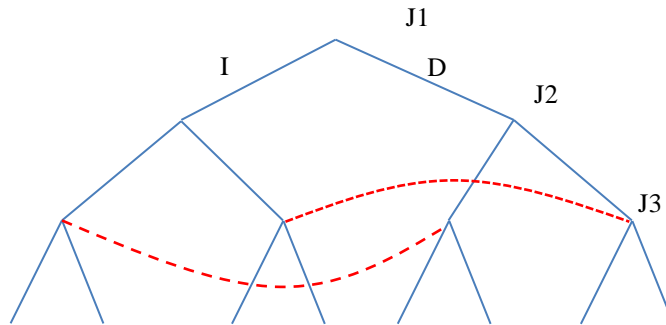
		Jugador 2			
		(A, A)	(A, R)	(R, A)	(R, R)
Jugador 1	1	1,2	1,2	0,0	0,0
	2	2,1	0,0	2,1	0,0

- (i) Equilibrio de Nash (1, (A, R)): no es perfecto por subjuegos porque no es un equilibrio de Nash en el subjuego “derecho” (el que sigue a la jugada 2 de J1).
- (ii) Equilibrio de Nash (2, (R, A)): no es perfecto por subjuegos porque no es un equilibrio de Nash en el subjuego “izquierdo” (el que sigue a la jugada 1 de J1). Los dos equilibrios de Nash anteriores incluyen amenazas “vacías”: J2 está “amenazando” con rechazar ofertas que, llegado el momento, jamás rechazaría.
- (iii) Equilibrio de Nash (2, (A, A)): es perfecto por subjuegos. Es un equilibrio de Nash en los dos subjuegos que empiezan cuando le toca jugar a J2.

2.1. ¿Es un juego de información perfecta o imperfecta? Fundamente su respuesta.

Es un juego de información imperfecta, porque J3 no conoce la jugada previa de J1.

2.2. Represente el árbol del juego. Identifique los conjuntos de información. Explique.



J1 tiene un único conjunto de información, integrado por el nodo inicial. J2 tiene dos conjuntos de información, integrados por un único nodo cada conjunto. Son los nodos que siguen a las acciones I y D de J1. J3 también tiene dos conjuntos de información, cada uno integrado por dos nodos. Estos conjuntos de información no son singletons. J3 puede distinguir los nodos que siguen a la acción I de los que siguen a la acción D de J2, pero no puede distinguir entre los dos nodos que siguen a I ni entre los dos nodos que siguen a D, porque no observa la decisión de J1. Esto es lo que hace que sea un juego de información imperfecta.

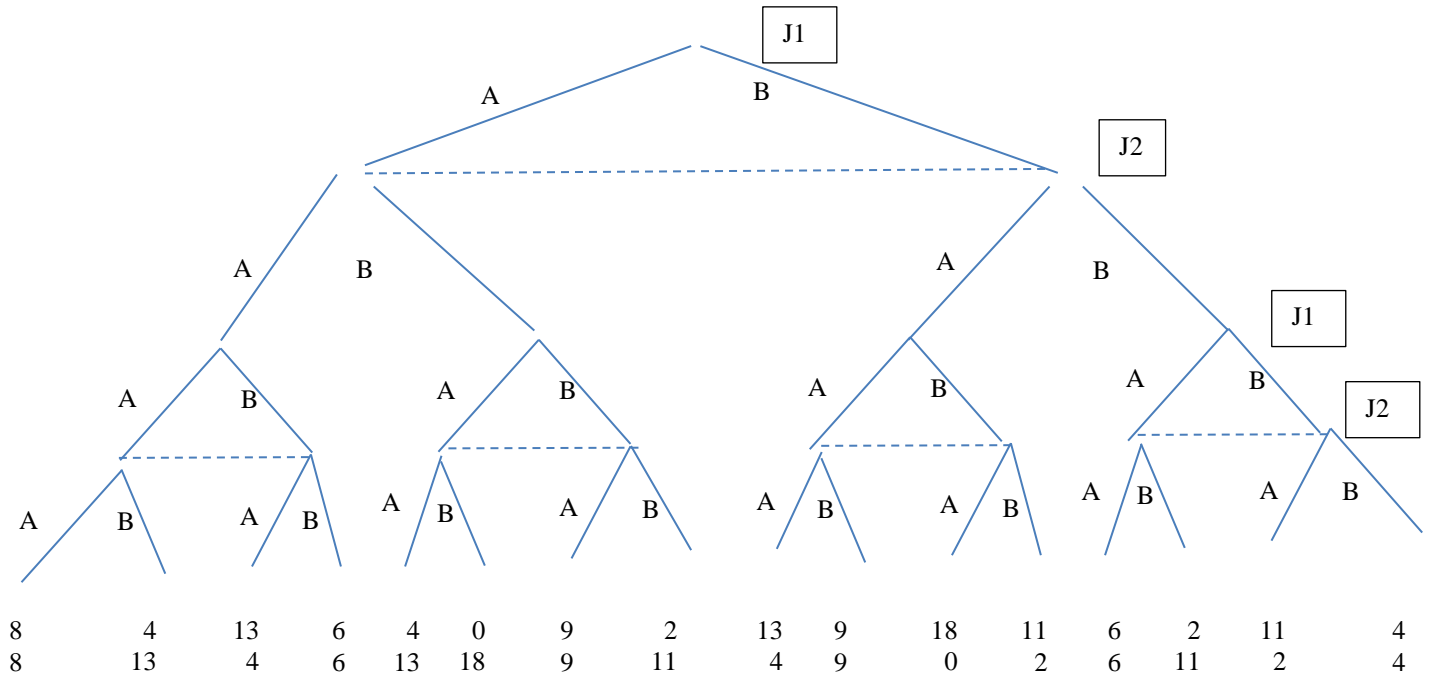
2.3. Identifique todos los subjuegos. Explique.

Empecemos por recordar que un subjuego en un juego en forma extensiva:

- Empieza en un nodo de decisión que constituye un conjunto de información con un único nodo (excluyendo el primero).
- Incluye a todos los nodos que lo siguen.
- No interseca a ningún otro conjunto de información.

No es posible identificar ningún subjuego en este ejemplo. Empezando por el final, vemos que J3 carece de singletons y, por lo tanto, ningún subjuego puede empezar en los nodos en que le toca jugar a J3 (se violaría el punto a). Los conjuntos de información de J2 son singletons y, en ese sentido, podrían en principio iniciar subjuegos. Sin embargo, las ramas del árbol que se inician con las jugadas de J2 no pueden ser subjuegos porque se viola el principio de no intersección (punto c de la definición). Hay entonces un único subjuego que es el juego completo.

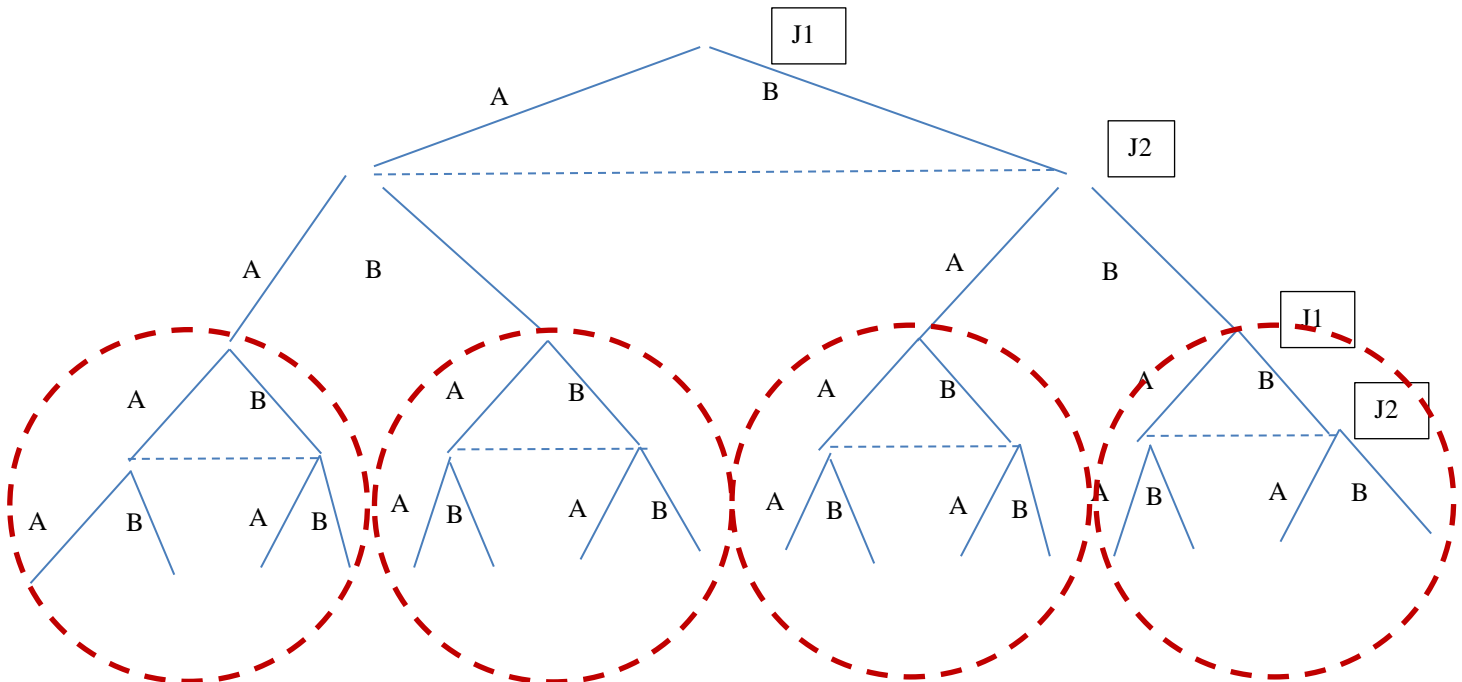
3.1. Represente la forma extensiva del juego. Explique.



En cada juego de etapa, los jugadores juegan en forma simultánea. El jugador 2 no sabe si está en el nodo de la izquierda o de la derecha, es decir que no sabe si el jugador 1 jugó (o va a jugar) A o B en esa etapa. Las líneas punteadas indican los conjuntos de información correspondientes. Al empezar la segunda etapa, ambos jugadores saben cómo se jugó la primera etapa. Los pagos están indicados al final y son la suma simple de los pagos de cada etapa.

3.2. Identifique los subjuegos. Explique.

Hay cuatro subjuegos propiamente dichos y el juego completo (que algunos autores lo incluyen como un subjuego). Los cuatro subjuegos corresponden a las ramas del árbol que se inician con la segunda jugada de J1. Estos cuatro subjuegos propios están destacados en la siguiente figura:



3.3. Identifique un equilibrio perfecto por subjuegos. Explique.

Un equilibrio perfecto por subjuegos es un perfil de estrategias que es un equilibrio de Nash en todos los subjuegos. Identifico el equilibrio de Nash del juego de etapa destacando con subrayado los pagos correspondientes a las mejores respuestas de cada jugador:

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	A	(4,4)	(0, <u>9</u>)
	B	(<u>9</u> ,0)	(<u>2</u> , <u>2</u>)

Hay entonces un equilibrio de Nash en el que ambos eligen la jugada B. En los cuatro subjuegos de la segunda etapa el equilibrio de Nash es el mismo: B,B. Los pagos de la segunda etapa son entonces (2,2).

En la primera etapa los jugadores saben cuáles son los resultados que se obtendrán en la segunda etapa. Por lo tanto, pueden calcular los pagos totales, es decir del juego completo, correspondientes a todas las combinaciones de jugadas de la primera etapa sumando los pagos (2,2) a la matriz de pagos del juego de etapa:

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	A	(4+2,4+2)	(0+2, <u>9+2</u>)
	B	(<u>9+2</u> ,0+2)	(<u>2+2</u> , <u>2+2</u>)

Con esta matriz podemos identificar equilibrios de Nash del juego completo. Vuelvo a destacar con subrayado los pagos correspondientes a las mejores respuestas. La

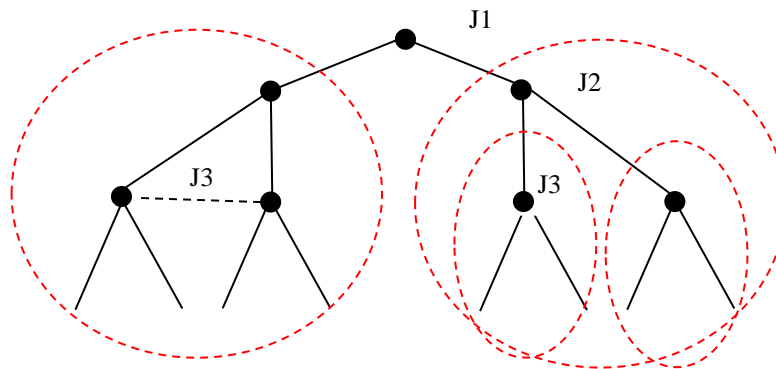
conclusión es que el equilibrio de Nash del juego completo implica que los jugadores eligen B también en la primera etapa.

Concluimos entonces que un perfil de estrategias en el que ambos jugadores juegan (B,BBBB) es perfecto por subjuegos. Notar que una estrategia en este juego es una acción en la primera etapa y una acción en cada uno de los subjuegos siguientes en que pueda encontrarse el jugador. Antes de la coma escribimos la acción de la primera etapa. Después de la coma indicamos las acciones o jugadas en cada uno de los cuatro subjuegos que siguen, donde el orden representa de izquierda a derecha los cuatro subjuegos identificados en el árbol del juego.

4.1. ¿Es este un juego de información perfecta o imperfecta? Fundamente su respuesta.

Es un juego de información imperfecta porque J3 tiene un conjunto de información con dos nodos.

4.2. Identifique todos los subjuegos. Explique.



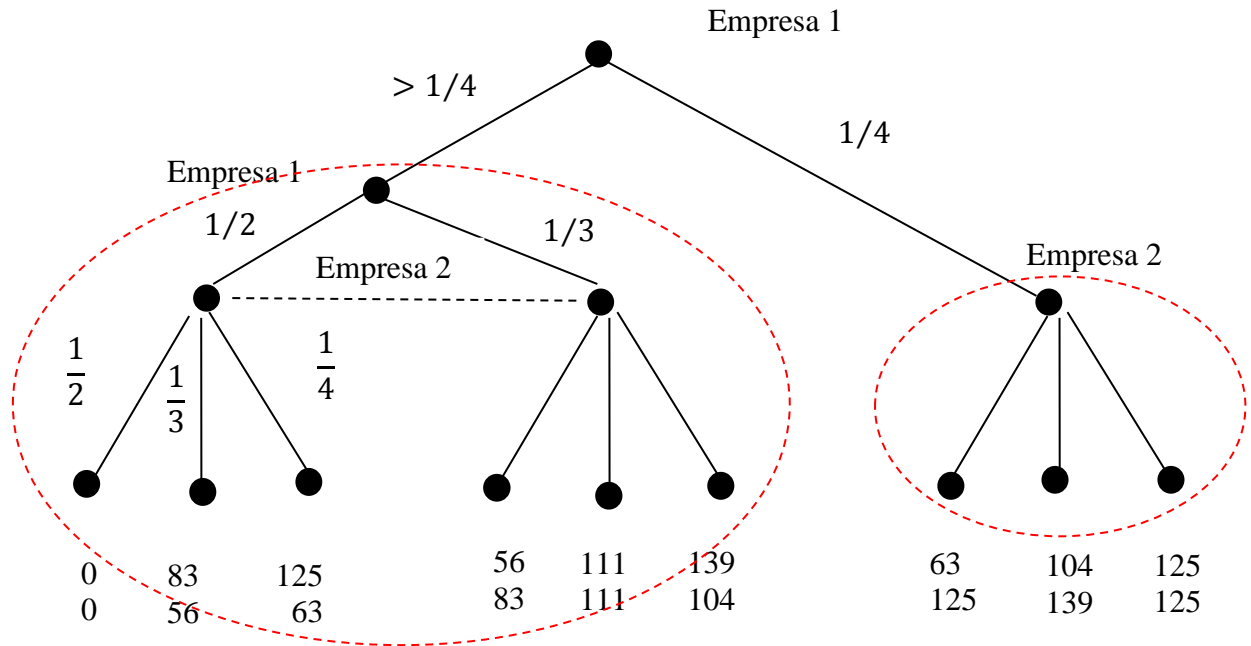
a) Después de que J1 jugó “izquierda”, todos los jugadores saben que le toca jugar a J2 y en qué nodo está. Este nodo es entonces un singleton de J2. Identificamos todos los nodos que lo siguen en el árbol y verificamos que ninguno de estos nodos pertenece a un conjunto de información que incluya otros nodos (no intersección). Se cumplen entonces las tres condiciones para definir un subjuego.

b) Después de que J1 jugó “derecha”, le toca jugar a J2 y sabe en qué nodo está. Identificamos los nodos que le siguen y verificamos la no intersección.

c) Después de que J1 jugó derecha y con independencia de lo que haya jugado J2, J3 sabe en qué nodo está parado. Cada uno de esos dos nodos inicia un subjuego muy simple en el que solo juega J3 y que incluye al propio nodo y a los nodos terminales correspondientes. Es inmediato que no hay intersección tampoco en estos casos.

En resumen, identificamos cuatro subjuegos propios.

5.1. Identifique todos los subjuegos. Explique.



Después de que la empresa 1 decidió producir más de $\frac{1}{4}$ se inicia un subjuego. Vuelve a jugar la empresa 1 y obviamente sabe que antes jugó $>1/4$. El subjuego incluye a los nodos que lo siguen. Ninguno de esos nodos pertenece a un conjunto de información que no esté en el subjuego. Se cumplen entonces las condiciones que definen un subjuego.

Después de que la empresa 1 eligió producir $1/4$, la empresa 2 empieza un subjuego. El nodo inicial es un singleton. El subjuego incluye a los nodos terminales que lo siguen.

5.2. Identifique todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras) de cada subjuego. Explique.

a) Forma normal del subjuego que sigue a la jugada $>1/4$ de la empresa 1:

		Empresa 2		
		1/2	1/3	1/4
Empresa 1	1/2	0,0	83,56	125, <u>63</u>
	1/3	<u>56</u> ,83	<u>111</u> , <u>111</u>	<u>139</u> ,104

Identifico con subrayado los pagos correspondientes a las mejores respuestas. Hay un equilibrio de Nash en este subjuego, en el cual ambas empresas producen $1/3$.

b) El subjuego que empieza después de que la empresa 1 jugó $1/4$ está integrado por un solo jugador, el jugador 2, con tres estrategias y los pagos indicados en el árbol. Lo mejor que puede hacer la empresa 2 en ese subjuego es producir $1/3$.

c) ¿Cómo identificamos los equilibrios de Nash del juego completo? Primero identificamos las estrategias:

Empresa 1 tiene tres estrategias posibles: $(>1/4, 1/2)$; $(>1/4, 1/3)$; $(1/4)$

Empresa 2 tiene 9 estrategias posibles: $(1/2, 1/2)$; $(1/2, 1/3)$; $(1/2, 1/4)$; $(1/3, 1/2)$; $(1/3, 1/3)$; $(1/3, 1/4)$; $(1/4, 1/2)$; $(1/4, 1/3)$; $(1/4, 1/4)$.

Forma normal:

		Empresa 2								
		$1/2, 1/2$	$1/2, 1/3$	$1/2, 1/4$	$1/3, 1/2$	$1/3, 1/3$	$1/3, 1/4$	$1/4, 1/2$	$1/4, 1/3$	$1/4, 1/4$
E1	$>1/4, 1/2$	0,0	0,0	0,0	83,56	83,56	83,56	<u>125,63</u>	<u>125,63</u>	<u>125,63</u>
	$>1/4, 1/3$	56,83	56,83	56,83	<u>111,111</u>	<u>111,111</u>	<u>111,111</u>	<u>139,104</u>	<u>139,104</u>	<u>139,104</u>
	$1/4$	<u>63,125</u>	<u>104,139</u>	<u>125,125</u>	63,125	104,139	<u>125,125</u>	63,125	<u>104,139</u>	125,125

En subrayado están destacados los pagos correspondientes a las mejores respuestas. Identificamos tres equilibrios de Nash en el juego completo.

5.3. Identifique el o los equilibrios perfectos por subjuegos. Explique.

Un equilibrio perfecto por subjuegos tiene que ser un equilibrio de Nash en todos los subjuegos. Evalúo entonces los tres equilibrios de Nash del juego completo para ver si cumplen o no el requisito adicional de que sean equilibrios de Nash en los subjuegos.

a) Equilibrio de Nash 1: empresa 1 juega $1/4$ y empresa 2 juega $(1/2, 1/3)$. La estrategia de la empresa 2 no es parte del equilibrio de Nash que identificamos en el subjuego que sigue a la jugada $>1/4$ de la empresa 1. Por lo tanto, este equilibrio de Nash del juego completo no es un equilibrio perfecto por subjuegos. La estrategia de la empresa 2 no es creíble porque en el subjuego que sigue a la jugada $>1/4$ de la empresa 1 la empresa 2 nunca jugaría $1/2$.

b) Equilibrio de Nash 2: empresa 1 juega $(>1/4, 1/3)$ y empresa 2 juega $(1/3, 1/2)$. Tampoco es un equilibrio perfecto por subjuegos, porque la empresa 2 no va a jugar $1/2$ después de que la empresa 1 jugó $1/4$. Esa jugada no es parte del equilibrio de Nash del subjuego que empieza después de que la empresa 1 jugó $1/4$.

c) Equilibrio de Nash 3; empresa 1 juega $(>1/4, 1/3)$ y empresa 2 juega $(1/3, 1/3)$. En el subjuego que empieza después de que la empresa 1 eligió $>1/4$, las jugadas $1/3$ son las mejores respuestas de ambas empresas. Por lo tanto, este equilibrio de Nash del juego completo cumple con el requisito adicional de ser un equilibrio de Nash del subjuego en cuestión. En el subjuego que empieza después de que la empresa 1 eligió $1/4$, la mejor respuesta de la empresa 2 es $1/3$. Por lo tanto, este equilibrio de Nash también cumple con el requisito de ser Nash del segundo subjuego. Se concluye entonces que este equilibrio de Nash es el único que es además perfecto por subjuegos.