Juegos dinámicos con información completa pero imperfecta

(Cambios respecto al orden sugerido por Gibbons: empezamos por sección 2.4 y luego vemos sección 2.3)

Información completa: jugadores conocen estructura del juego (quiénes juegan, qué acciones pueden elegir y cuáles son los pagos)

Información perfecta: jugadores conocen además las jugadas previas de los otros jugadores.

Repasamos las representaciones normal y extensiva del juego.

Las formas normal y extensiva especifican:

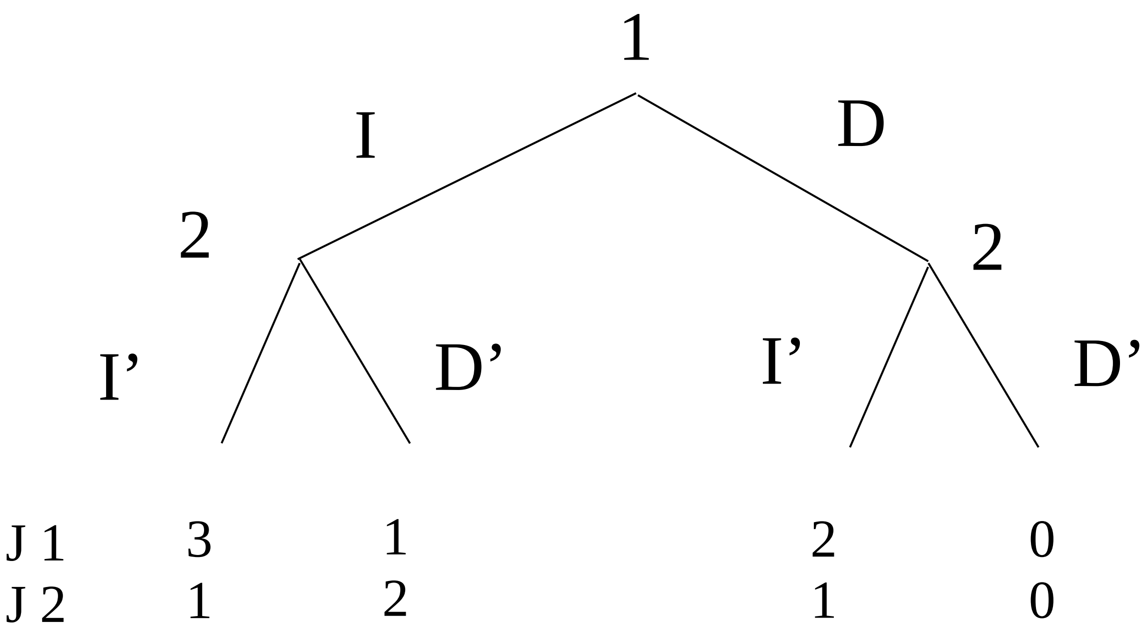
Forma normal	**Forma extensiva**
Jugadores	Jugadores
Estrategias disponibles	Momento en que cada jugador actúa
	Acciones disponibles en cada oportunidad en que puede actuar
	Qué sabe el jugador cuando le toca actuar
Pagos	Pagos

Si bien la forma normal parece ajustarse mejor a los juegos estáticos y la forma extensiva a los dinámicos, son en realidad dos representaciones alternativas y ambas pueden aplicarse a juegos estáticos tanto como a juegos dinámicos.

A) De la forma extensiva a la normal:

Estrategia: plan de acción que establece qué acción tomar en cualquier contingencia del juego en que al jugador pueda tocarle actuar.

Ejemplo (figura 2.4.1 de Gibbons):


1
I
D
2
2
I'
D'
I'
D'
J 1
J 2
3
1
1
2
2
1
0
0

Estrategias de jugador 1: I y D

Estrategias de jugador 2:

- I' si J1 jugó I e I' si J1 jugó D: (I', I')
- I' si J1 jugó I y D' si J1 jugó D: (I', D')
- D' si J1 jugó I e I' si J1 jugó D: (D', I')
- D' si J1 jugó I y D' si J1 jugó D: (D', D')

Notar: jugador 2 tiene dos acciones posibles, pero cuatro estrategias.

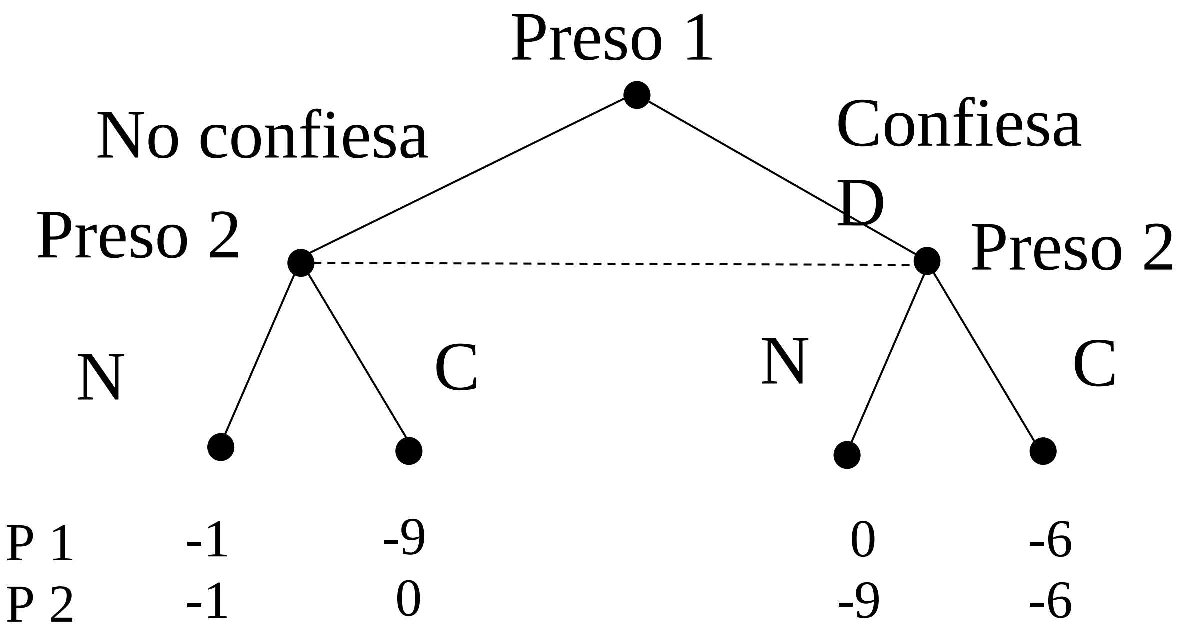
Representamos entonces la forma normal:

		Jugador 2			
		(I',I')	(I',D')	(D',I')	(D',D')
Jugador 1	I	3,1	3,1	1,2	1,2
	D	2,1	0,0	2,1	0,0

B) De la forma normal a la forma extensiva:

Ejemplo: la forma extensiva del dilema del prisionero.

- Suponemos que el prisionero 1 actúa primero y el 2 después.


Preso 1
No confiesa
Confiesa
D
Preso 2
Preso 2
N
C
N
C
P 1
P 2
-1
-1
-9
0
0
-9
-6
-6

- Para que sea un dilema del prisionero, el prisionero 2 no debe conocer lo que hizo el prisionero 1: línea punteada representa la ignorancia del prisionero 2 respecto al nodo en que se encuentra.

➔

- Jugadas simultáneas ≅ jugadas secuenciales + información imperfecta

Conjuntos de información

Def 1 (Gibbons): conjunto de nodos de decisión del jugador i tales que:

(i) al jugador le toca jugar en cada nodo del conjunto

(ii) cuando se llega a un nodo del conjunto, el jugador al que le toca jugar no sabe en qué nodo del conjunto se encuentra.

Def 2 (Rasmusen) : "El conjunto de información ω_i del jugador i en un punto particular del juego es el conjunto de diferentes nodos en el árbol del juego que él sabe que podrían ser el nodo real, pero que no puede diferenciar mediante la observación directa".

Notas:

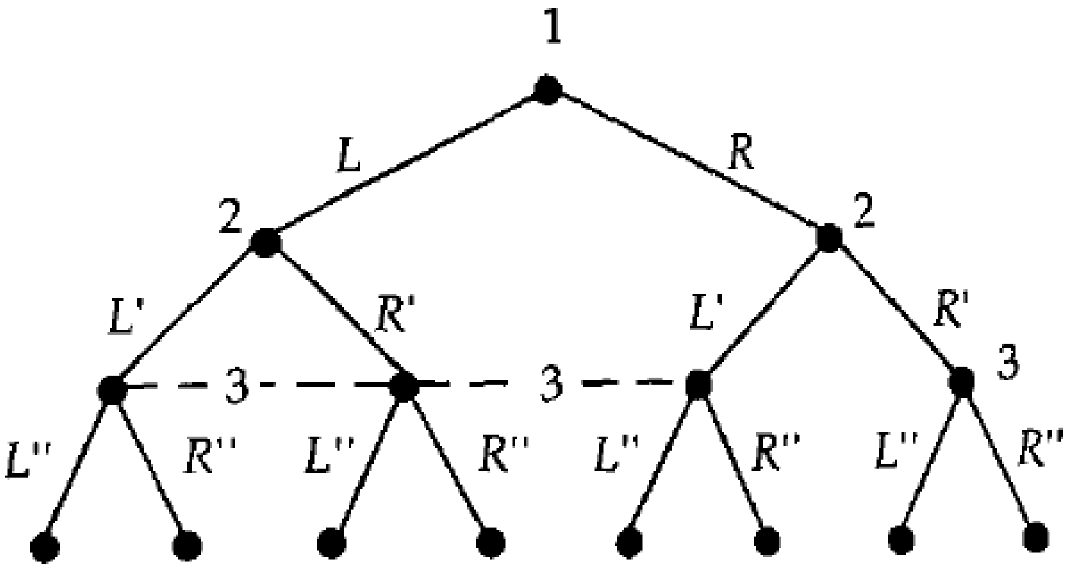
- Conjunto de información definido en base a observación directa, no en base a deducción.

➔

- El conjunto de acciones posibles debe ser el mismo en todos los nodos de un conjunto de información.

- Un nodo no puede pertenecer a dos conjuntos de información diferentes.

Ejemplo:



Jugador 3 tiene dos conjuntos de información:

- El nodo que sigue a las jugadas R,R’
- El conjunto formado por los otros tres nodos en que le toca jugar al jugador 3.

Información perfecta = jugador al que le corresponde jugar conoce toda la historia previa del juego
= todos los conjuntos de información tienen un único nodo.

➔ El ejemplo anterior es un juego de información imperfecta.

“Prefiero no saber”:

Hay ocasiones en que es mejor tener menos información…

Un ejemplo es el de la competencia entre dos empresas: la que juega último obtendría mejor resultado si no conociera la jugada de la que juega primero.

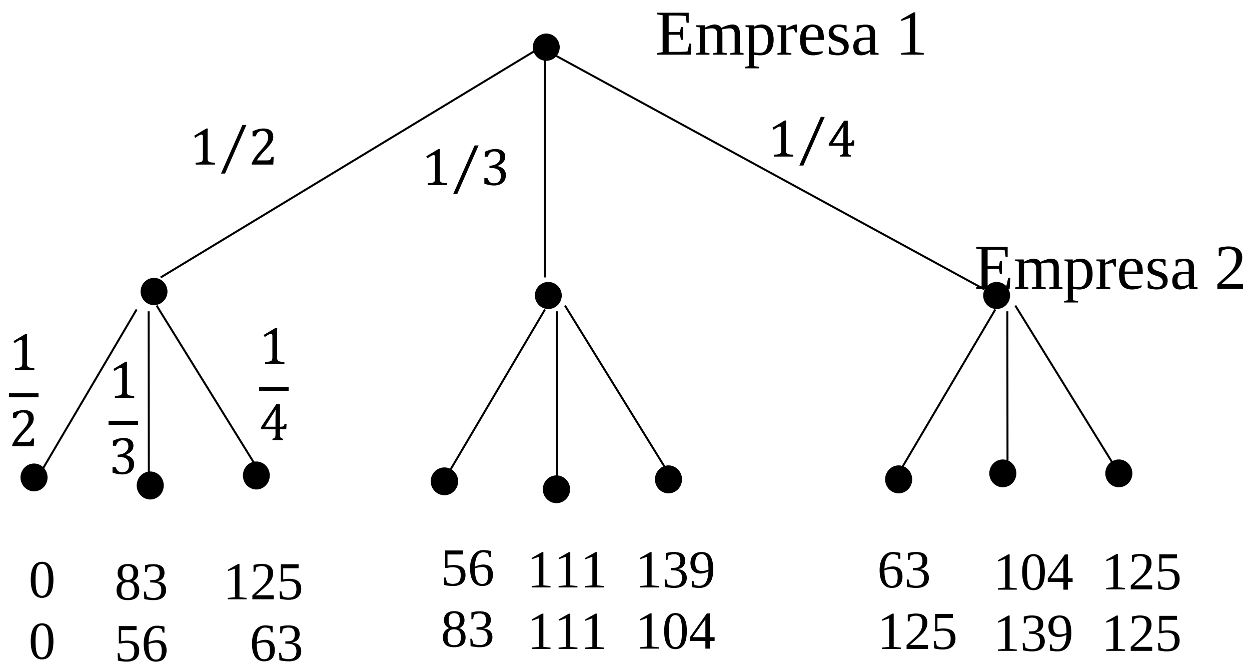
La empresa seguidora de Stackelberg preferiría ser una competidora de Cournot…

Los duopolios “discretizados”: tres niveles posibles de producción: $1/2$, $1/3$ y $1/4$.

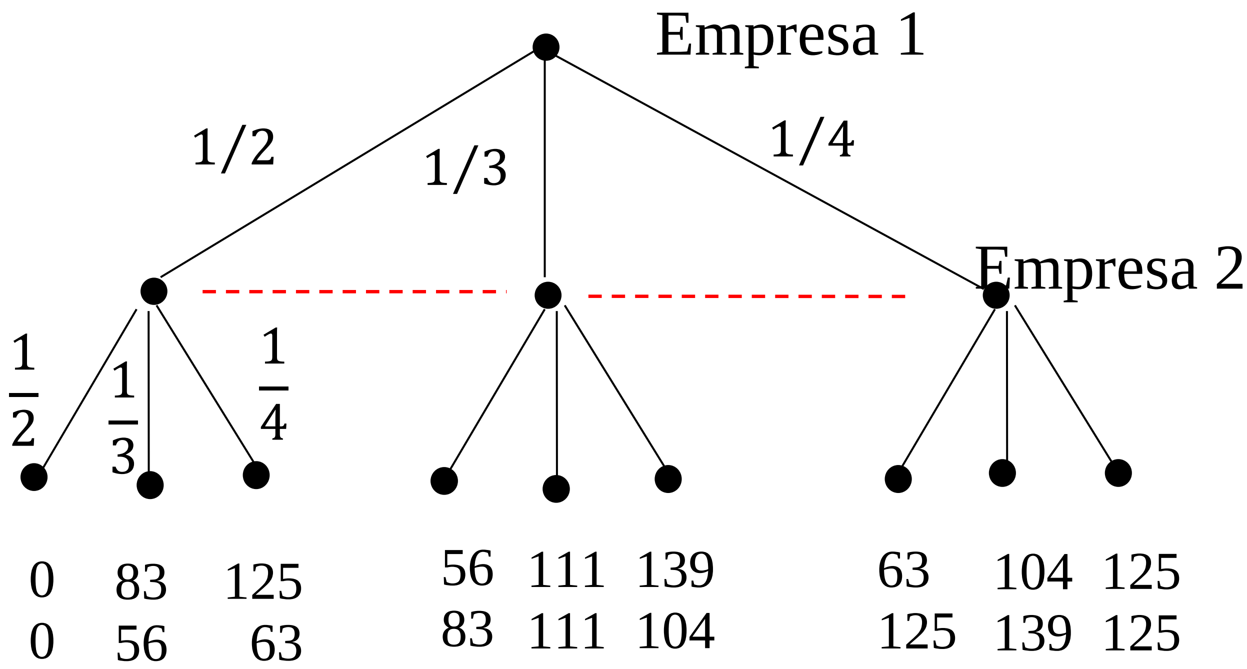
	Cournot	**Stackelberg**
Jugadores	Empresas 1 y 2	Empresas 1 y 2
Timing	En 1, juega empresa 1 En 2, juega empresa 2	En 1, juega empresa 1 En 2, juega empresa 2
Acciones	1/2, 1/3 y 1/4	1/2, 1/3 y 1/4
Información	Empresa 1: primer nodo. Empresa 2: **no conoce acción elegida por 1**	Empresa 1: primer nodo. Empresa 2: **conoce acción elegida por 1**
Pagos	Empresas conocen los pagos	Empresas conocen los pagos

Los árboles de los juegos de Cournot y Stackelberg:

Stackelberg



Cournot


Empresa 1
1/2
1/3
1/4
Empresa 2
1/2
1/3
1/4
0 83 125
0 56 63
56 111 139
83 111 104
63 104 125
125 139 125

Notar:

- Stackelberg y Cournot difieren solamente en la información que tienen los jugadores.
- Stackelberg es un juego con información completa y perfecta.
- Cournot es un juego con información completa pero imperfecta.

Solución de los juegos de Cournot y Stackelberg:

1) Stackelberg: usamos inducción retrospectiva.

(i) Etapa 2:

Empresa 2 producirá:	Si empresa 1 produjo:
1/4	1/2
1/3	1/3
1/3	1/4

(ii) Etapa 1: Empresa 1 decide producir 1/2.

Resultado de Stackelberg:

Empresa	Producción	Utilidad
Empresa 1	1/2	125
Empresa 2	1/4	63

2) Cournot:

- No podemos usar inducción retrospectiva, porque la empresa 2 no sabe en qué nodo está.
- Buscamos el equilibrio de Nash.

Matriz de pagos

		Empresa 2		
		1/2	1/3	1/4
Empresa 1	1/2	(0,0)	(83,56)	(125,63)
	1/3	(56,83)	**(111,111)**	(139,104)
	1/4	(63,125)	(104,139)	(125,125)

Resultado de Cournot:

Empresa	Producción	Utilidad
Empresa 1	1/3	111
Empresa 2	1/3	111

Notar:

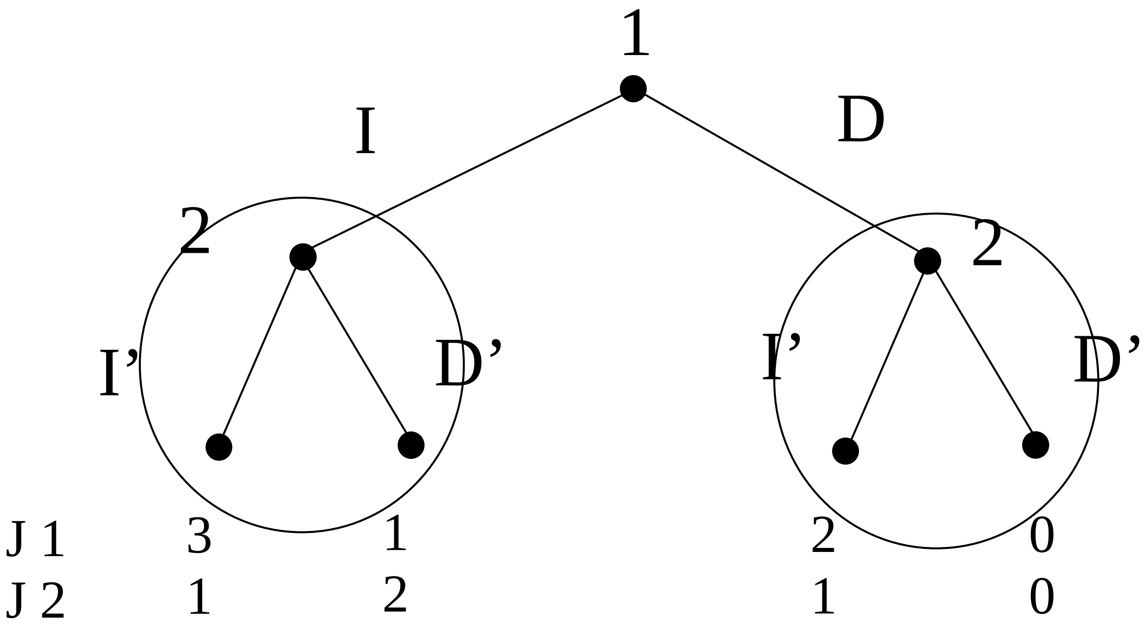
- Empresa 2 obtiene más utilidades en Cournot que en Stackelberg, es decir que obtiene un mejor resultado cuando sabe menos!

Subjuegos

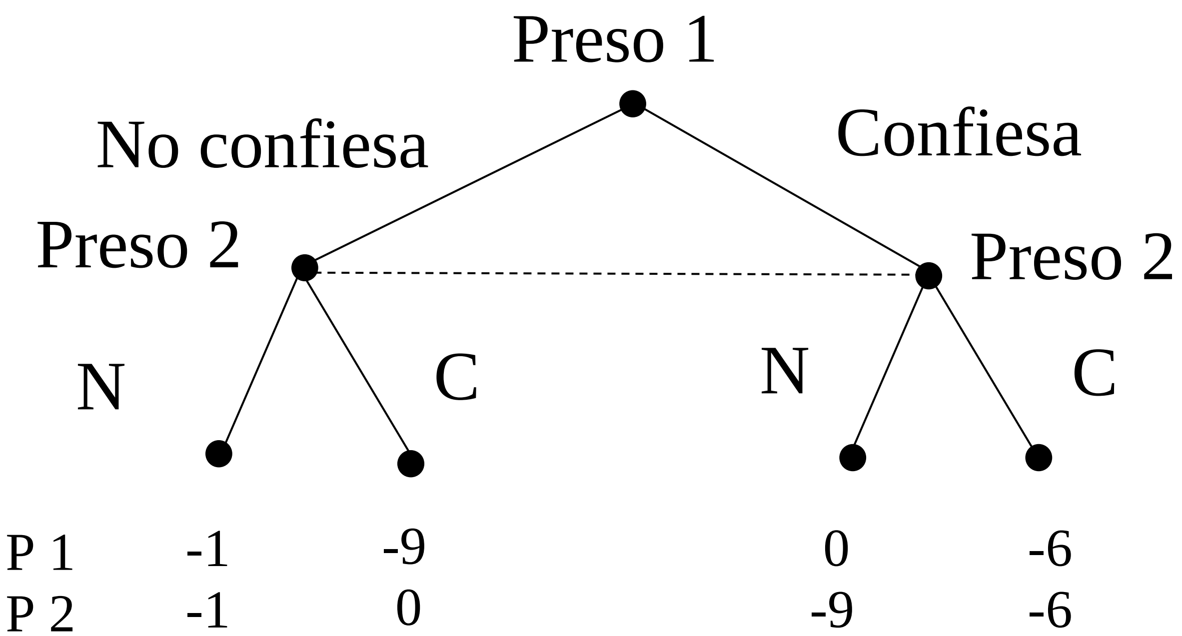
"…la parte del juego que queda por jugar empezando en cualquier momento en el que la historia completa del juego hasta entonces sea información del dominio público entre todos los jugadores…"

Definición: un subjuego en un juego en forma extensiva:
a) Empieza en un nodo de decisión que constituye un conjunto de información con un único nodo (excluyendo el primero).
b) Incluye a todos los nodos que lo siguen.
c) No intersecta a ningún otro conjunto de información.

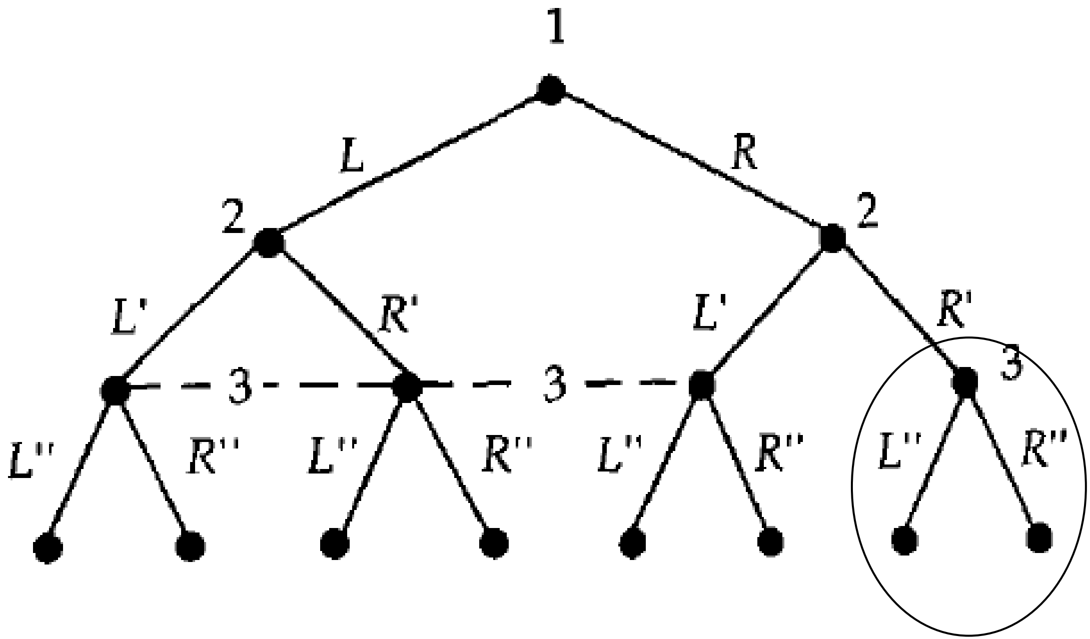
Ejemplo 1: en el siguiente juego hay dos subjuegos que empiezan en los nodos de decisión del jugador 2



Ejemplo 2: en el dilema del prisionero no hay subjuegos



Ejemplo 3: Hay un solo subjuego, ¿por qué?



Requisito de no intersección = dominio público = todos los jugadores deben conocer la historia previa al inicio del subjuego.

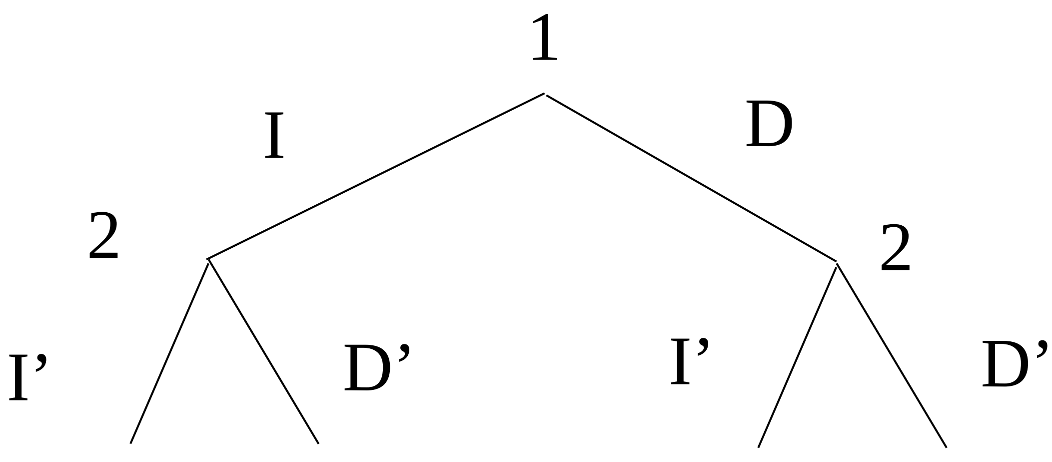
El nodo que sigue a la jugada L de jugador 1 no inicia un subjuego, aún cuando es un conjunto unitario para el jugador 2 (que es al que le toca jugar), porque el jugador 3 no puede distinguir ese nodo del que sigue a la jugada R del jugador 1.

Equilibrio de Nash perfecto por subjuegos

Definición: un equilibrio de Nash es perfecto por subjuegos si es un equilibrio de Nash en todos los subjuegos.

Intuición: el equilibrio perfecto por subjuegos descarta equilibrios de Nash que incluyen promesas o amenazas no creíbles (vacías).

Volvemos al ejemplo siguiente:



J 1	3	1	2	0
J 2	1	2	1	0

Si lo miramos en su forma normal:

		Jugador 2			
		(I',I')	(I',D')	(D',I')	(D',D')
Jugador 1	I	3,1	3,1	1,2	**1,2**
	D	2,1	0,0	**2,1**	0,0

Identificamos dos equilibrios de Nash, pero hay un problema con el perfil de estrategias $\left(I,(D',D')\right)$: incluye un subjuego en el que un jugador no elige su mejor respuesta.

En el subjuego que empieza después que el jugador 1 eligió D, no es óptimo para el jugador 2 elegir D’. Esto no es un equilibrio de Nash en ese subjuego ➔

- El perfil de estrategias $\left(I,(D',D')\right)$ no es perfecto por subjuegos.
- El perfil de estrategias $\left(I,(D',D')\right)$ incluye una “amenaza no creíble”: el jugador 1 no debería creer que el jugador 2 va a elegir D’ si llega a ese nodo del juego.

Notar:

- Al igual que la retroinducción, el equilibrio perfecto por subjuegos, elimina las amenazas vacías.

- Retroinducción se aplica sólo a juegos de información perfecta, mientras que el equilibrio perfecto por subjuegos es aplicable también a juegos con información imperfecta.

Juegos repetidos

Motivación: ¿Siguen siendo válidos los resultados obtenidos si la relación se repite en el tiempo? ¿Pueden las “amenazas” y “premios” futuros alterar las decisiones presentes?

Ejemplos:

- El juego inversor-gobierno en un régimen de discreción: ¿es posible que el gobierno se abstenga de elegir una elevada tasa impositiva temiendo que eso desincentive la inversión futura?

Es decir, ¿qué pasaría si consideráramos otras jugadas del inversor después de que el gobierno ha elegido la tasa impositiva?

- La tragedia de los comunes: ¿es posible que el pescador lleve un bote en lugar de dos temiendo la reacción posterior del otro pescador?

Estas cuestiones se analizan en el contexto de "juegos repetidos": juegos en que la interacción representada en el "juego de etapa" se repite en el tiempo.

"Un juego repetido es un juego que se juega más de una vez"
(Sánchez-Cuenca 2004, p 85)

El "juego de etapa" o "juego de referencia" (*stage game*) es el juego que se repite.

Los resultados dependen mucho de si la repetición ocurre un número finito o infinito de veces.

Juegos repetidos finitamente

El dilema del prisionero repetido dos veces:

- Se juega la primera etapa, se observan las acciones y se vuelve a jugar.
- En cada etapa, se obtiene la utilidad o pagos propios del dilema del prisionero:

		Preso 2	
		No confesar	Confesar
Preso 1	No confesar	-1, -1	-9, 0
	Confesar	0, -9	-6, -6

- La utilidad (o pagos) total surge de sumar los pagos por período (sin descuento, por ahora…).

Nota: puede parecer algo “artificial” pensar en que los presos puedan confesar dos o más veces, pero la misma estructura de interacción estratégica se aplica a problemas en los que la repetición es natural, como en la tragedia de los comunes.

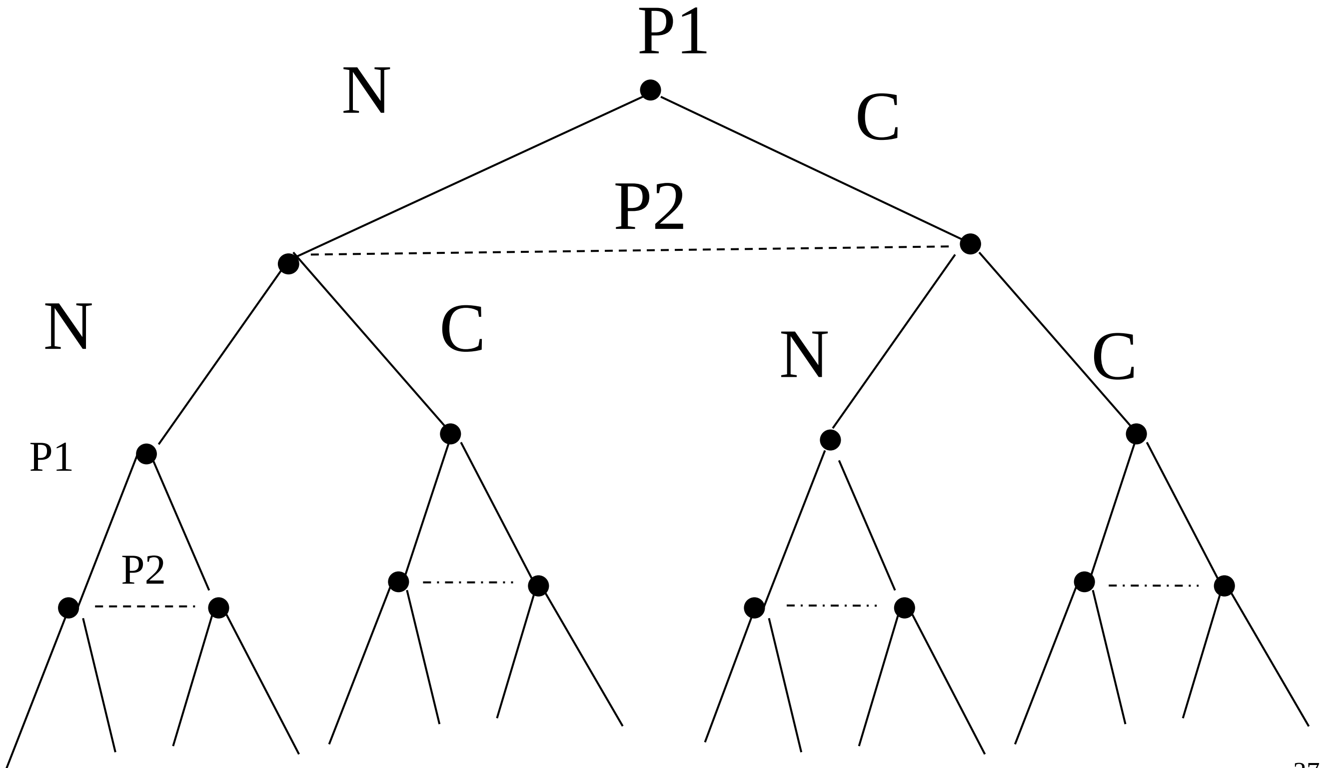
Motivación: ¿es posible sostener la cooperación basado en la “promesa” de no confesar en la segunda etapa, si ninguno confiesa en la primera?

Respuesta: NO. Ambos presos saben que en la segunda etapa habrá confesión. La “promesa” no es creíble.

Más formalmente: Una estrategia de no confesar si nadie confesó antes no forma parte de un equilibrio perfecto por subjuegos.

Vamos a mostrarlo…

El árbol del juego:


P1
N
C
P2
N
C
N
C
P1
P2

La estrategia “pesimista”:

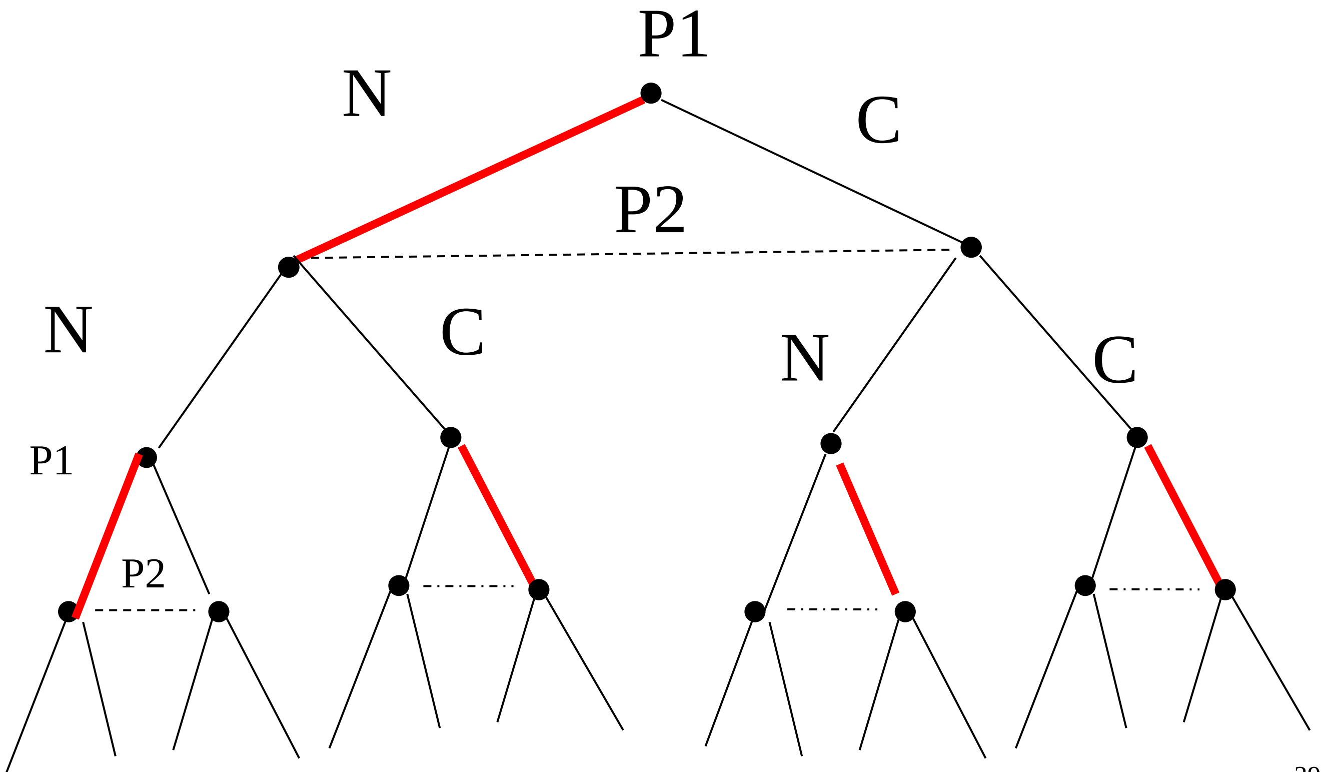
1) En la primera etapa: niegue.

2) En la segunda etapa:

 a) Niegue si nadie confesó antes.

 b) Confiese si alguien confesó antes.

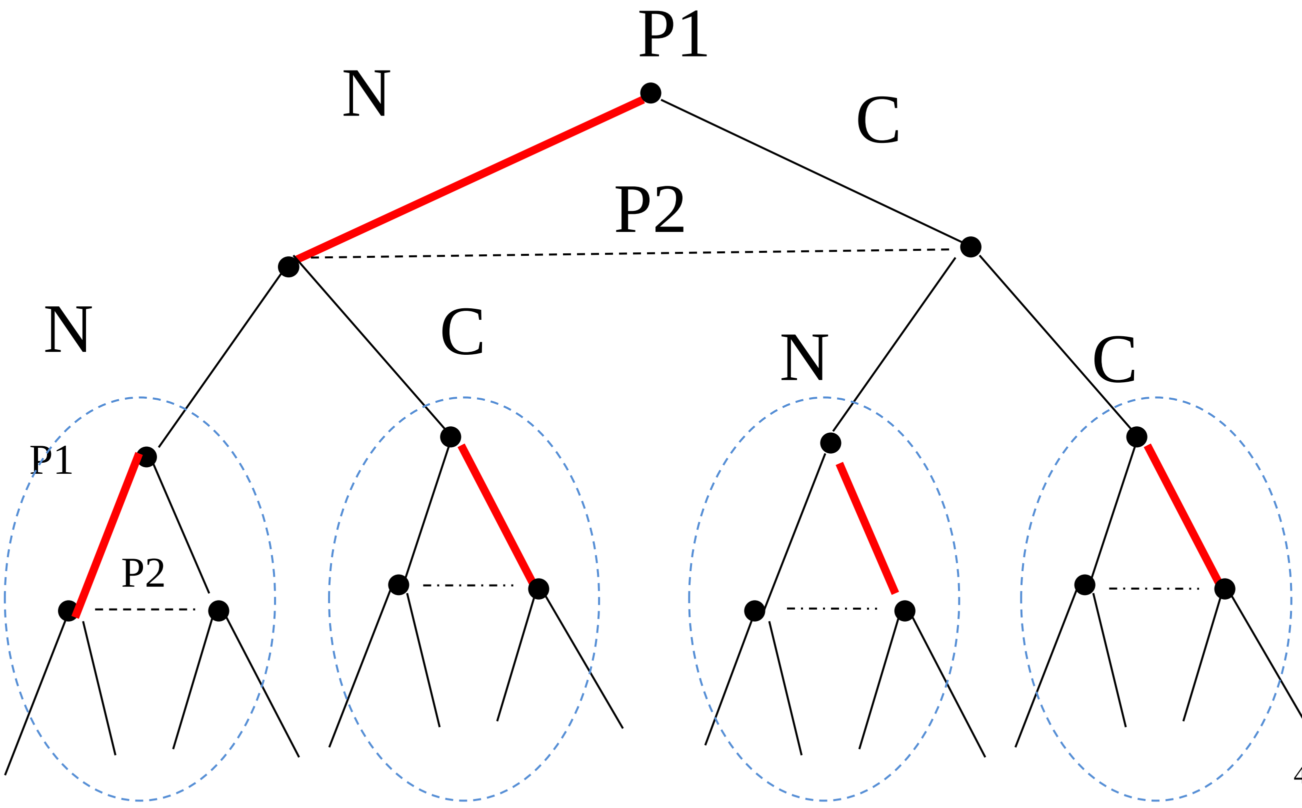
Identificamos la estrategia “pesimista” del preso 1 en el árbol:


P1
N
C
P2
N
C
N
C
P1
P2

Notar: P1 “le está diciendo” a P2 que cooperará en ambas etapas sí y sólo sí P2 coopera (= no confiesa) en la etapa 1.

¿Debería P2 creer en esto? No: llegado a la segunda etapa del juego, lo mejor para P1 es no cooperar, es decir confesar, con independencia de lo que haya hecho P2 en la primera etapa.

Identificamos subjuegos:


P1
N
C
P2
N
C
N
C
P1
P2

Encontramos cuatro subjuegos:

- Cada uno de ellos es un juego del prisionero convencional ==>

- Hay un único equilibrio de Nash: (Confesar, Confesar).

➔

- La estrategia “pesimista” NO forma parte de un equilibrio perfecto por subjuegos.
- P1 y P2 esperan que en la segunda etapa se juegue (Confesar, Confesar).

Dada la matriz de pagos del dilema del prisionero estático:

		Preso 2	
		No confesar	Confesar
Preso 1	No confesar	-1, -1	-9, 0
	Confesar	0, -9	-6, -6

➔ P1 y P2 anticipan que en la segunda etapa obtendrán -6.

¿Cuáles son entonces los pagos esperados al inicio del juego?

		Preso 2	
		No confesar	Confesar
Preso 1	No confesar	-1+(-6), -1+(-6)	-9+(-6), 0+(-6)
	Confesar	0+(-6), -9+(-6)	-6+(-6), -6+(-6)

Esto sigue teniendo la estructura de un dilema del prisionero

➔ El único par de estrategias que constituye un equilibrio perfecto por subjuegos es **confesar siempre**, ya que:

- (i) Es el único equilibrio de Nash en los cuatro subjuegos.
- (ii) Es el único equilibrio de Nash del juego completo.

Conclusión: repetir el juego dos veces no permite alcanzar la cooperación.

¿Qué pasaría si repitiéramos el dilema del prisionero más veces?

Es inmediato que el resultado no cambia si repetimos un número finito de veces. Basta con repetir el argumento anterior.

Ejercicio: encontrar el equilibrio perfecto por subjuegos en el dilema del prisionero repetido 3 veces. ¿Cuáles serán los pagos en el equilibrio?

¿Se puede concluir entonces que las “promesas” y “amenazas” en juegos repetidos no permiten alcanzar la “cooperación”?

No. Mostraremos que, bajo ciertas circunstancias, puede sostenerse la “cooperación” si el juego del prisionero repetido no tiene un final conocido.

Juegos repetidos infinitamente

Notar: al no haber un punto final conocido, no podemos razonar “desde el final”.

El dilema del prisionero repetido infinitamente:

- Se juega cada etapa, se observan las acciones y se vuelve a jugar.
- En cada etapa, se obtiene la utilidad o pagos propios del dilema del prisionero estático:

		Preso 2	
		No confesar	Confesar
Preso 1	No confesar	-1, -1	-9, 0
	Confesar	0, -9	-6, -6

- La utilidad (o pagos) total surge de hacer la suma **descontada** de la utilidad (o pagos) por período:

π_i = pagos obtenidos en la etapa "i"
δ = factor de descuento

Utilidad total = $\pi_1 + \delta\pi_2 + \delta^2\pi_3 + \ldots$

Se cumple que: $0 \leq \delta \leq 1$

➔ Un mismo pago vale más obtenido hoy que obtenido mañana.

Vamos a mostrar que este juego tiene un equilibrio perfecto por subjuegos en el que los jugadores “cooperan” (no confiesan), siempre que δ sea suficientemente cercano a 1.

Consideramos las siguientes estrategias, conocidas como estrategias “gatillo”:

a) En la primera etapa: no confesar.
b) En las siguientes etapas:

- No confesar, si nadie confesó antes.
- Confesar en el caso contrario.

Demostraremos que, si un jugador es suficientemente "paciente", la estrategia "gatillo" es una mejor respuesta en el juego completo y en todos los subjuegos a la misma estrategia jugada por el otro jugador.

➔ Un par de estrategias "gatillo" constituye un equilibrio perfecto por subjuegos.

Supongamos que P1 sigue la estrategia "gatillo". Demostraremos que es óptimo para P2 seguir la misma estrategia (A) en el juego completo y (B) en todos los subjuegos.

(A) El juego completo

a) Si en alguna etapa se juega algo distinto a (N, N) y el prisionero 1 sigue la estrategia “gatillo”, en lo sucesivo jugará C ➔ es óptimo para el prisionero 2 jugar C.

b) Al inicio del juego y en cualquier punto en que siempre se haya jugado (N, N) previamente, cabe esperar que P1 juegue N. Sabiendo esto, P2 tiene dos opciones:

b1) Elegir N, con lo cual obtiene

$$-1 + \delta \times (-1) + \delta^2 \times (-1) + \cdots$$
$$= -1 \times (1 + \delta + \delta^2 + \cdots) = -\frac{1}{1-\delta}$$

b2) Elegir C, con lo cual obtiene un mejor resultado en lo inmediato, pero peor resultado después:

$$0 + \delta \times (-6) + \delta^2 \times (-6) + \cdots = 0 - 6 \times (\delta + \delta^2 + \cdots)$$
$$= -\frac{6\delta}{1-\delta}$$

Para que la estrategia gatillo sea una mejor respuesta de P2 a la estrategia gatillo de P1 debe cumplirse que P2 encuentre óptimo no confesar cuando nadie confesó antes:

$$-\frac{1}{1-\delta} \geq -\frac{6\delta}{1-\delta}$$

Esto se cumple si y solo si:

$$\delta \geq 1/6$$

➔ La estrategia gatillo es la mejor respuesta de P2 a la estrategia gatillo de P1 en el juego completo, si se cumple que $\delta \geq 1/6$.

Lo mismo vale para P1, si P2 adopta una estrategia gatillo.

➔ Un par de estrategias gatillo constituyen un equilibrio de Nash del juego completo repetido infinitas veces.

Notar: al repetir el juego infinitas veces, obtenemos que no confesar puede sostenerse como un equilibrio de Nash.

(B) En los subjuegos

Queremos mostrar que la estrategia gatillo es una mejor respuesta a la estrategia gatillo en todos los subjuegos, para mostrar que estas estrategias constituyen un equilibrio perfecto por subjuegos.

Distinguimos dos tipos de subjuegos:
(a) Nadie confesó antes.
(b) Hubo algún desvío.

Si estamos en el subjuego (a), el subjuego es idéntico al juego completo y ya sabemos que el par de estrategias gatillo es un equilibrio de Nash de ese juego.

Si estamos en algún subjuego (b), P2 debe esperar que P1 juegue C en lo sucesivo. Lo mejor que puede hacer P2 entonces es jugar C.

Notar: Jugar C es precisamente lo que prescribe la estrategia gatillo en esta circunstancia

➔ La estrategia gatillo es un equilibrio de Nash también en los subjuegos de tipo (b).

➔ Es óptimo confesar después de que alguien confesó = la "amenaza" de confesar en el futuro si alguien confiesa hoy es creíble.

➔ El par de estrategias gatillo constituyen un equilibrio perfecto por subjuegos.