

**UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA**

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

CURSO 2022

CONJUNTOS

INTRODUCCIÓN

Las notas que siguen han sido preparadas para el curso de Matemática Aplicada a la Economía¹ con el fin de ser utilizadas por los estudiantes como material de consulta complementario de los textos recomendados en la bibliografía. Estas notas tienen como punto de partida el material de consulta escrito inicialmente por el profesor David Glejberman, el cual ha sido corregido, modificado y ampliado en el transcurso de los años por el profesor Nicolás Bonino Gayoso. Estas notas difieren del contenido de los clásicos textos de Matemática porque no se ocupan de los fundamentos de la disciplina ni de su construcción mediante métodos lógico-deductivos. Como se trata de un curso de matemática aplicada, en las notas no se demuestran propiedades ni teoremas, sino que se aplican estos resultados para la resolución de problemas relevantes de la ciencia económica.

Con ese objeto en estas notas se repasan diversos capítulos del cálculo y del álgebra que los estudiantes conocieron en la enseñanza media y en las carreras universitarias de grado. Se hace especial hincapié en el álgebra matricial, el estudio de funciones, la interpretación de la derivada, el cálculo integral, las funciones de varias variables y los métodos de optimización.

Entre las aplicaciones a la Economía que se presentan en el curso cabe mencionar la matriz de insumo-producto, la determinación de la evolución del monto de un depósito realizado a interés compuesto, la elasticidad de la demanda, la clasificación de bienes como complementarios, sustitutos o independientes, la minimización del costo de producción, la maximización de la utilidad sujeta a restricciones presupuestarias, entre otras.

Los ejercicios y aplicaciones prácticas han sido seleccionados de forma de contemplar todos los temas del programa. Estos casos prácticos tienen el propósito de mostrar las aplicaciones de la Matemática a la Economía, así como ejercitar a los estudiantes en el uso de los conceptos del álgebra y el cálculo y sus reglas operatorias.

De esta forma se espera que los alumnos adquieran familiaridad con el instrumental matemático para lograr un buen aprovechamiento en las siguientes asignaturas del Diploma, y eventualmente de la Maestría, tales como Micro y Macroeconomía, Estadística y Econometría.

¹ Matemática aplicada a la Economía es una asignatura del curso de posgrado Diploma en Economía para no Economistas organizado por el Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Sociales, Universidad de la República.

1. TEORÍA DE CONJUNTOS

¿Qué es un *conjunto*? Un *conjunto* puede concebirse como un grupo de “cosas”. Por ejemplo: el conjunto de alumnos del Diploma en Economía para no Economistas, el conjunto de países de América Latina, el conjunto de equipos de la Primera División del fútbol uruguayo. Como se puede observar, los conjuntos no tienen por qué estar integrados por números, aunque existen también conjuntos numéricos, como por ejemplo, el conjunto de los números pares.

Habrás notado que el concepto de conjunto no tiene una definición precisa; la misma no es requisito para poder manejarlo y operar con él. Se dice por lo tanto que el concepto de conjunto es primitivo. Lo mismo sucede con el concepto de *elemento* de un conjunto.

Conviene recordar algunas ideas sobre los conjuntos:

- Un conjunto queda bien definido cuando se conoce cuáles elementos le pertenecen. La noción de *pertenencia* también es primitiva.
- Los elementos de un conjunto pueden ser muy diversos y no necesariamente han de tener características comunes, como intuitivamente puede pensarse. Un conjunto puede estar formado por los siguientes tres elementos: mi reloj, mi nombre y el pizarrón del salón de clase. Sin embargo, es frecuente que las ciencias se refieran a conjuntos de elementos con características comunes: la Sociología refiere a conjuntos humanos organizados en sociedad, la Botánica trabaja con conjuntos de plantas, la Psicología con individuos o pequeños grupos humanos y la Estadística estudia las características de ciertas poblaciones o universos que no son otra cosa que conjuntos de elementos que poseen una o más características medibles.
- En Matemática los conjuntos no tienen elementos repetidos. Esta aclaración es relevante porque en Estadística los conjuntos sí pueden contener elementos repetidos.
- En Matemática el orden de los elementos de un conjunto es irrelevante. Si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces ambos conjuntos son iguales, sin importar el orden en que se presentan sus elementos.
- En la historia de la Matemática, la formalización de la teoría de conjuntos es muy posterior en el tiempo a la formalización del concepto de número. La teoría de conjuntos es de fines del siglo XIX y su principal exponente fue el alemán G. Cantor (1845-1918). La teoría de números fue desarrollada por varias de las antiguas culturas (griega, china, maya, egipcia) algunos siglos antes de Cristo.

Notación.² Los conjuntos suelen denominarse en Matemática mediante las letras de nuestro alfabeto, en mayúsculas: A, B, C, etc. Los elementos se simbolizan con las mismas letras, pero en minúsculas. El símbolo “ \in ” indica pertenencia. Así, “ $a \in C$ ” indica que el elemento “a” pertenece al conjunto C, mientras que la expresión “ $b \notin A$ ” indica que el elemento “b” no pertenece al conjunto A.

Se denomina *conjunto vacío* a un conjunto que no tiene elementos, y se lo simboliza con el símbolo \emptyset .

² Se denomina notación al sistema de signos convencionales que se adopta para expresar conceptos matemáticos.

1.1 Maneras de representar un conjunto

Existen diversas formas de representar los conjuntos: mediante texto y mediante gráficas. Los conjuntos pueden representarse textualmente separando sus elementos con comas dentro de un par de llaves.

Ejemplo: el conjunto de los resultados posibles de una tirada de un dado es:

$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

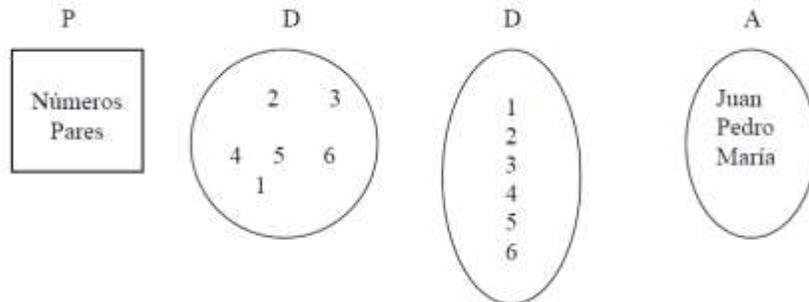
Esta forma de representación textual del conjunto se denomina “por extensión” y resulta conveniente cuando el conjunto tiene pocos elementos.

Otra forma de representación textual es la denominada “por comprensión”, que consiste en dar una regla que establezca cuáles elementos pertenecen al conjunto (y cuáles no). Siguiendo con el ejemplo del dado, el conjunto de los resultados posibles es una parte de los números naturales (N): los naturales comprendidos entre 1 y 6. La notación “por comprensión” sería:

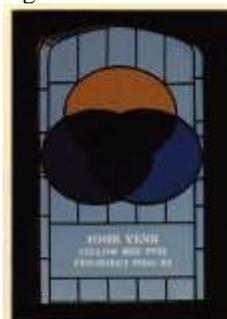
$$D = \{x | x \in N, 1 \leq x \leq 6\}$$

que se lee así: “D es el conjunto de números x que cumplen con dos condiciones: x es un número natural y x está comprendido entre 1 y 6”. También puede leerse así: “D es el conjunto de números x tal que x es un número natural y x es mayor o igual que 1 y menor o igual que 6”. El símbolo “|” precede a las condiciones que debe cumplir x; también suele utilizarse el símbolo “:” con el mismo significado.

La forma gráfica más usual para representar un conjunto es el diagrama de Venn.³ Consiste en dibujar dentro de un rectángulo, de un círculo o de un óvalo todos los elementos del conjunto.

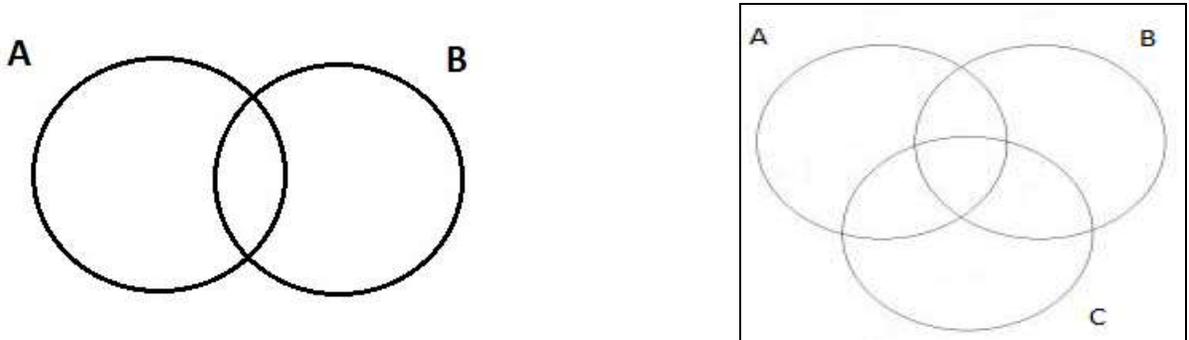


³ Esta representación fue ideada por John Venn (1834-1923), un filósofo británico, en 1880 e incluida en un artículo titulado “On the Diagrammatic and Mechanical Representations and Reasonings” (“Sobre las representaciones mecánicas y mediante diagramas y razonamientos”), publicado en “Philosophical Magazine and Journal of Science”, S. 5, Vol. 9, N° 59, julio de 1880. En la imagen de abajo se observa un ventanal conmemoratorio ubicado en el comedor del Gonville and Caius College, Cambridge.

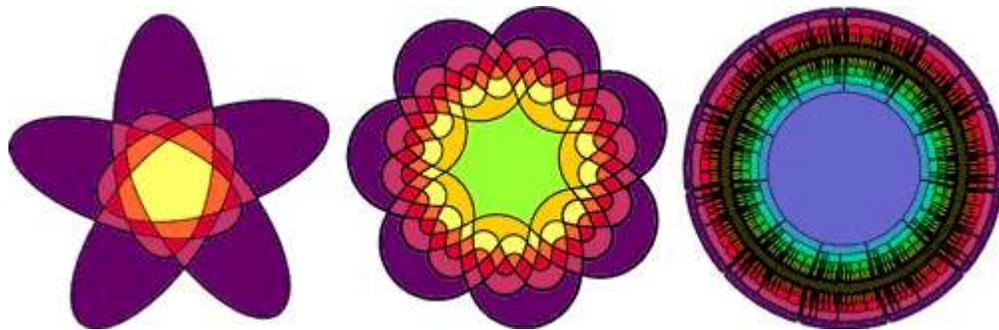


Esta representación permite también visualizar las relaciones entre conjuntos.

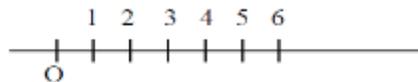
En el caso de dos conjuntos y de tres conjuntos:



Para un número mayor de conjuntos el diagrama adquiere una complejidad creciente, como se aprecia a continuación para los casos de cinco, siete y once conjuntos.



Cuando se trabaja con conjuntos de números resulta muy útil la representación gráfica mediante una recta en la que se establece un origen (O); el sentido en el que crecen los números siempre es de izquierda a derecha.



Definición 1. Se llama *cardinal* del conjunto A al número de elementos de A.

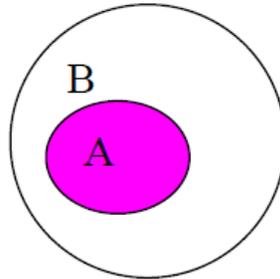
El cardinal es siempre un número natural si el conjunto A es finito. En caso contrario, el cardinal de A es infinito (∞). La notación empleada es $n(A)$, o también $\#(A)$.

La noción de “conjunto de conjuntos” es muy utilizada en Estadística. Por ejemplo, cuando se quiere seleccionar una muestra de personas, pero no se tiene una lista completa del universo a investigar, pero sí una lista de las viviendas donde viven dichas personas, entonces se puede seleccionar una muestra de viviendas y luego seleccionar a todas o algunas de las personas que habitan en las viviendas elegidas. El diseño de la muestra consiste en seleccionar primero un conjunto de conjuntos (viviendas, como conjuntos de personas) y en una segunda etapa seleccionar personas.

Definición 2. Se dice que el conjunto A está incluido en otro conjunto B si se cumple que todo elemento de A es también un elemento de B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

El símbolo “ \forall ” significa “para todo”. Si el conjunto A está incluido en el conjunto B, también se dice que A es un subconjunto de B.



La inclusión relaciona dos conjuntos, mientras que la pertenencia relaciona un elemento con un conjunto.

Por ejemplo:

Sea $B = \{1, 2, 3\}$

Entonces

$$1 \in B$$

$$4 \notin B$$

$$\{1, 2\} \subseteq B$$

Definición 3. Si se cumple a la vez que $A \subseteq B$ y que $B \subseteq A$, entonces $A = B$. Esta es la definición matemática de *igualdad* de conjuntos. También se puede decir que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Si A es un subconjunto de B, pero B no es un subconjunto de A, entonces se dice que A está “estrictamente incluido en B” y se utiliza la notación: $A \subset B$.

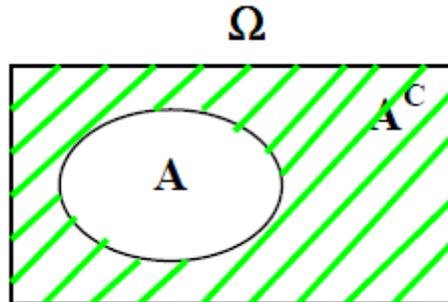
Las Ciencias Sociales tienen como objeto de estudio al Hombre, las relaciones entre el Hombre y la Sociedad, las relaciones entre grupos sociales, etc. Obsérvese que la Psicología y la Sociología trabajan con conjuntos de individuos –pequeños grupos y grandes grupos humanos llamados sociedades– y al analizar los grupos, estos se definen en relación con el grupo más amplio posible, el cual se denomina “población” o “universo”. Si se adopta la notación Ω para simbolizar al universo, entonces cualquier subconjunto A de personas de ese universo determina una partición del universo en dos clases:

C_1 = conjunto de individuos de Ω que pertenecen al conjunto A

C_2 = conjunto de individuos de Ω que no pertenecen al conjunto A

La clase C_2 se denomina “conjunto complementario de A respecto de Ω ” (notación: A^C) y se puede definir también así:

$$A^C = \{x | x \in \Omega, x \notin A\}$$



Ejemplo: Sea $\Omega = \mathbb{N}$ y A el conjunto de los números pares. Entonces A^C es el conjunto de los números impares.

Las clases C_1 y C_2 determinan una partición de Ω si se cumple que ambas son no vacías. Más formalmente, una partición del universo es una regla que clasifica a los elementos del universo en clases separadas y no vacías. La partición puede determinar solo dos clases, como en el ejemplo anterior, o más de dos clases, incluso hasta un número infinito de clases. Ejemplos:

1. El universo es el conjunto de todos los individuos residentes de un país, y las clases son dos: individuos de sexo femenino e individuos de sexo masculino.
2. El universo es el conjunto de todos los individuos residentes en Uruguay y las clases son dos: tomadores de mate y no tomadores de dicho producto.
3. El universo es el conjunto de los hogares residentes de un país y las clases están definidas por el número de miembros del hogar: hogares unipersonales, hogares con 2 personas, etc. ¿Cuántas clases hay en Uruguay? ¿Cuál es la clase más frecuente?
4. $\Omega = \mathbb{N}$ $C_i = \{x | x \in \mathbb{N}, 5(i-1) \leq x \leq 5i-1\}$ con $i = 1, 2, 3, \dots$ ¿Cuántos elementos tiene cada clase?

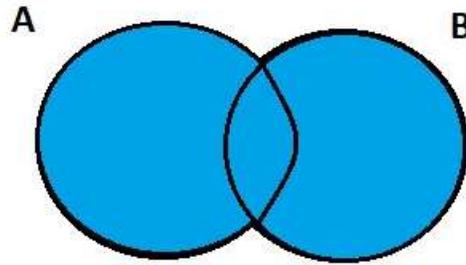
1.2. Operaciones entre conjuntos

Entre los conjuntos es posible definir ciertas **operaciones**. Una **operación** pone en relación dos entidades –en este caso, dos conjuntos– y como resultado de dicha relación se obtiene una nueva entidad –en este caso, un nuevo conjunto–.

Definición 4. Dados dos conjuntos, A y B , se llama **unión** de A con B a otro conjunto que tiene todos los elementos de A y todos los elementos de B .

Notación: $A \cup B$

Representación gráfica



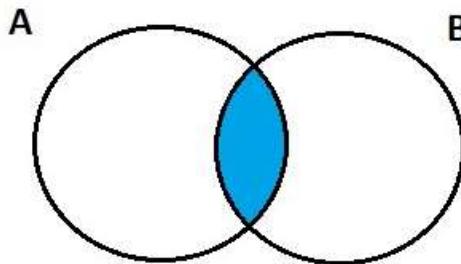
Propiedades de la unión de conjuntos

1. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$
2. Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cup B = B$
4. $A \cup \emptyset = A$
5. $A \cup A^c = \Omega$

Definición 5. Dados dos conjuntos, A y B, se llama *intersección* de A y B a otro conjunto que tiene solo los elementos comunes de A y B.

Notación: $A \cap B$

Representación gráfica



Propiedades de la intersección de conjuntos

1. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$
2. Asociativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$
4. $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. $A \cap A^c = \emptyset$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía, se dice que ambos conjuntos son *disjuntos* o *mutuamente excluyentes*.

Propiedades que combinan unión e intersección

1. Distributiva respecto de la intersección: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. Distributiva respecto de la unión: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. Ley de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
4. Ley de De Morgan: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Resulta interesante que intentes probar estas propiedades a partir de la representación mediante diagramas de Venn.

Definición 6. Dados dos conjuntos A y B se llama *diferencia* entre A y B al conjunto cuyos elementos están en A pero no en B:

$$A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

Representación gráfica

