UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

CURSO 2022

OPERACIONES CON NÚMEROS

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS. OPERACIONES CON NÚMEROS

2.1. Conjuntos numéricos

Vamos a suponer que usted ya conoce los números, las operaciones que pueden realizarse con ellos y sus propiedades más importantes. Si esto no es cierto, algunas de las dificultades que se le habrán de presentar, usted podrá resolverlas con la ayuda de una calculadora de bolsillo o con una computadora personal. Pero algunos problemas quedarán sin resolver, y otros resultarán demasiado complicados si se desconocen los métodos para simplificarlos. Este es el objeto -resolver o simplificar algunos problemas- de la presente sección.

Empecemos con los ***números naturales*** (notación: ℕ). Estos son los números más familiares para cualquier persona y los primeros en surgir en las distintas civilizaciones, pues están asociados a las tareas de contar. Ellos son:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Los puntos suspensivos indican que se trata de un conjunto infinito. Para un natural dado (tan grande como se quiera), siempre es posible encontrar un natural más grande. Sin embargo, entre dos naturales no siempre es posible encontrar otro natural (entre el 4 y el 5 no hay ningún natural).

El resultado de sumar o multiplicar dos naturales es siempre otro número natural. Pero la resta de naturales o la división no tienen, siempre, un resultado natural. Por ejemplo, 3 – 5 = -2, que no es un número natural, y 3:5 = 3/5 = 0,6, que tampoco es un número natural. Otro tanto ocurre con la radicación: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt[3]{125} = 5$, pero $\sqrt{3}$ no tiene un resultado “exacto” expresable en números naturales (ni siquiera en números decimales). Estas limitaciones conducen a la ampliación de los conjuntos de números.

Pero volviendo a los números naturales y sus operaciones, es necesario fijar algunas reglas. Si se tiene la expresión:

$$3 + 2 \text{ x } 3^4$$

es necesario establecer en qué orden deben efectuarse las operaciones, porque según cuál sea el orden, el resultado será diferente. Supongamos que el criterio fuese realizar las operaciones en el orden en que aparecen en la expresión. Entonces la primera operación a realizar sería 3 + 2 = 5. La segunda, la multiplicación de este resultado por 3: 5 x 3 = 15. Y la tercera, consistiría en elevar este resultado a la cuarta potencia: 154 = 15 x 15 x 15 x 15 = 50.625.

Sin embargo, sabemos que este es un resultado “equivocado”, porque en Matemática las operaciones no se realizan en el orden en que aparecen, sino siguiendo unas ***reglas de prioridad***. En este sentido, las reglas establecen que:

- En primer lugar, deben realizarse las operaciones de potenciación y radicación (ambas tienen la misma prioridad).
- En segundo lugar, las operaciones de multiplicación y de división (ambas tienen la misma prioridad).
- En tercer lugar, las operaciones de suma y resta (ambas tienen la misma prioridad).

En consecuencia, siguiendo con el ejemplo anterior, la primera operación a realizar sería $3^4 = 81$. La expresión resulta ahora así:

$$3 + 2 \text{ x } 81$$

Las reglas de prioridad establecen que a continuación se debe realizar la multiplicación, obteniéndose: 2 x 81 = 162. La última de las operaciones es la suma, 3 + 162 = 165, resultado final de la expresión original. Para realizar las operaciones combinadas hemos aplicado, entre otras, la regla que dice que los signos "+" y "-" separan términos. Obsérvese que esta regla establece que primero deben efectuarse las "otras" operaciones, y finalmente las de suma y resta. Este es un caso particular de las reglas de prioridad que enunciamos más arriba.

¿Y si en realidad las operaciones que queríamos realizar en la expresión del ejemplo eran las del orden de aparición? En este caso habría que cambiar el orden de prioridad. El instrumento para hacerlo es el paréntesis.

$$[(3 + 2) \text{ x } 3]^4$$

Los paréntesis permiten cambiar las reglas de prioridad introduciendo las siguientes reglas adicionales.

- En primer lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro del paréntesis curvo.
- En segundo lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro del paréntesis recto.
- En tercer lugar, deben efectuarse las operaciones indicadas dentro de las llaves (luego veremos un ejemplo).
- Al interior de cada paréntesis y fuera de ellos se siguen aplicando las reglas de prioridad antes enunciadas.

En la última expresión, el paréntesis curvo indica que la primera operación a efectuar es (3+2). El paréntesis recto, que la segunda operación consiste en multiplicar por 3 el resultado de (3+2), (3+2)x3=15, y finalmente calcular $15^4 = 50.625$.

Otro ejemplo: 2x{3 : [(5 - 2)x4]}= 2x{3 : [3x4]}= 2x{3 :12}= 2x{0,25}= 0,50.

Algunas computadoras y calculadoras de bolsillo no reconocen los paréntesis rectos o las llaves, y trabajan combinando los paréntesis curvos. En el mismo ejemplo anterior, las operaciones a efectuar se indicarían así:

$$2x(3:((5-2)x4))$$

La regla de prioridad en este caso es que se deben efectuar las operaciones contenidas en los paréntesis en el orden de "adentro hacia fuera". En el ejemplo, primero se calcula (5-2), al resultado se lo multiplica por 4, etc. Debe tenerse entonces sumo cuidado a la hora de utilizar la calculadora y recordar digitar los paréntesis que correspondan.

Otra forma de alterar las reglas de prioridad consiste en extender los signos de división o de radicación, como a continuación se explica. Si queremos efectuar la operación 6:3, esta también puede escribirse 6/3 o $\frac{6}{3}$. Si la operación a efectuar es 6:(3+2), esta también puede expresarse como 6/(3+2) o $\frac{6}{3+2}$. En consecuencia, la "raya larga" de división opera de la misma forma que un paréntesis, indicando que tiene primera prioridad la suma (3+2), y que luego debe efectuarse la división.

Otro tanto ocurre con la radicación. $\sqrt{4+5}$ indica que primero debe realizarse la suma, y luego la raíz cuadrada. En cambio, en la expresión $\sqrt{4} + 5$, primero debe efectuarse la raíz cuadrada y luego la suma.

Debe quedar claro, entonces, que el respeto de las reglas anteriores es básico para arribar a resultados correctos.

En uno de los ejemplos anteriores introdujimos los números 0,25 y 0,50 que no son números naturales. Veamos por qué se hace necesario introducir nuevas categorías de números.

En primer lugar, como se vio anteriormente, la resta de dos números naturales no siempre da como resultado un número natural. Por ejemplo, 3-5 no es natural y, en consecuencia, si se quiere generalizar la resta, es necesario definir un conjunto de números que incluya, entre otros, el resultado de 3-5. Tal conjunto es el de los números enteros. Ellos son los naturales acompañados de un signo de “más” o de “menos”:

$$\ldots,-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots$$

Los números enteros se representan con la letra $\mathbb{Z}$ y forman un conjunto infinito, y para ahorrar esfuerzo, los números “positivos” se escriben sin el signo +. Este queda sobreentendido. En los hechos, los enteros positivos son números naturales. Entonces los números naturales pueden considerarse un subconjunto de los enteros: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

¿En qué se diferencian los enteros de los naturales? Entre los enteros siempre es posible realizar la sustracción, es decir, la resta de dos enteros es un número entero. Como consecuencia de ello, para cada entero, siempre existe un entero “opuesto”. El opuesto de +3 es -3, el opuesto de -8 es +8, etc. Formalicemos esta propiedad junto con otras de interés general.

<u>Propiedades de la suma de enteros</u>

1. Conmutativa: para todo par de enteros a y b, se cumple que $a + b = b + a$.
2. Asociativa: para todo a, b y c enteros se cumple que $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. Existencia de neutro: el cero es el único entero que, sumado con otro, da por resultado ese otro.
$a + 0 = a \ \ \forall$ a entero.
4. Existencia de opuesto: $\forall\, a \in \mathbb{Z}, \exists\, (-a)$ tal que $a + (-a) = 0$. Además, el opuesto es único.

Observación
En el conjunto de los naturales <u>no se cumple</u> la propiedad del opuesto.

Propiedades análogas a las tres primeras pueden plantearse para la operación multiplicación (o producto) en los enteros. Sería interesante que usted intentara escribirlas. ¿Cuál sería el neutro para la multiplicación?

Existe una propiedad que combina las dos operaciones de suma y multiplicación:

Distributiva: si a, b y c son enteros, entonces $a.(b + c) = a.b + a.c$

La propiedad indica que hay dos formas de realizar la operación combinada: en una de ellas primero se suma (b+c) y al resultado se lo multiplica por a; en la otra, primero se multiplican a con b y a con c, y luego ambos resultados se suman.

<u>Notación:</u> Como se habrá observado en los ejemplos anteriores, la operación multiplicación o producto puede simbolizarse con los signos “x” o “.” indistintamente. Las expresiones “4x3” y “4.3” indican que el número 4 se multiplica por 3. Cuando se trabaja con variables o incógnitas, como se hará más adelante, se prefiere la segunda notación para no confundir el símbolo “x” con la variable o incógnita “x”.

Hemos afirmado anteriormente que para la operación multiplicación podían plantearse propiedades análogas a las de la operación suma, en particular propiedades conmutativa, asociativa y de existencia de neutro. En lugar de la cuarta propiedad de la suma (existencia de opuesto), para la operación multiplicación tenemos la siguiente propiedad:

Existencia de inverso. $\forall$ a $\in \mathbb{Z} - \{0\}$, $\exists$ (1/a) tal que a x (1/a) = 1. Además, el inverso es único.

Observación
No se cumple que para todo entero exista inverso entero. En general, dado un entero a, no existe otro entero a´ tal que a x a´ = 1 (donde 1 es el neutro del producto). Por ejemplo, el inverso de (-3) sería (-1/3) porque (-3) x (-1/3) = 1. Pero (-1/3) no es un número entero.

Esta limitación de los enteros se levanta con la introducción de los ***números racionales*** (también conocidos como “fracciones”), simbolizados con la letra $\mathbb{Q}$. Por definición los números racionales son cocientes de la forma a/b, donde a y b son enteros y b ≠ 0. Los números enteros son un subconjunto de los racionales ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$). ¿Por qué?

Antes de presentar las propiedades fundamentales del conjunto de los números racionales, conviene repasar una regla básica en el cálculo de operaciones con fracciones, como es el cálculo del mínimo común denominador. Este es útil para sumar fracciones de distinto denominador.

Se denomina ***mínimo común denominador*** de dos o más fracciones a aquel número resultado de calcular el mínimo común múltiplo (menor número natural múltiplo) de los denominadores de dichas fracciones, generalmente con el objetivo de obtener dos o más fracciones con igual denominador y equivalentes a las fracciones iniciales. Ejemplo: el mínimo común denominador de 1/3 y 3/5 es 15 pues el mínimo común múltiplo de 3 y de 5 es 15.

El mínimo común múltiplo será entonces el denominador de las nuevas fracciones equivalentes. El nuevo numerador se calcula así:

$$Antiguo\ numerador\ *\ \frac{\text{Denominador } común}{Antiguo \text{ denominador}} = Nuevo\ numerador$$

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{5} = \frac{5}{15}+\frac{9}{15} = \frac{5+9}{15} = \frac{14}{15}$$

El conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$) es un conjunto con infinitos elementos, pero con una propiedad que no tienen los naturales ni los enteros: entre dos racionales diferentes, siempre hay otro racional. Probemos esta afirmación, conocida con el nombre de “densidad”.

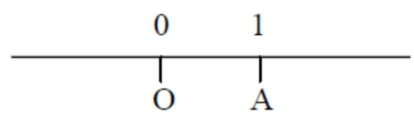
Sean a y b dos racionales diferentes; sea a < b. Si a es negativo y b positivo, entonces entre ambos está el racional cero. Probemos que entre dos racionales positivos siempre hay otro racional (la prueba es similar si ambos son negativos). Sean los racionales positivos p/q y r/s (con p/q < r/s). Probaremos que (p+r)/(q+s) es otro racional que está entre aquellos dos. (p+r) / (q+s) es un racional porque (p+r) es un entero y (q+s) también lo es, y además es (q+s) ≠ 0 (porque ambos son positivos). Se trata de un cociente de enteros que, por definición, es un número racional.

(p + r) / (q + s) < r / s, si se cumple que (p+r).s < (q+s).r, o también, aplicando la propiedad distributiva:

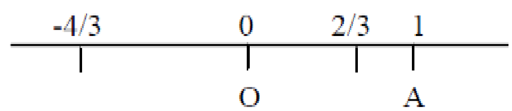
p.s + r.s < q.r + s.r

Por la propiedad conmutativa del producto resulta r.s = s.r. Si restamos a ambos miembros de la desigualdad la cantidad r.s, entonces la desigualdad se mantiene. Resulta: p.s < q.r, que es equivalente de p/q < r/s, que es la hipótesis de partida. La cadena de silogismos vale también en el sentido contrario, y con ello queda demostrado que si p/q < r/s, entonces (p + r) / (q + s) < r/s. La prueba se completa demostrando en forma análoga que p/q < (p + r) / (q + s).

Cuando un conjunto numérico tiene la propiedad que entre dos elementos del conjunto siempre hay otro, se dice que el conjunto es ***denso***. Como el conjunto Q es denso, parece razonable que podamos establecer una correspondencia (una función) entre los elementos de Q y los puntos de una recta. Sobre una recta damos un origen (el punto 0) y una unidad de medida (el segmento OA tiene medida "1"). Los números crecen de izquierda a derecha.



Cualquier número de Q tiene un correspondiente punto sobre la recta. Para ubicar el correspondiente de 2/3 se procede como sigue: se divide el segmento OA en tres partes iguales, y luego se toma el doble de una de esas partes. El segmento resultante se mide a partir de O en el sentido de la flecha, y el segundo extremo indica el punto correspondiente a 2/3. Para ubicar el correspondiente del número -4/3 en la recta, se divide OA en tres partes iguales y luego se toma un segmento cuatro veces más grande que el tercio hallado. El segmento resultante se mide a partir de O en el sentido hacia la izquierda. El primer extremo del segmento determina el punto correspondiente a -4/3.



Cabe preguntarse si también se cumple el recíproco: ¿a todo punto sobre la recta le corresponde un número racional? La respuesta es negativa. Como ejemplo, puede tomarse el resultado de la radicación, una de las operaciones inversas de la potenciación.

$$\sqrt{25} = 5 \quad porque \quad 5^2 = 25$$

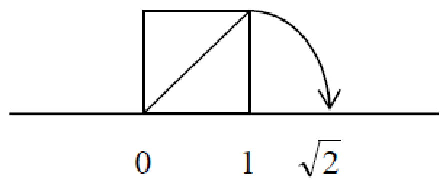
$$\sqrt[3]{\frac{1.000}{27}} = \frac{10}{3} \quad porque \quad \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \frac{1.000}{27}$$

$\sqrt{25}$ y $\sqrt[3]{\frac{1.000}{27}}$ son números racionales. Pero $\sqrt{2}$ no tiene respuesta en el conjunto de los racionales.

Probaremos esto último razonando por el absurdo: si $\sqrt{2}$ fuera racional, entonces se podría escribir como cociente de dos enteros: $\sqrt{2} = a/b$, donde a y b son enteros sin factores comunes (fracción reducida). Por definición, resulta $2 = (a/b)^2$. Se deduce entonces: $2b^2 = a^2$. Como el factor 2 aparece a la izquierda en la igualdad, a^2 también debe contener el factor 2. Entonces el número a puede escribirse de la forma $a = 2c$. Entonces: $a^2 = (2c)^2 = 4c^2$. Entonces: $2b^2 = 4c^2$, o lo que es lo mismo, $b^2 = 2c^2$. Con el mismo razonamiento, b contiene el factor 2, lo cual es absurdo porque a y b eran dos enteros sin factores comunes. Conclusión: $\sqrt{2}$ no es un número racional. Lo mismo ocurre con muchos otros resultados de la radicación, y también con los de la otra operación inversa de la potenciación, la logaritmación.

Puede probarse que, además de los enteros, los números con un número finito de cifras decimales (tal como 3,4063) y aquellos con infinitas cifras decimales, pero con términos periódicos (tal como 2,357135713571…) son números racionales. Pero aquellos con infinitas cifras decimales, pero no periódicas, no son racionales; es decir, no pueden expresarse como a/b, con a, b $\in \mathbb{Z}$, b $\neq 0$.

Si se quiere ubicar el punto sobre la recta correspondiente a $\sqrt{2}$, alcanza con construir un cuadrado de lado 1. Por Pitágoras, las diagonales del cuadrado miden $\sqrt{2}$. Tomando la diagonal del cuadrado, con origen en O, el segundo extremo de la diagonal proyectada sobre la recta indica el punto correspondiente a $\sqrt{2}$.



Todos los puntos sobre la recta que no se corresponden con un número racional, se denominan ***irracionales***. Se define el conjunto de los ***números reales*** ($\mathbb{R}$) como la unión de $\mathbb{Q}$ con el conjunto de los irracionales.

Observaciones

a) El conjunto de los números reales completa la recta. A cada número de $\mathbb{R}$ le corresponde un punto sobre la recta y viceversa. La relación entre $\mathbb{R}$ y los puntos de la recta es una función biyectiva.

b) El conjunto $\mathbb{R}$ es infinito y denso.

c) ¿Todos los resultados de la radicación son números reales? La respuesta es negativa (por ejemplo $\sqrt{-1}$ no es un número real) y este es el origen de una nueva categoría de números, los números complejos, que nosotros no estudiaremos en este curso.

Los números reales son, de los que hemos presentado, el conjunto más amplio en el que se pueden definir las operaciones aritméticas –suma, resta, multiplicación y división– sin restricciones (excepto la división entre cero), pero también la potenciación –con algunas restricciones– y también sus operaciones inversas: radicación y logaritmación. Dedicaremos estas últimas notas a presentar estas operaciones y sus principales propiedades.

2.2. Potenciación

<u>Definición 1.</u> Para a ∈ ℝ, n ∈ ℕ, se define a^n (se lee "a elevado a la n") de la siguiente manera:

$$a^n = \begin{cases} a.a.a.\ldots.a \left(\text{producto de } n \text{ factores } a, n \geq 1 \right) \\ a^0 = 1 \end{cases}$$

"a" se denomina la base de la potencia y "n" el exponente.

Observaciones

a) 0^0 no está definido, no es un número.

b) Si n no es natural, la definición de a^n es un poco más complicada y no nos ocuparemos de ella. Digamos que podemos resolver los problemas que se nos presenten usando la función x^y que tienen todas las calculadoras científicas. Así, para calcular $1{,}05^{3{,}5}$ se procede de la siguiente manera:

- se introduce en la calculadora el número 1,05
- se aprieta la tecla "x^y" o "^"
- se introduce 3,5
- se aprieta la tecla "="
- se obtiene 1,186212638.

Algunas calculadoras exigen que en el primer paso se introduzca 3,5 y en el tercer paso el número 1,05. Algunas máquinas tienen un visor más pequeño (con menos dígitos) y la respuesta podría ser 1,186213. En ambos casos se trata de aproximaciones de un número real, cuya expresión decimal contiene infinitas cifras. Como veremos más adelante $1{,}05^{3{,}5}$ puede interpretarse como el monto que genera un capital de $1 colocado a interés compuesto, a la tasa del 5% anual durante 3,5 años.

Propiedades de la potenciación

Sean: a, b números reales; n y m números naturales; a y b ≠ 0.

1) $a^n.a^m = a^{n+m}$ (producto de potencias de igual base)

2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (cociente de potencias de igual base)

3) $a^n.b^n = (a.b)^n$ (producto de potencias de igual exponente)

4) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (cociente de potencias de igual exponente)

5) $\left(a^n\right)^m = a^{n.m}$ (potencia de potencia)

<u>Ejemplo:</u> utilizar las propiedades anteriores para simplificar $\dfrac{2^8.4^7.8^5}{(2.4)^7.8^4}$

$$\frac{2^8.4^7.8^5}{(2.4)^7.8^4} = \frac{2^8.4^7.8^5}{2^7.4^7.8^4} = \frac{2^8}{2^7}\times\frac{4^7}{4^7}\times\frac{8^5}{8^4} = 2^1\times4^0\times8^1 = 16$$

Aplicación práctica de la potenciación

Un capital de $ 10.000 se coloca al 3% efectivo mensual de interés compuesto. Se pide calcular los intereses acumulados luego de: **a)** 5 meses; **b)** 5 meses y 18 días.

La fórmula del monto generado por un capital (C) colocado a interés compuesto a la tasa i durante t períodos es:

$$M = C.(1+i)^t$$

La fórmula es válida siempre que la tasa de interés y el período de la colocación se midan en la misma unidad de tiempo (por ejemplo, en meses). La fórmula para calcular el interés es:

$$I = M - C$$

Ahora es posible resolver los dos problemas antes planteados.

a) Interés generado en 5 meses: M – C = 10.000 $(1+0,03)^{5}$ – 10.000 = $1.592,74.
b) En 5 meses y 18 días: M – C = 10.000 $(1+0,03)^{5+(18/30)}$ – 10.000 = $1.800,18.

2.3. Radicación

<u>**Definición 2.**</u> $\sqrt[n]{a} = b \quad \leftrightarrow \quad a = b^n$

"n" recibe el nombre de *radical* y "a" el de *radicando*.

<u>Ejemplo:</u> $\sqrt[3]{8} = 2 \quad porque \quad 8 = 2^3$

La forma más fácil de resolver los problemas de radicación, consiste en transformarlos en problemas de potenciación, adoptando la siguiente definición complementaria:

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

y utilizando la calculadora con las teclas "x^y" o "$x^{1/y}$".

Cuando se tienen varios radicales, resultan útiles los siguientes resultados.

Propiedades de la radicación

1) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

3) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

La expresión $\sqrt[n]{a}$ está definida en el conjunto de los números reales si:

_ n es impar y a es un real cualquiera, o
_ n es par y a es un real no negativo.

Que la expresión esté definida significa que puede calcularse exactamente o con una aproximación decimal (las más de las veces) por ejemplo, con la ayuda de una calculadora. Que la expresión no esté definida para un radicando negativo y un índice par significa que se trata de una operación no permitida dentro del conjunto de los números reales.

2.4. Logaritmación

Definición 3. $\log_b x = a \quad \leftrightarrow \quad x = b^a$

Para que la expresión del logaritmo tenga sentido (para que sea un número real), se requieren tres condiciones, a saber:

$$x > 0, \; b > 0 \; \text{y} \; b \neq 1$$

De la definición se deduce que la logaritmación es una de las operaciones inversas de la potenciación: se conoce la base de la potencia (b) y el resultado de la potencia (x), y la incógnita es el exponente (a) al cual debe elevarse la base para obtener aquel resultado (x). De la propia definición se deduce que:

1) $\log_b b = 1$ **2)** $\log_b 1 = 0$ **3)** $\log_b a^n = n.\log_b a$

Con un poco de trabajo adicional se puede demostrar las siguientes propiedades:

4) $\log_b a + \log_b c = \log_b (a.c)$ **5)** $\log_b a - \log_b c = \log_b (a/c)$

6) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Dos de las bases más comúnmente utilizadas son b=10 (logaritmo decimal; notación: log) y b=e (logaritmo neperiano o natural; notación: ln o L). Observar que ambos se encuentran en la calculadora.

Aplicación práctica de la logaritmación

En el problema de la colocación financiera teníamos un capital de $ 10.000 colocado al 3% de interés efectivo mensual. Nos preguntamos ahora por cuánto tiempo deberá permanecer colocado el capital para generar $ 2.000 de interés.

Solución: generar $ 2.000 de interés es lo mismo que generar un monto de $ 12.000. El planteo queda entonces así:

$$12.000 = 10.000 \,.\, (1 + 0,03)^t$$

donde la incógnita a encontrar es "t", el tiempo que debe permanecer colocado el capital para generar $2.000 de interés.

Operando en la ecuación resulta:

$$1,03^{t} = 1,2$$

Pasando a logaritmos: $\log\left(1,03^{t}\right) = \log 1,2$ y utilizando una de las propiedades de logaritmos se obtiene:

$$t \,.\, \log\left(1,03\right) = \log 1,2$$

$$t = \frac{\log 1,2}{\log 1,03} = 6,168$$

Encontramos que el capital debe colocarse por aproximadamente 6 meses y 5 días (6,168 meses) para generar $ 2.000 de interés.

2.5. Expresiones decimales y notación científica

Las calculadoras científicas, salvo excepciones, no devuelven los resultados de las operaciones en forma fraccionaria, sino que lo hacen con notación decimal. Los siguientes son algunos ejemplos:

$$1/3 = 0,33333333333$$
$$\sqrt{2} = 1,41421356$$
$$\log\left(2\right) = 0,3013$$
$$\ln\left(2\right) = 0,693147$$

Para aprovechar mejor el espacio del visor, la calculadora utiliza, cuando lo necesita, la notación científica con potencias de 10. Ejemplos:

$$0,0000008 = 8 \times 10^{-7}$$
$$3.456.500.000 = 3,4565 \times 10^{9}$$

Ejemplos de operaciones prohibidas en el conjunto de números reales

$$\frac{5}{0} \qquad 0^{0} \qquad \sqrt[2n]{-a} \;\; con\; a > 0,\, n \in N \qquad \log_{1} a \qquad \log_{-3} a \qquad \log_{10} -4$$

2.6. Origen de los números e y π

π es el número de veces que entra el diámetro de una circunferencia en la propia circunferencia (precisamente el perímetro de una circunferencia se calcula así: diámetro x π). Esta relación es constante para toda circunferencia. Los antiguos griegos creían que dicha constante era igual al cociente 223/71 (que es una excelente aproximación). Resulta que π es un número real, no racional. Se dice que π es un número "trascendente", lo que significa que dicho número no puede ser raíz de ninguna ecuación polinómica de coeficientes enteros. Además de sus evidentes aplicaciones en geometría, este número se utiliza también en Probabilidad y Estadística.

El número **e** (en honor del matemático Euler[1]) es otro real trascendente. Se lo utiliza como base de los logaritmos "naturales" o "neperianos". Puede obtenerse una aproximación de dicho número tomando algunos términos de la suma infinita:

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

o tomando n "grande" en la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Por ejemplo: e ≅ $(1+0{,}01)^{100}$ ≅ 2,7048.

Una mejor aproximación del número **e** es 2,718281828.

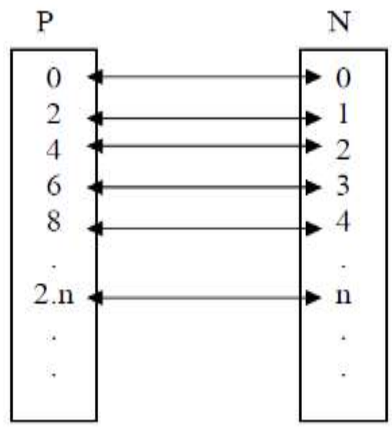
Una de las aplicaciones de este número es en Finanzas, para calcular intereses cuando la capitalización de los mismos es instantánea, así como también se lo aplica en Economía, Probabilidad y Estadística.

2.7. Cotas y extremos de un conjunto de números

Los conjuntos de números pueden ser finitos o infinitos. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, y\ \mathbb{R}$ son ejemplos de conjuntos infinitos. En virtud de la densidad de los racionales y de los reales, sabemos que entre dos racionales hay también infinitos racionales y lo mismo sucede para los reales.

Se dice que un conjunto es *infinito numerable* si sus elementos se pueden hacer corresponder biunívocamente con el conjunto de los naturales. Aunque parezca una paradoja, el conjunto de los números naturales pares (*P*) se puede poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N}$; en consecuencia, *P* es un conjunto infinito numerable.

[1] Leonhard Euler (1707-1783) fue un matemático suizo que además investigó en el campo de la física, la química, la metafísica y la astronomía.



No es fácil, pero se puede demostrar que Q es un conjunto infinito numerable. En cambio, R es un conjunto infinito no numerable (tampoco es fácil la demostración), y también es un conjunto infinito no numerable cualquier intervalo de números reales.

¿Cuáles son los conjuntos de números más usuales en Matemática? La respuesta es: el conjunto N, el conjunto R y ciertos subconjuntos de R que se definen a continuación.

Intervalo cerrado de extremos a y b: $[a, b] = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
Intervalo abierto de extremos a y b: $(a, b) = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
Intervalo semiabierto por izquierda: $(a, b] = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$
Intervalo semiabierto por derecha: $[a, b) = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$
Semi-recta de los puntos a la derecha de K, con K incluido = $\{x|\ x \in \mathbb{R},\ x \geq K\}$
Semi-recta de los puntos a la izquierda de H, con H incluido = $\{x|\ x \in \mathbb{R},\ x \leq H\}$
Entorno de centro “a” y radio “r”: $E_{a,r} = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ a - r < x < a + r\}$
Entorno reducido de centro “a” y radio “r”: $E^*_{a,r} = \{x|\ x \in \mathbb{R},\ a - r < x < a + r,\ x \neq a\}$

<u>Definición 4.</u> Se dice que un conjunto A de números está ***acotado*** si se cumplen a la vez las dos condiciones siguientes:

a) $\exists$ un número K tal que $x \leq K \quad \forall\ x \in A$
b) $\exists$ un número H tal que $x \geq H \quad \forall\ x \in A$

Se dice que el conjunto A está *acotado superiormente* si se cumple la condición a). Se dice que el conjunto A está *acotado inferiormente* si se cumple la condición b). Se dice que K es una ***cota superior*** del conjunto A, y que H es una ***cota inferior*** del conjunto A.

Observaciones

1. Si el conjunto A es finito, entonces está acotado. Alcanza con ordenar los elementos de A de menor a mayor, y entonces el menor es una cota inferior mientras que el mayor valor de A es una cota superior.

2. Si K es una cota superior del conjunto A, entonces todo número mayor que K también es cota superior de A. Si H es una cota inferior del conjunto A, entonces todo número menor que H también lo es.

3. Si el conjunto A es infinito, entonces puede o no estar acotado. Ejemplos:
- $\mathbb{N}$ está acotado inferiormente. 0 es una cota inferior. Sin embargo, no es posible encontrar un número K tal que $n \leq K \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.
- El conjunto $\mathbb{Z}$ no está acotado ni inferior ni superiormente.
- [a, b] es un conjunto acotado. Por ejemplo, b y (b+1) son cotas superiores, mientras que a y (a-3) son cotas inferiores.
- $E_{a,r}$ es un conjunto acotado. (a-r) y (a+r) son una cota inferior y otra superior, respectivamente.

Si un conjunto A admite cotas superiores, la menor de las cotas superiores se llama ***supremo*** del conjunto A. Si el supremo, además, pertenece al conjunto A, entonces el supremo se llama ***máximo*** o ***extremo superior*** del conjunto A. Análogamente, si el conjunto A admite cotas inferiores, la mayor de las cotas inferiores se llama ***ínfimo*** del conjunto A, y si el ínfimo pertenece al conjunto A, entonces se denomina ***mínimo*** o ***extremo inferior*** del conjunto A.

Ejercicio

En la Edad Media una señora cuenta sus gallinas. Si cuenta de 2 en 2 le sobra una, si cuenta de 3 en 3 le sobra una, si cuenta de 4 en 4 le sobra una y si cuenta de 5 en 5 le sobra una. El objetivo es hallar cuántas gallinas tiene la señora. Para ello, emplee este procedimiento en dos pasos: **a)** Determine el conjunto de soluciones posibles del problema. **b)** Determine el mínimo de dicho conjunto.

2.8. Los símbolos sumatoria y productoria

Los elementos de un conjunto, a veces, se pueden escribir mediante una fórmula, lo que permite simplificar notablemente la notación. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares puede simbolizarse por “2.n” donde n ∈ N. Análogamente, la expresión “2.n + 1” simboliza un número natural impar cualquiera, y n^2 representa a los números naturales que son cuadrados perfectos.

En muchas aplicaciones es necesario realizar operaciones tales como la suma o el producto de números que tienen “la misma forma” porque pertenecen a conjuntos cuyos elementos están relacionados mediante una fórmula general. En estos casos, la suma de dichos números (***sumatoria***) puede escribirse utilizando la letra griega sigma mayúscula (Σ). La expresión:

$$\sum_{i=1}^{8} Formula(i)$$

indica que se deben sumar ocho sumandos, los cuales resultan de sustituir el índice “i” en la “Fórmula(i)” por los números naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{8} 2.i = 2.1 + 2.2 + 2.3 + 2.4 + 2.5 + 2.6 + 2.7 + 2.8$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=1}^{8} (2.i - 1) = 5 + 7 + 9 + 11$$

¿Cómo puede escribirse la suma (17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41) mediante el símbolo sumatoria? Es necesario explicitar la “Fórmula(i)” y determinar el recorrido del índice “i”. Para encontrar la fórmula, puede observarse que se trata de sumandos impares, que van saltando de 4 en 4. Entonces, una fórmula apropiada es (4.i + 1) con i = 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

$$17 + 21 + 25 + 29 + 33 + 37 + 41 = \sum_{i=4}^{10} (4.i + 1)$$

Obsérvese que (4.i – 3) también sirve como fórmula para resolver el problema. En tal caso, ¿qué valores debería tomar el índice i?

Sea el conjunto A con n números, cada uno de los cuales se simboliza con x_i.

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

La suma de todos los elementos de A es:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

y el promedio de los elementos de A es: $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Supongamos ahora que los elementos del conjunto se pueden disponer en un cuadro de doble entrada (cuadro de filas y columnas), disposición que se conoce con el nombre de “matriz”.

	C_1	C_2	C_3	……..	C_n
F_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	……..	x_{1n}
F_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	……..	x_{2n}
F_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	……..	x_{3n}
…..					
F_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	……..	x_{mn}

Esta matriz tiene m filas (F_1, F_2, … ,F_m) y n columnas (C_1, C_2, … , C_n). La suma de los elementos de la primera fila es $\sum_{i=1}^{n} x_{1i}$. La suma de los elementos de la tercera columna es $\sum_{i=1}^{m} x_{i3}$. Para facilitar la notación en este caso resulta conveniente utilizar índices distintos para filas y columnas. Entonces, la suma de los elementos de la primera fila se puede expresar también así: $\sum_{j=1}^{n} x_{1j}$.

Si se trata ahora de sumar todos los elementos de la matriz, entonces se puede utilizar una “doble sumatoria”.

Suma de todos los elementos de la matriz:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}$$

Propiedades de la sumatoria

1) Constante multiplicativa: $\sum (K.x_i) = K.\sum x_i$

2) Sumatoria de la suma: $\sum (x_i + y_i) = \sum x_i + \sum y_i$

3) Interversión del símbolo: $\sum_{i} \sum_{j} x_{ij} = \sum_{j} \sum_{i} x_{ji}$

Si en lugar de sumar los elementos x_i se trata de multiplicarlos, entonces se utiliza la expresión ***productoria*** mediante la letra griega Π (pi mayúscula):

$$x_1.x_2.x_3.\ldots.x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

Por ejemplo, para representar el producto de 1x2x3x4x….x25 mediante el símbolo de productoria, se tiene:

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 25 = \prod_{i=1}^{25} i$$

Se recuerda que para este producto particular –el producto de un número natural por todos los menores que él hasta llegar al uno (o también “factorial” del número)– existe una notación aún más simple usando el signo final de exclamación:

$$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 25 = 25!$$

Notación de los números en distintas civilizaciones

INDIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ROMANA	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
EGIPCIA	|	||	|||	||||	||| ||	||| |||	|||| |||	|||| ||||	||| ||| |||	∩
MAYA	·	··	···	····	—	· —	·· —	··· —	···· —	— —