UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

CURSO 2022

POLINOMIOS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3. POLINOMIOS Y EXPRESIONES ALGEBRAICAS

3.1. Polinomios

Anteriormente se trabajó con las cuatro operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación o producto, y división), así como con las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación. Se presentaron ejemplos y se repasaron sus propiedades fundamentales. En la presente sección de este segundo tomo de las notas, nos concentraremos en generalizar tales operaciones, empleando para ello símbolos (generalmente letras), definiendo lo que se conoce como ***expresiones algebraicas***.[1]

Definición 1. Se llama ***monomio*** al producto de números por letras. Los "números" pertenecen al conjunto de los reales y las "letras" son números desconocidos o "incógnitas".

Así, son monomios:

$3.x.8.x$
$y.5.y.y$
$z.z.x.y.x.3.z.z.z$
$y.x$

Por convención, se acostumbra utilizar las últimas letras del alfabeto. Como las letras representan números, entonces es posible operar con ellos como si fueran números: valen para los monomios todas las propiedades del producto de números reales. Por eso, los ejemplos anteriores se pueden escribir colocando los números a la izquierda y las letras a la derecha, por ejemplo, en orden alfabético, en virtud de la propiedad conmutativa del producto de números:

$24.x^2$
$5.y^3$
$3.x^2.y.z^5$
$x.y$

En relación a la notación, cabe realizar una puntualización. En los ejemplos anteriores la operación multiplicación se simbolizó con un punto (.), pero usualmente en los monomios se omite dicho símbolo. Es así que $24.x^2$ (24 multiplicado por el cuadrado de x) también se escribe como $24x^2$, omitiendo el punto. De aquí en adelante aplicaremos esa simplificación en la notación.

En el monomio se pueden reconocer ciertas "partes":
- el coeficiente: es la parte numérica del monomio (24, 5, 3 y 1 en los ejemplos)
- la parte literal: es el producto de las incógnitas (x^2, y^3, $x^2.y.z^5$, $x.y$ en los ejemplos)
- el grado del monomio: es la cantidad de letras que figuran en la parte literal (2, 3, 8 y 2 en los ejemplos). Cuando el monomio es un número, no hay letras, el grado del monomio es cero.

[1] Álgebra proviene del árabe (abreviación de "alğabru walmuqābalah", que significa reducción y cotejo) y denomina al estudio de operaciones y propiedades de ciertos entes representados por símbolos, generalmente letras. El origen del álgebra parece situarse en India y Persia. Existen antecedentes entre los griegos (Diofanto, siglo III), aunque fueron los árabes quienes lo introdujeron en Europa en el siglo IX.

<u>Definición 2.</u> Se llama ***polinomio*** a la suma o resta de monomios.

Son <u>ejemplos</u> de polinomios:

$24x^2 – y^3$
$2x^1$
$x^1 + y^1 + z^1$
$2x^0 + 3x^1 + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4$
$x^4 + x^2 + x^0$

Los polinomios pueden depender de una o más incógnitas (una o más letras).

El ***grado*** de un polinomio es el mayor de los grados de sus monomios.

<u>Ejemplos:</u>

$gr(24x^2 – y^3) = 3$
$gr(2x^1) = 1$
$gr(x^1 + y^1 + z^1) = 1$
$gr(2x^0 + 3x^1 + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4) = 4$
$gr(x^4 + x^2 + x^0) = 4$

<u>Definición 3.</u> Un polinomio en varias incógnitas es ***homogéneo de grado n*** si todos sus monomios son de grado n.

<u>Ejemplos:</u>

$x^3 + y^3$ es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2xy + y^2$ es homogéneo de grado 2
x^3 es homogéneo de grado 3
$x^2 + 2y$ no es un polinomio homogéneo

Consideremos ahora polinomios en una sola incógnita (solo la letra x) e introduzcamos algunas simplificaciones en la notación. Cuando un monomio tiene coeficiente cero, entonces se lo elimina del polinomio. Cuando el grado de un monomio es 1, entonces no se escribe el exponente 1 ($3x^1$ se escribe 3x). El monomio $5x^0$ se escribe simplemente 5.

Se dice que un polinomio (en una sola incógnita) está ***reducido*** si todos sus monomios son de distinto grado.

<u>Ejemplos:</u>

$-3x^5 + 5x^3 – 2x$ es un polinomio reducido
$2x^4 + 4x^2 – 5x^4$ no es un polinomio reducido

Para obtener un polinomio reducido en el segundo ejemplo, alcanza con realizar la operación:

$$2x^4 - 5x^4 = \left(2-5\right)x^4 = -3x^4$$

Se dice que un polinomio está ***ordenado*** si los monomios aparecen en orden creciente o decreciente de sus grados.

Ejemplos:

$2 + 3x + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4$ es un polinomio ordenado
$2x^4 + 4x^2 – 5x^3$ no es un polinomio ordenado

Se dice que un polinomio de grado n es ***completo*** si en su desarrollo figuran todos los monomios de grado menor o igual que n, con coeficientes diferentes de cero.

Ejemplos:

$2 + 3x + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4$ es un polinomio de cuarto grado completo
$-3x^5 + 5x^3 – 2x$ es un polinomio de quinto grado, pero no completo (los monomios de grado 4, 2 y de grado 0 tienen coeficiente 0)

El polinomio $2 + 3x + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4$ es un polinomio reducido, ordenado y completo.

Los polinomios son entidades matemáticas –como lo son los números y los conjuntos–. Se acostumbra a denominarlos con letras mayúsculas de nuestro alfabeto –como a los conjuntos– y cuando es necesario se explicita el nombre de la incógnita.

$P = 2 + 3x + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4$
$P(x) = 2 + 3x + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4$

Definición 4. Dos polinomios son ***iguales*** si tienen el mismo grado y, una vez reducidos y ordenados, tienen iguales todos los coeficientes respectivos.

Ejemplo: Los polinomios $P = 2 + 3x + 4x^2 – 5x^3 + 6x^4$ y $Q = 2 + 3x + 4x^2 – 5x^3 + ax^4 + bx^5$, donde a y b son números, son iguales solo si $a = 6$ y $b = 0$.

Si los coeficientes del polinomio se restringen a los números dígitos [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] entonces un polinomio no es otra cosa que el desarrollo de la expresión de un número en base “x”:

Expresión del número 5489 en base 10: $5.10^3 + 4.10^2 + 8.10^1 + 9.10^0 = 5489_{(10)}$
Expresión del número 48345 en base 5: $3.5^6 + 0.5^5 + 2.5^4 + 1.5^3 + 3.5^2 + 4.5^1 + 0.5^0 = 3021340_{(5)}$

En el segundo ejemplo los coeficientes se restringen al conjunto [0, 1, 2, 3, 4], que son los únicos dígitos necesarios para trabajar en base 5. Muchas civilizaciones primitivas trabajaban en base 5. Los mayas usaban la base 20. Los árabes fueron los primeros en adoptar la base 10.

3.2. Operaciones con polinomios

Es posible definir operaciones con los polinomios. De hecho, como un polinomio no es otra cosa que la suma, resta y producto de números y letras –que, como ya dijimos, representan números– se pueden realizar con ellos todas las operaciones aritméticas. Y además, todas las propiedades que estas operaciones tenían con los números son trasladables a los polinomios.

Así, se cumplen las propiedades de la suma: conmutativa, asociativa, existencia de neutro y existencia de opuesto. Para hallar el opuesto de un polinomio, por ejemplo, alcanza con cambiar todos los signos de sus coeficientes.

Ejemplo: Para sumar los polinomios $T = 3x^3 - 2x + 8$ y $R = 4x^2 + 5x - 6$ se procede como en el esquema que sigue (luego de ordenar y reducir los sumandos, si fuera necesario).

$$\begin{array}{rr} & 3x^3 + 0x^2 - 2x + 8 \\ + & 4x^2 + 5x - 6 \\ \hline & 3x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \end{array}$$

El producto de polinomios es una operación que verifica las propiedades conmutativa, asociativa y existencia de neutro – el neutro del producto es el polinomio 1 – pero no se cumple la existencia de inverso. El inverso del polinomio (x + 1) es la expresión algebraica $\frac{1}{x+1}$, que no es un polinomio (no se puede escribir como suma o resta de monomios).

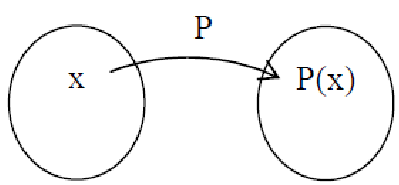
Para multiplicar dos polinomios se puede aplicar la propiedad distributiva generalizada.

Ejemplo: Para multiplicar $(3x^2 + 2x - 1)$ por $(x^3 - 2x - 3)$ es necesario multiplicar cada monomio del primer factor por cada monomio del segundo factor, luego sumar todos los productos y reducir el resultado.

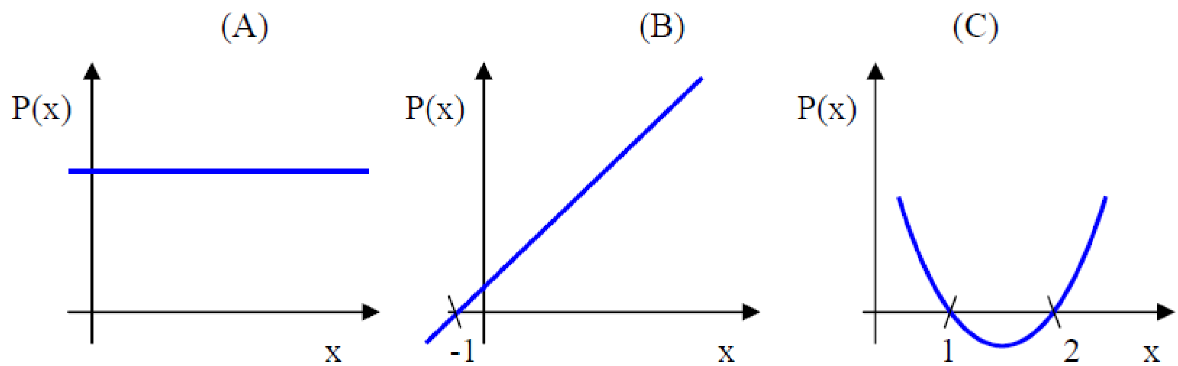
$$\begin{array}{rl} & 3x^2 + 2x - 1 \\ \text{X} & x^3 - 2x - 3 \\ \hline & 3x^5 + 2x^4 - x^3 \\ & \qquad - 6x^3 - 4x^2 + 2x \\ & \qquad\qquad - 9x^2 - 6x + 3 \\ \hline & 3x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 13x^2 - 4x + 3 \end{array}$$

3.3. Función polinómica

A partir de la entidad polinomio es posible definir funciones de dominio y codominio reales, haciendo corresponder a cada número real "x" el valor que resulta de sustituir dicho número en P(x).



A estas funciones se las conoce como ***polinómicas*** y su gráfico suele ser bastante fácil de representar en un par de ejes cartesianos ortogonales cuando el grado del polinomio es bajo. En particular, cuando el polinomio es de grado 0 o 1 el gráfico de la función polinómica es una recta (gráficos A y B, respectivamente), y cuando el grado es 2 el gráfico es una parábola (gráfico C).



3.5. Raíces del polinomio

<u>Definición 5.</u> Se denomina ***raíz*** de la función polinómica al valor de la incógnita (en el lenguaje de funciones se le llama "variable") que hace que el valor de la función polinómica sea nulo.

$$\alpha \text{ es raíz de P} \leftrightarrow P(\alpha) = 0$$

Gráficamente, la raíz de P es un valor de x donde el gráfico de la función corta al eje Ox. En el gráfico (A) no hay raíces, en el gráfico (B) la única raíz es $\alpha = -1$ y en el gráfico (C) la función polinómica tiene dos raíces: $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$.

Dado un polinomio, los problemas que pueden presentarse respecto de sus raíces son:
- cuantas raíces reales tiene,
- cómo encontrar todas sus raíces reales,
- cómo aproximarlas cuando son reales irracionales.

Estos problemas, que ya se habían planteado griegos y árabes a comienzos de nuestra era, recién tuvieron respuesta a partir del siglo XVI y siguientes. La propiedad más relevante sobre raíces de polinomios expresa: ***Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales***. El teorema proporciona una cota superior del número de raíces, pero no resuelve los problemas arriba enunciados. Para encontrar las raíces reales existen varios métodos que permiten obtenerlas exactamente: el teorema de la raíz racional, la propiedad que relaciona coeficientes del polinomio con sus raíces, el teorema de la descomposición factorial y el método de Ruffini para "bajar" el grado del polinomio. Cuando las raíces son reales irracionales existen métodos para aproximarlas mediante números decimales prefijando el máximo error tolerable. En este curso no trataremos ninguno de estos métodos. Veremos sí algunos casos particulares.

Cuando el polinomio es de primer grado, siempre admite una raíz real (única).

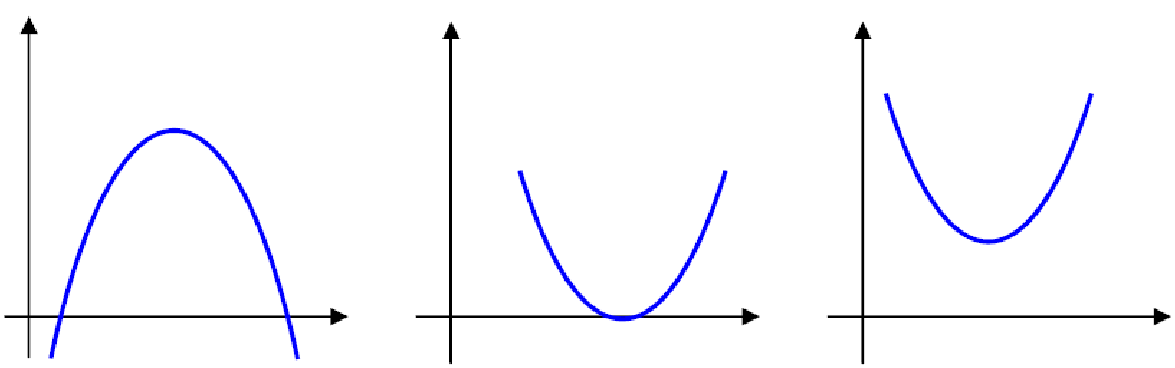
$$P(x) = a + bx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = -\frac{a}{b}}$$

Cuando el polinomio es de segundo grado, admite raíces reales si la expresión denominada "discriminante" es mayor o igual que 0.

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \text{es el discriminante}$$

Las expresiones $\alpha_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ y $\alpha_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ proporcionan las dos raíces de la función polinómica, en caso que Δ sea mayor que cero.[2] Si $\Delta = 0$, entonces el polinomio tiene una única raíz (que se suele denominar "doble"). Pero si el discriminante es negativo, entonces la función no tiene raíces reales (tendrá sí raíces complejas). Estas situaciones se pueden visualizar gráficamente.



$\Delta > 0$ $\qquad$ $\Delta = 0$ $\qquad$ $\Delta < 0$

El coeficiente del monomio de grado 2 cumple un papel relevante en la forma del gráfico: si a > 0 entonces la parábola "mira" hacia arriba (como en los casos 2 y 3 de los gráficos anteriores), y si a < 0 entonces "mira" hacia abajo (como en el caso 1).

[2] Estas expresiones se conocen como la fórmula de Báscara o Bhaskara. Bhaskara II (1114-1185) fue un matemático-astrónomo indio, que alcanzó un notable desarrollo en el campo del cálculo, la astronomía, los sistemas de numeración y la resolución de ecuaciones.

De acuerdo con el Teorema de Descomposición Factorial, si α_1 y α_2 son las raíces del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, entonces el polinomio también se puede expresar así:

$$P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

En forma más general, si el polinomio es de grado n y admite las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ y a_n es el coeficiente del monomio de mayor grado, entonces el polinomio puede expresarse como producto así:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n)$$

Si el polinomio P es de grado n y admite solo k raíces reales (k < n), entonces todavía P se puede factorizar así:

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_k).\ Q(x)$$

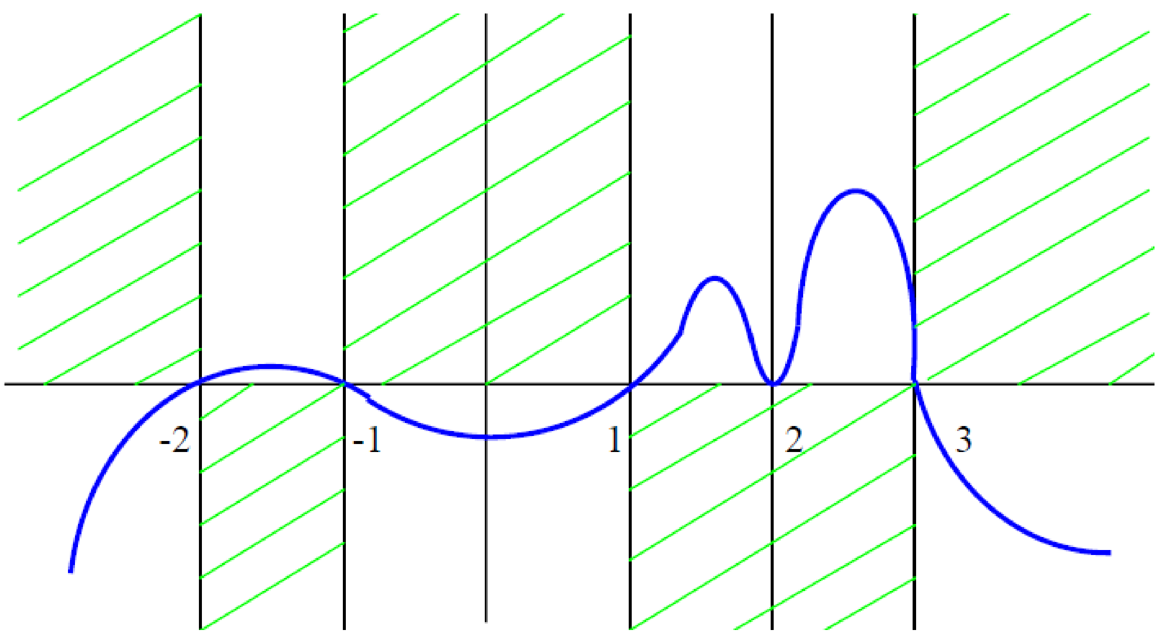
donde Q es un polinomio de grado (n – k).

Ejemplo: El polinomio P(x) es de grado 6, el coeficiente del monomio de 6° grado es (-4) y admite las raíces 1, 2, 2, 3, -1 y -2. Expresar el polinomio en forma factorial.

$$P(x) = -4(x - 1)(x - 2)(x - 2)(x - 3)(x-(-1))(x -(-2))$$
$$P(x) = -4(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)(x +1)(x +2)$$

3.6. Signo del polinomio

¿Cómo es aproximadamente el gráfico de la anterior función polinómica P(x)?



Las raíces de P son puntos de corte del gráfico con el eje Ox. Las raíces consecutivas determinan intervalos: (-∞, -2), (-2, -1), (-1, 1), (1, 2), (2, 3) y (3, +∞). Obsérvese que en esos intervalos el signo de P es o bien positivo o bien negativo (no hay cambios de signo dentro de esos intervalos). De acuerdo con el gráfico precedente, el esquema del signo de P es:

En el esquema se colocan todas las raíces y en los intervalos que estas determinan se señala el signo del gráfico (+ o – según corresponda). ¿Existe alguna regla general para hallar el signo de un polinomio de grado cualquiera? La respuesta es afirmativa si se conocen todas las raíces y el signo del coeficiente del monomio de mayor grado (a_n). En este caso el polinomio se puede factorizar y hallar el signo en cada intervalo mediante la regla del producto de números. Si se trabaja de derecha a izquierda, el primer intervalo tiene el signo de a_n. Al pasar de un intervalo al siguiente –siempre de derecha a izquierda– si la raíz es simple o de multiplicidad[3] impar, entonces se produce un cambio de signo al pasar al nuevo intervalo. Si la raíz es de multiplicidad par, entonces el nuevo intervalo mantiene el signo del contiguo a la derecha.

3.7. Fracciones algebraicas

El cociente de polinomios da origen a una nueva entidad matemática denominada fracción algebraica.

<u>Definición 6.</u> $F = \frac{P}{Q}$ es una fracción algebraica si P y Q son dos polinomios y Q no es el polinomio nulo.

<u>Ejemplos:</u> $\frac{2x+1}{x^2-1}$ $\quad \frac{1}{x+2}$ $\quad \frac{x-3}{2}$ $\quad \frac{4x^3-2x^2+8x-1}{3x^2-x-9}$

La suma, resta, producto y cociente de fracciones algebraicas siguen las mismas reglas operatorias de las fracciones numéricas.

<u>Ejemplos:</u>

$$\boldsymbol{a})\quad \frac{2x}{x-1}+\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x(x+1)+(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x^2+3x-2}{x^2-1}$$

$$\boldsymbol{b})\quad \frac{2x}{x-1}-\frac{x+2}{x+1} = \frac{2x(x+1)-(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+2}{x^2-1}$$

[3] Se denomina "multiplicidad" a la cantidad de veces que se repite la misma raíz en el polinomio. En el ejemplo precedente la raíz 2 es de multiplicidad 2, mientras que las restantes raíces son de multiplicidad 1.

$$\textbf{\textit{c}})\quad \frac{2x}{x-1} \times \frac{x+2}{x+1} \;=\; \frac{2x(x+2)}{(x-1)(x+1)} \;=\; \frac{2x^2+4x}{x^2-1}$$

$$\textbf{\textit{d}})\quad \frac{2x}{x-1} \div \frac{x+2}{x+1} \;=\; \frac{2x}{x-1} \times \frac{x+1}{x+2} \;=\; \frac{2x(x+1)}{(x-1)(x+2)} \;=\; \frac{2x^2+2x}{x^2+x-2}$$

3.8. Función racional

¿Es posible definir nuevas funciones a partir de las fracciones algebraicas?

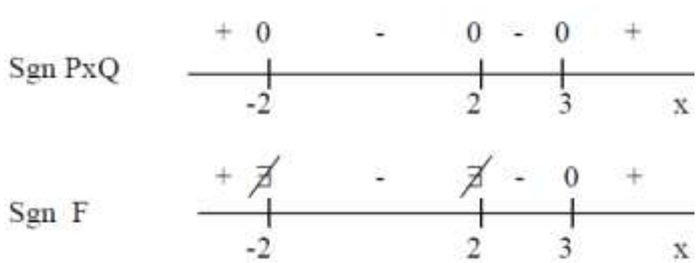
Por ejemplo, consideremos la relación que a cada valor de "x" le asigna el valor de $\frac{2x}{x-1}$. Si el dominio y el codominio son los números reales, entonces esta relación no es una función porque el valor x = 1 del dominio no tiene correspondiente en el codominio (pues para x = 1 se anula el denominador). Para que la relación $x \to \frac{2x}{x-1}$ sea una función, es necesario restringir el dominio eliminando el o los valores de x que hacen que la fracción tenga denominador nulo. En este ejemplo, x = 1 es el único valor que debe ser excluido del dominio de la función:

$$\text{Dominio de F} = D(F) = \{x \mid x \in R,\ x \neq 1\}$$

¿Cómo es el gráfico de la función fracción algebraica? El gráfico es un poco más complicado que el de las funciones polinómicas, y este problema lo abordaremos más adelante. Pero sí podemos hallar el esquema del signo de F. Si F = P/Q, entonces resulta que Sgn F = Sgn (PxQ), excepto en los puntos tales que Q(x) = 0. En tales puntos no existe el signo de la fracción (recordar que tales puntos quedan excluidos del dominio de la función).

<u>Ejemplo:</u> Hallar el esquema del signo de $\quad F \mid F(x) = \frac{4x^2-20x+24}{x^2-4}$

El polinomio del numerador tiene raices $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$. El polinomio del denominador tiene raíces $\beta_1 = 2$ y $\beta_2 = -2$. El polinomio P x Q tiene las raíces -2, 2 (doble), 3 y el coeficiente de su término de mayor grado es +4. En consecuencia:



3.9. Productos notables

Sean P y Q dos polinomios. Se denomina ***binomio*** a las expresiones (P+Q) y (P-Q). Se denominan ***productos notables*** a las siguientes expresiones:

$$(P+Q)^2 = P^2 + 2PQ + Q^2$$
$$(P-Q)^2 = P^2 - 2PQ + Q^2$$
$$(P+Q)(P-Q) = P^2 - Q^2$$
$$(P+Q)^3 = P^3 + 3P^2Q + 3PQ^2 + Q^3$$

¿Y si fuera necesario elevar el binomio a un exponente más alto, por ejemplo, $(P+Q)^7$? Para resolver este problema existe un resultado general, conocido como el ***desarrollo del binomio de Newton***.[4] Recordando el significado de la expresión "n factorial" (n!) y adoptando la notación $C_i^n = \dfrac{n!}{(n-i)!i!}$ (que se lee "combinaciones de i elementos tomados de n elementos" o "combinaciones de n en i", donde siempre n≥i) se tiene el siguiente resultado:

$$(P+Q)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n.P^i.Q^{n-i}$$

Ejemplos:

1. $(x^2+3x)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(3x) + (3x)^2 = x^4 + 6x^3 + 9x^2$

2. $(x^2+3x)^5 = C_0^5(x^2)^0(3x)^5 + C_1^5(x^2)^1(3x)^4 + C_2^5(x^2)^2(3x)^3 + C_3^5(x^2)^3(3x)^2 + C_4^5(x^2)^4(3x)^1 + C_5^5(x^2)^5(3x)^0$

$= 243x^5 + 405x^6 + 270x^7 + 90x^8 + 15x^9 + x^{10}$

[4] Isaac Newton (1643-1727) fue un físico, astrónomo y matemático inglés, famoso por su descubrimiento de las leyes de gravedad.