UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

CURSO 2021

ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

5.1. Ecuaciones

Sean f y g dos funciones cuyos dominios son conjuntos de números (cuando dependen de una sola variable) o cuyos dominios son conjuntos de pares, ternas, etc. (cuando las funciones dependen de dos, tres o más variables). En todos los casos, los codominios de las funciones son conjuntos de números.

Considérese una nueva entidad matemática llamada ***ecuación*** que tiene la forma

$$f = g$$

Si las funciones dependen de una sola variable, entonces $f\,(x) = g(x)$ es una ecuación "en x". Si las funciones dependen de de dos variables, entonces $f\,(x,y) = g(x,y)$ es una ecuación "en x e y"; en tres variables se tiene la ecuación $f\,(x,y,z) = g(x,y,z)$.

En los polinomios las letras se conocen como "incógnitas", en las funciones se las denomina "variables", mientras que en las ecuaciones se les llama "incógnitas".

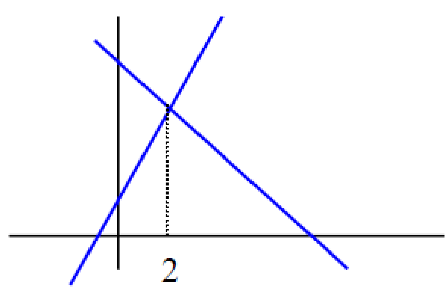
Definición 1. Resolver la ecuación $f = g$ consiste en encontrar todos los elementos comunes de los dominios de f y g que hacen que los valores de las funciones (las imágenes) coincidan. El conjunto de elementos que satisfacen la igualdad $f\,(x) = g(x)$, o bien las igualdades $f\,(x,y) = g(x,y)$ o $f\,(x,y,z) = g(x,y,z)$, se denomina ***conjunto solución*** de la ecuación y cada elemento del conjunto solución se llama ***solución*** o raíz de la ecuación.

Ejemplo 1: Si $f\,(x) = 2x + 1$ y $g(x) = -x + 7$, es fácil demostrar que la ecuación $2x + 1 = -x + 7$ tiene por única solución $x = 2$. El conjunto solución es $S = \{x|\ x = 2\}$.

Ejemplo 2: Si $f\,(x,y) = 3x + 3y$ y $g(x,y) = x + y + 2$, entonces la ecuación $3x + 3y = x + y + 2$ tiene como conjunto solución $S = \{(x, y)|\ y = -x + 1\}$, el cual contiene infinitos pares de reales.

Desde el punto de vista geométrico, el conjunto solución de una ecuación es el conjunto de puntos (de la recta, del plano, del espacio de 3 dimensiones o de un hiperespacio) donde se intersectan los gráficos de las funciones f y g.

Así, en el ejemplo 1, la única raíz $(x = 2)$ es la abscisa del punto donde se intersectan las funciones $f\,(x) = 2x + 1$ y $g(x) = -x + 7$, cuyos gráficos se representan por dos rectas en un par de ejes cartesianos ortogonales.



En el ejemplo 2, los gráficos de las funciones $f(x,y) = 3x + 3y$ y $g(x,y) = x + y + 2$ se representan por dos planos en el espacio tridimensional. El conjunto solución $S = \{(x, y) | y = -x + 1\}$ es el conjunto de los puntos de una recta en el plano bidimensional.

Consideremos ahora, en particular, las funciones de una sola variable, las que dan origen a ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$. Resolver la ecuación es encontrar los valores de la incógnita que satisfacen la igualdad de las dos funciones.

Si f es un polinomio y $g(x) = 0$, entonces resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ equivale al problema de encontrar las raíces de un polinomio. Para resolver ecuaciones más generales es necesario enunciar algunas propiedades.

Definición 2. Dos ecuaciones son ***equivalentes*** si sus conjuntos solución son iguales.

Observación: si dos ecuaciones no tienen raíces, entonces son equivalentes, pues en ambos casos, el conjunto solución es el conjunto vacío.

Propiedades de las ecuaciones

1. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) + K = g(x) + K$ son equivalentes para todo $K \in R$.

2. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x) - g(x) = 0$ son equivalentes.

3. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $K.f(x) = K.g(x)$ son equivalentes para todo $K \in R$, $K \neq 0$.

4. Las ecuaciones $f(x) = g(x)$ y $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ son equivalentes si $h(x) \neq 0$ y se cumple que $[D(f) \cap D(g)] \subseteq D(h)$.

5. La ecuación $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ tiene todas las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$ a condición que $[D(f) \cap D(g)] \subseteq D(h)$.

6. La ecuación $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ tiene todas las raíces de la ecuación $f(x) = g(x)$.

Las reglas 5 y 6 se aplican cuando las ecuaciones $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ son más fáciles de resolver que la ecuación $f(x) = g(x)$. Pero en estos casos habrá que tener un cuidado especial porque las ecuaciones no son equivalentes y las primeras pueden tener raíces que no son raíces de $f(x) = g(x)$ (se pueden introducir "raíces extrañas"). Obtenidas las raíces de $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ o de $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$, para resolver la ecuación $f(x) = g(x)$ alcanzará con verificar cuáles de aquellas son también raíces de esta última.

Aplicando estas reglas, las ecuaciones en las que intervienen solo polinomios resultan equivalentes a ecuaciones de la forma $P(x) = 0$.

Como casos particulares tenemos:

$$ax + b = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuya resolución ya hemos visto. En el segundo caso, las raíces pueden obtenerse aplicando radicales (como la fórmula de Bhaskara presentada anteriormente).

Los casos $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ y $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ también se pueden resolver aplicando radicales, resultados obtenidos principalmente por la escuela matemática "italiana"[1], recién en el siglo XVI (la ecuación polinómica de segundo grado ya la habían resuelto los griegos de la antigüedad).

¿Qué puede decirse de las ecuaciones polinómicas de quinto grado o más, por ejemplo, $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f = 0$? ¿Pueden resolverse también mediante radicales? Recién en la tercera década del siglo XIX dos matemáticos muy jóvenes, Nils Abel[2] y Evariste Galois[3], aunque por métodos distintos, lograron demostrar que estas ecuaciones no pueden resolverse, en general[4], mediante radicales.

Pero las ecuaciones pueden contener expresiones más complejas que los polinomios. Los siguientes son algunos ejemplos.

Ecuación con fracciones algebraicas: $(E_1)\, \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3x+2}{x-2}$

Ecuación con radicales: $(E_2) \sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-4x+1}$

Ecuación trigonométrica: $(E_3)\ sen(x+\pi) = cos^2(x+\pi)$

Ecuación logarítmica: $(E_4)\ ln(x^2+9) = 1 + ln(x+2)$

Para resolver (E1) se puede aplicar la propiedad 5 enunciada más arriba, multiplicando ambos miembros de la ecuación por la expresión $h(x) = (x – 1)(x - 2)$, obteniéndose la solución $S = \{0, -2\}$. Para resolver (E2) se puede aplicar la propiedad 6, lo que conduce a una ecuación polinómica con solución $S =\{1,4\}$. Sin embargo, la ecuación (E2) solo admite como raíz $x = 4$, pues para $x = 1$ los radicandos son negativos y no están definidos en el campo real. La raíz $x = 1$ es "extraña" y se introdujo en el problema al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. No son objeto del curso la resolución de ecuaciones trigonométricas, logarítmicas u otras más complicadas.

[1] Trabajaron en la solución de estos problemas Gerolamo Cardano (1501-1576), nacido en Pavía, Niccolò Fontana (apodado Tartaglia – tartamudo) (1500-1557), nacido en Brescia, Ludovico Ferrari (1522-1565), nacido en Bolonia, y François Viète (1540-1603), francés.

[2] Nils Abel (1802-1829) fue un matemático noruego.

[3] Evariste Galois (1811-1832) fue un matemático francés.

[4] Sí se pueden resolver por radicales algunos casos particulares. Por ejemplo, la ecuación $x^5 - 2 = 0$ tiene por única raíz real $x = \sqrt[5]{2}$.

4.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones de las cuales interesan las soluciones comunes. Considérense un sistema con K ecuaciones y sean S_1, S_2, S_3, …… , S_k los conjuntos solución de dichas ecuaciones. Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar la intersección de sus conjuntos solución.

Conjunto solución del sistema = $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \ldots\ldots \cap S_k$

Un sistema de ecuaciones es *lineal* cuando todas las funciones que intervienen en las ecuaciones son funciones polinómicas de hasta grado 1; es decir, cuando todas las funciones que intervienen son funciones lineales. Los siguientes son ejemplos de sistemas de ecuaciones no lineales.

$$\begin{cases} y = x^3 - 2x \\ y = e^{2x} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^2 + 2x + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

La llave a la izquierda indica que el par de ecuaciones forma un sistema, esto es, que interesa encontrar el conjunto de pares (x,y) que satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

<u>Definición 3.</u> Dos sistemas de ecuaciones son ***equivalentes*** si sus conjuntos solución son iguales.

Propiedades de los sistemas de ecuaciones

1. Si se aplican las propiedades 1 a 4 de las ecuaciones a cualquiera de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.

2. Si se cambia el orden de las ecuaciones del sistema, se obtiene un sistema equivalente.

3. Si a una ecuación se le suma o resta un múltiplo de otra, se obtiene un sistema equivalente.

4. La forma de un sistema lineal con <u>n</u> incógnitas y <u>m</u> ecuaciones es la siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

4.1. Si b_1, b_2, … , b_m son todos nulos, entonces el sistema lineal se dice ***homogéneo***. Si el sistema lineal es homogéneo, entonces el conjunto solución no es vacío (siempre tiene soluciones); nótese que en este caso una raíz trivial es $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

4.2. Todo sistema lineal de ecuaciones puede clasificarse en una y solo una de tres categorías:

a) ***Sistema compatible determinado***: el conjunto solución contiene una única solución.
b) ***Sistema compatible indeterminado***: el conjunto solución admite infinitas soluciones.
c) ***Sistema incompatible***: el conjunto solución es el conjunto vacío.

Para resolver un sistema lineal de ecuaciones se pueden utilizar varios métodos. La aplicación reiterada de la propiedad 3, generando ceros en los coeficientes a_{ij} por debajo de los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. es conocido como el ***método de Gauss***[5] o ***método de la escalera*** (o ***de reducción*** o ***eliminación***).

<u>Ejemplo:</u> Sea el sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ x + 2y + z = 7 \\ 3x - 4y - z = -1 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema por el método de la escalera. En primer lugar, vamos a colocar la segunda ecuación como primera, para facilitarnos los cálculos.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 4y - z = -1 \end{cases}$$

A continuación, vamos a generar un cero en el primer coeficiente de la segunda ecuación, sumándole a la segunda ecuación la primera multiplicada por (-2).

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y - 4z = -13 \\ 3x - 4y - z = -1 \end{cases}$$

En el siguiente paso, generamos un cero en el primer coeficiente de la tercera ecuación, sumándole a esta la primera multiplicada por (-3).

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y - 4z = -13 \\ -10y - 4z = -22 \end{cases}$$

Se puede sumar a la tercera ecuación la segunda multiplicada por (-10) para generar un cero en el coeficiente de "y" en la tercera ecuación, y entonces se obtiene:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y - 4z = -13 \\ 36z = 108 \end{cases}$$

[5] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue un astrónomo, físico y matemático nacido en Brunswick (en la actual Alemania). Fue apodado "Príncipe de la Matemática" por los colegas de su época. El gráfico de la función de densidad normal (Estadística) se conoce como "campana de Gauss".

Ahora puede verse el sistema completamente escalerizado. En virtud de las propiedades enunciadas más arriba, este sistema es equivalente del primero, es decir, tiene el mismo conjunto solución. En el último peldaño de la escalera se puede despejar el valor de la incógnita z: $\boxed{z = 108/36 = 3}$. Si se sube un peldaño y se sustituye la z por el valor calculado, entonces se obtiene: $-y - (4)(3) = -13$, y despejando la y resulta: $\boxed{y = 1}$. Finalmente, subiendo un peldaño más se tiene: $x + (2)(1) + 3 = 7$, y despejando la x resulta: $\boxed{x = 2}$. Encontramos una única solución (x,y,z) = (2,1,3). Por tanto, el sistema es compatible determinado.

En el capítulo sobre Matrices volveremos sobre el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, pero utilizando el enfoque matricial.