UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

CURSO 2022

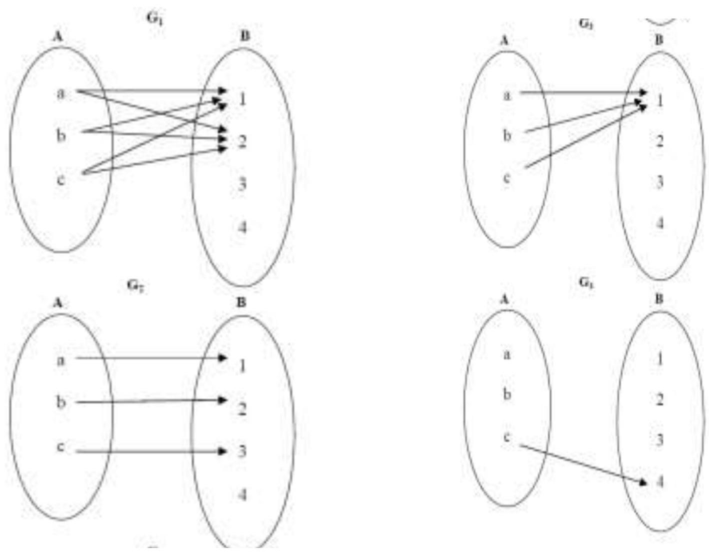
RELACIONES Y FUNCIONES

RELACIONES Y FUNCIONES

En esta sección vamos a repasar los conceptos básicos sobre funciones, un tema que recordarás de la Enseñanza Media, y para el cual resultan fundamentales los conceptos sobre conjuntos vistos anteriormente. Comenzaremos con algunas definiciones previas, antes de definir qué se entiende por una función.

Definición 1. Se llama ***relación*** de A en B a un vínculo establecido entre dos conjuntos, en que a por lo menos un elemento del primer conjunto (A) se le hace corresponder por lo menos un elemento del segundo conjunto (B).

A continuación se presentan cuatro ejemplos de relaciones, representadas mediante diagramas de Venn.



Algunas relaciones pueden definirse por comprensión, especificando la regla de formación de los pares. Por ejemplo, en el caso de G_3 la relación consiste en hacer corresponder a todo elemento de A el elemento "1" de B.

Otro ejemplo: sea A el conjunto de todos los países de la Tierra y sea B el conjunto de todas las ciudades del mundo. Se definen dos relaciones:

R_1 = a cada país de A se le hace corresponder su capital en B.

R_2 = a cada país de A le corresponden en B todas las ciudades de ese mismo país con más de 1.000.000 de habitantes.

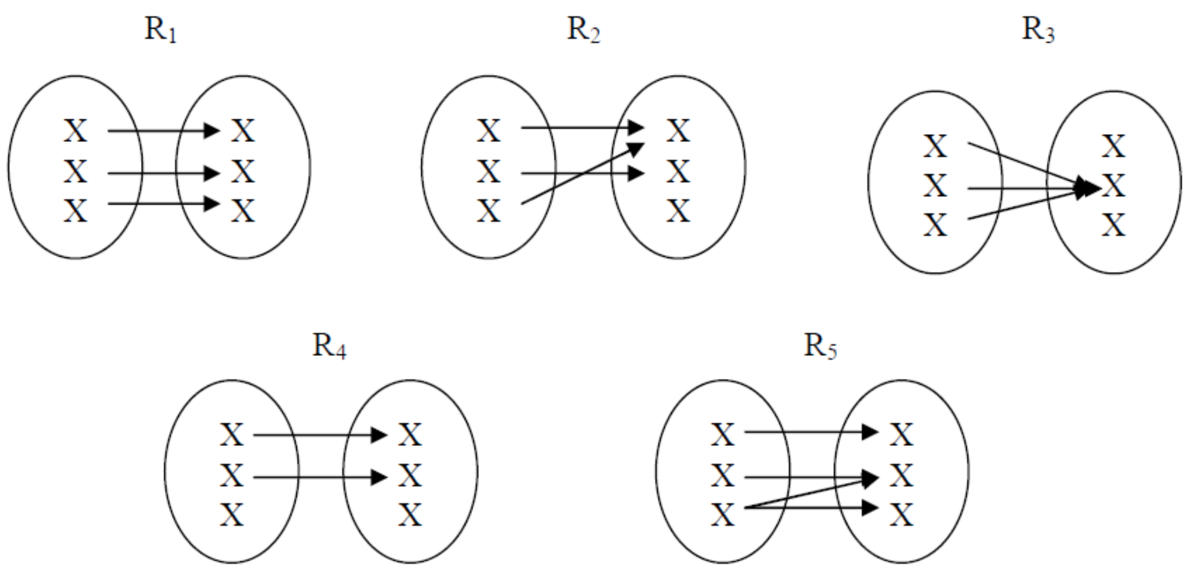
En el caso de R_1 todos los elementos de A son "origen" de una y solo una flecha en el gráfico, porque todos los países tienen una sola capital (Bolivia podría considerarse una excepción del cual parten dos flechas). En el caso de R_2 algunos países podrían no figurar como primera componente del gráfico por no tener mega-ciudades (Bolivia es un ejemplo de este tipo). De Uruguay partiría una única flecha en el gráfico de R_2 (pues Montevideo es la única mega-ciudad), mientras que de Brasil, Argentina, México y EE.UU. partirían varias flechas en el gráfico de R_2 (tantas como ciudades que pasan del millón de habitantes en dichos países).

<u>Definición 2.</u> Se llama ***función de A en B*** a toda "relación de A en B" que cumple con la siguiente condición:

Cada elemento de A tiene un único correspondiente en B.

<u>Nota:</u> A es el ***dominio*** o *conjunto de partida*; B es el ***codominio*** o *conjunto de llegada*.

Entonces una función no es más que una relación, pero una relación particular, que debe cumplir la condición mencionada en la definición. Veremos a continuación algunos ejemplos de relaciones para identificar cuáles de ellas son también funciones.



R_1, R_2 y R_3 son funciones. R_4 no es función porque uno de los elementos de A no tiene ningún correspondiente en B y R_5 no es función porque uno de los elementos de A tiene más de un correspondiente en B.

<u>Otro ejemplo:</u> la relación que hace corresponder a cada número natural (A es el conjunto de los naturales) su cuadrado (B es también el conjunto de los naturales) es una función, pues todo número natural tiene un cuadrado natural, y este es único. Esta función tiene, además, una interpretación geométrica: relaciona el lado de un cuadrado con el área del cuadrado.

En el gráfico de una función, el primer componente del par se denomina *argumento* de la función o *pre-imagen* y el segundo componente es el *valor* o *imagen* de la función para dicho argumento. Si dominio y codominio de la función son conjuntos de números, entonces el argumento y valor se denominan también abscisa y ordenada respectivamente.

Notación: Un elemento cualquiera del dominio se simboliza con la letra "x" y uno cualquiera del codominio con la letra "y". Al elemento correspondiente de x según la función *f* se lo simboliza con la expresión *f* (x); se lee "*f* de x". Entonces las notaciones más habituales para la función del último ejemplo son:

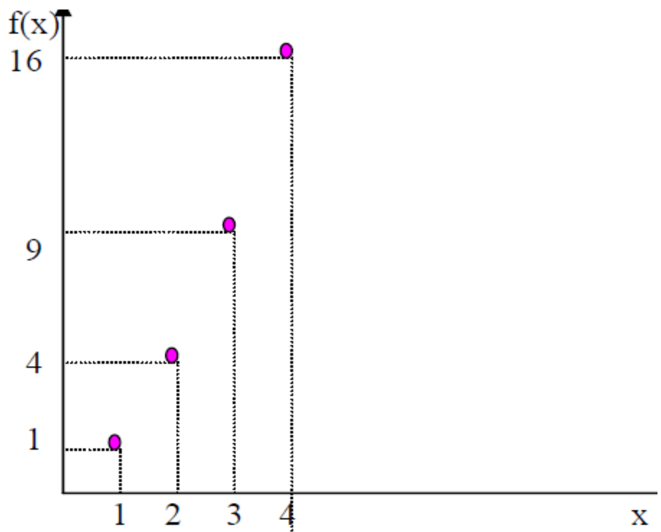
$$x \xrightarrow{f} f(x) = x^2$$

$$f\text{: } f(x) = x^2$$

O también: $f : A \rightarrow B \mid f\left(x\right) = x^2$

Si A y B están sobreentendidos, entonces se escribe simplemente $f : f(x) = x^2$

En caso que dominio y codominio de la función sean conjuntos de números, resulta muy útil la representación del gráfico en un par de *ejes cartesianos ortogonales*.



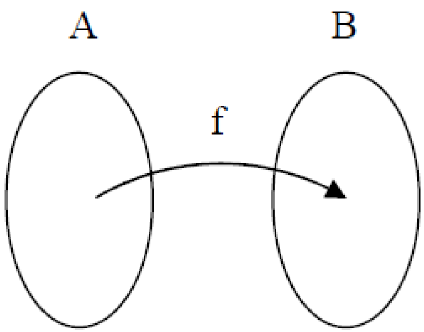
En el gráfico precedente se representan, en la intersección de las líneas punteadas, cuatro elementos del gráfico de la función *f*: $f(x) = x^2$, los pares (1,1), (2,4), (3,9) y (4,16). Los ejes se dicen "ortogonales" porque son perpendiculares.

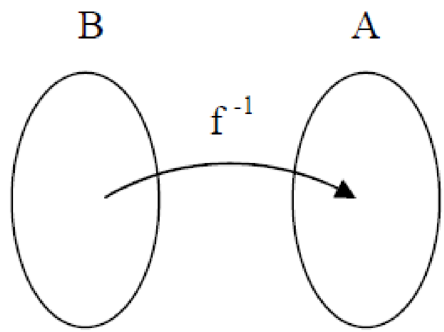
El conjunto de valores de *f*, elementos del codominio a los que llegan flechas, se denomina ***conjunto imagen*** o ***recorrido*** de *f*.

Recorrido de f = {z | z pertenece a B y existe x en A tal que $f(x) = z$} = $f(A)$

<u>Definición 3.</u> Sea *f* una función de A en B. Se denomina ***función inversa*** de *f* (notacion: f^{-1}) a otra función tal que a cada imagen le hace corresponder su pre-imagen.

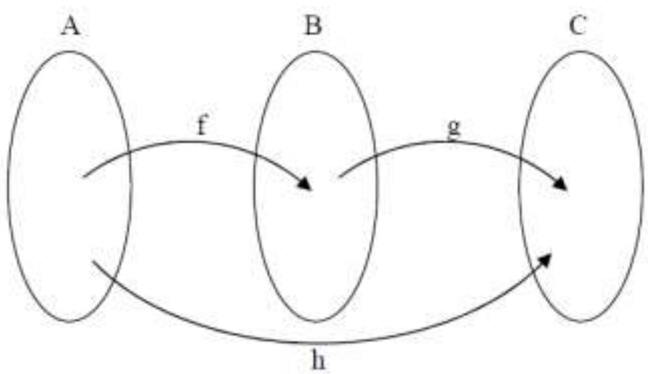
<u>Observación:</u> no siempre existe la función inversa. Para que exista la función inversa de *f* se tiene que cumplir que todo elemento de B sea imagen, y que cada elemento de B sea imagen de un único argumento.





<u>Definición 4.</u> Sean dos funciones *f* y *g*. Se dice que *h* es la ***función compuesta*** de *f* y *g* si el conjunto de partida de *h* es el conjunto de partida de *f*, el conjunto de llegada de *h* es el conjunto de llegada de *g*, y la imagen de un argumento x por *h* se obtiene de aplicar a x la función *f* y al valor *f* (x) la función *g*.

$$h \text{ es función compuesta de } f \text{ y } g \leftrightarrow h(x) = g[f(x)] = gof(x)$$



Ejemplo 1: la función $h: h(x) = e^{x^2+4x-1}$ es una función compuesta donde puede identificarse a $g: g(x) = e^x$ y a $f: f(x) = x^2 + 4x - 1$

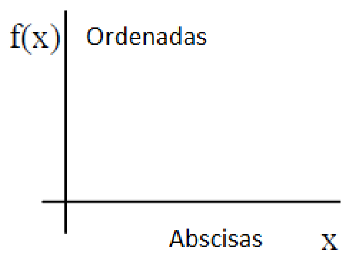
Ejemplo 2: Sean g(x) = x – 3 y f(x) = $\sqrt{x}$. Resulta: h(x) = g[f(x)] = $\sqrt{x}$ - 3. En este caso la única restricción proviene de la función f: su dominio es el conjunto de los reales no negativos, y este es también el dominio de la función *h*.

Ejemplo 3: Sean $g(x) = \frac{1}{x}$ y $f(x) = \sqrt{x}$. Resulta: $h(x) = g[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{x}}$. En este caso el dominio de f es el conjunto de los reales no negativos, pero la forma funcional de g agrega otra restricción: la x no puede tomar el valor 0. Entonces, en el dominio de la función h intervienen las dos restricciones y resulta: D(h) = {x| x ∈ R, x > 0}

FUNCIONES DE UNA VARIABLE

1. Introducción

En esta parte del curso centramos nuestra atención en las funciones que tienen por dominio y codominio conjuntos numéricos, es decir, funciones que dependen de una sola variable (a la que simbolizamos con la letra x). En este caso la representación gráfica más apropiada es la que utiliza un par de ejes cartesianos ortogonales: al eje horizontal se le llama eje de las abscisas y al vertical eje de las ordenadas.



Incluso vamos a restringir el estudio a las funciones donde la correspondencia puede expresarse mediante una fórmula que involucra una ecuación o a lo sumo un número reducido de ecuaciones. Ejemplos:

$$f(x) = 3x^2 - x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & si\ x \geq 0 \\ -x+1 & si\ x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales o un subconjunto del mismo, ya que en algunos casos la fórmula que define la función solo es válida para una parte de los números reales. El problema de encontrar para qué números reales es válida la fórmula se conoce como *determinación del dominio de existencia de la función*.

Ejemplo 1: Sea $f \mid f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$. La fórmula que define la correspondencia es, en este caso, una fracción algebraica, la cual tiene sentido si el denominador no se anula. Y en este caso el denominador se anula si x = ± 1. Por tanto, el dominio de la función es: $D(f) = \{x \mid x \in R, x \neq \pm 1\}$.

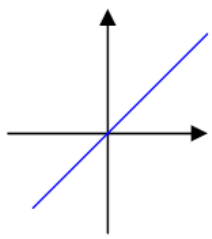
<u>Definición 1</u>. Una función se dice ***elemental*** si en la fórmula la variable x interviene una sola vez.

Ejemplos de funciones elementales: x, x^2, x^3, e^x, e^{-x}, $|x|$, entre otras.

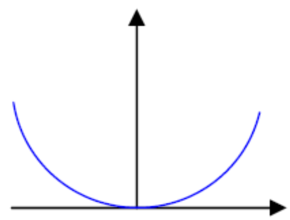
2. Gráficas de funciones elementales

Vamos a considerar a continuación el problema de hallar el gráfico de las funciones de una variable. Comenzamos con las funciones elementales y luego introduciremos las herramientas para el estudio de funciones cualesquiera.

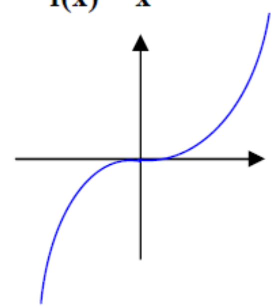
$f(x) = x$



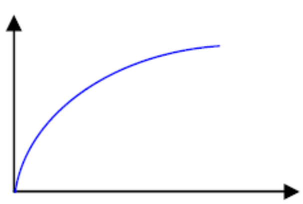
$f(x) = x^2$



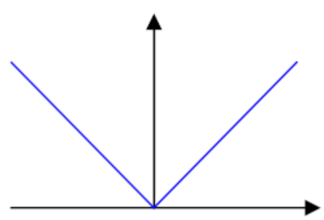
$f(x) = x^3$



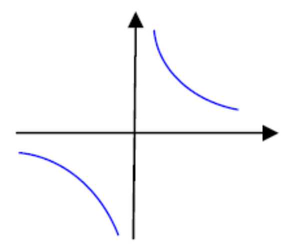
$f(x) = \sqrt{x}$



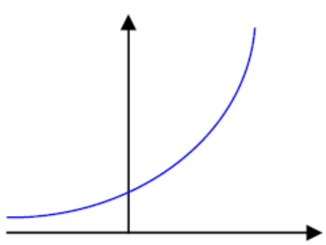
$f(x) = |x|$



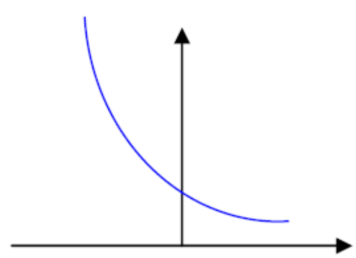
$f(x) = \frac{1}{x}$



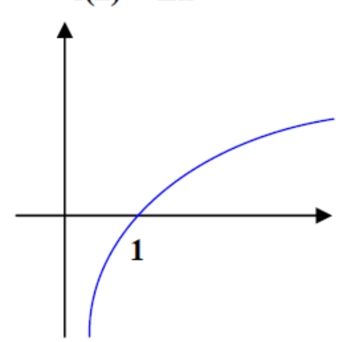
$f(x) = e^x$



$f(x) = e^{-x}$



$f(x) = Lx$



Observaciones

1. El gráfico de f (x) = x es una recta que pasa por el origen. Se trata de un caso particular de las funciones del tipo f (x) = a.x + b (donde a y b son dos números reales que no dependen de x) cuyo gráfico es una recta cuyo comportamiento depende de los parámetros a y b. Por la forma del gráfico, estas funciones se llaman lineales.

2. El gráfico de f (x) = x^2 es una parábola con los "brazos" hacia arriba. Se trata de un caso particular de las funciones cuadráticas de la forma f (x) = a.x^2 + b.x + c (donde a, b y c son números reales que no dependen de x, a ≠0), cuyo comportamiento depende de ciertas relaciones entre los coeficientes a, b y c, como veremos más adelante.

3. El dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de los reales mayores o iguales que 0.

4. La fórmula de la función $f(x) = |x|$ (valor absoluto de x) puede expresarse en dos ecuaciones:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \ x \geq 0 \\ -x & si \ x < 0 \end{cases}$$

5. El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es el conjunto de los números reales con exclusión del cero.

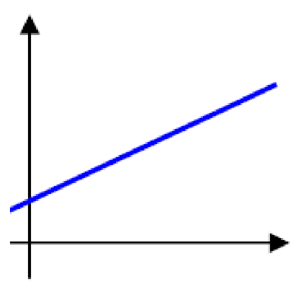
6. Las funciones $f \mid f(x) = e^x$ y $f \mid f(x) = e^{-x}$ se dibujan por encima del eje de las abscisas, es decir, estas funciones nunca toman valores negativos ni se anulan.

7. La función $f \mid f(x) = \ln(x)$ [también se usa la notación $f(x) = L(x)$] restringe su dominio a los reales positivos (el logaritmo de cero o de un número negativo no están definidos).

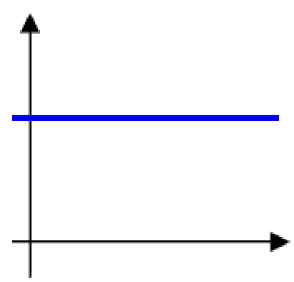
Las ***funciones lineales*** cumplen un importante papel en los modelos de análisis económicos simplificados. Se trata de funciones con gráficos muy sencillos, los cuales se comentan a continuación.

$$f \mid f(x) = a.x + b$$

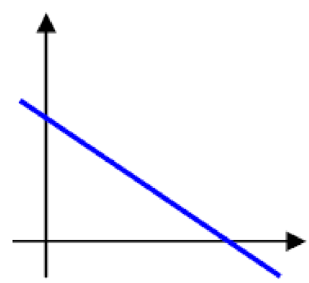
El coeficiente "b" se llama ***ordenada en el origen*** porque indica la ordenada del punto donde la recta corta al eje Oy. El coeficiente "a" se llama ***coeficiente angular*** de la recta y determina si a medida que aumenta el valor de x la recta es creciente, constante o decreciente, según que su valor sea positivo, cero o negativo respectivamente.



a > 0



a = 0

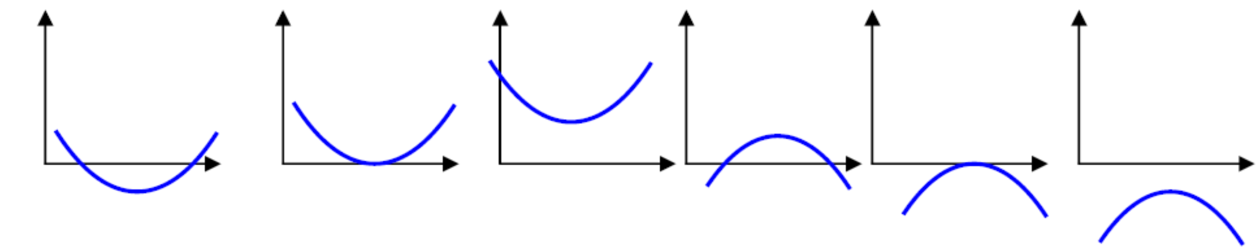


a < 0

Las ***funciones cuadráticas*** también tienen una fórmula y un gráfico sencillos.

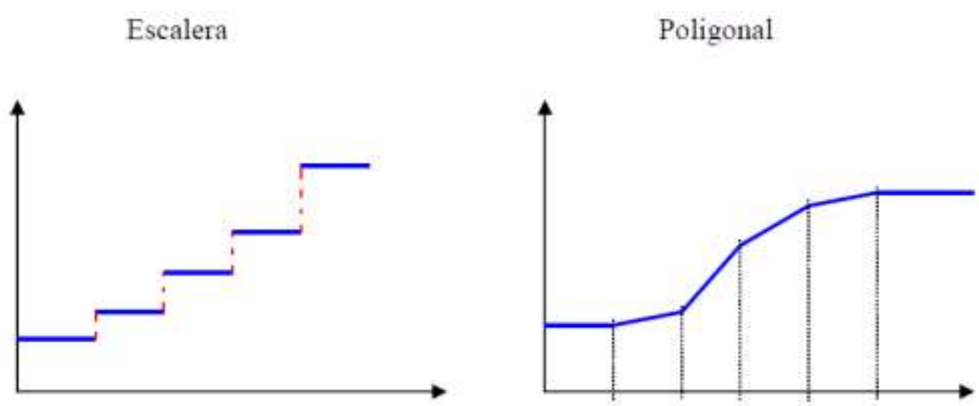
$$f \mid f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$$

La representación gráfica es una parábola, cuyos brazos miran hacia arriba si a > 0 y hacia abajo en caso contrario. El eje de simetría de la parábola corta al eje Ox en el punto x = -b/2a. La parábola corta al eje Ox si el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es no negativo (el discriminante es $\Delta = b^2 - 4.a.c$).



$a > 0, \Delta > 0$ $\quad$ $a > 0, \Delta = 0$ $\quad$ $a > 0, \Delta < 0$ $\quad$ $a < 0, \Delta > 0$ $\quad$ $a < 0, \Delta = 0$ $\quad$ $a < 0, \Delta < 0$

Se podría denominar ***cuasi-lineales*** a las funciones cuyo gráfico contiene segmentos de recta y/o semirrectas. Ya hemos visto un ejemplo: la función valor absoluto, cuyo gráfico se compone de dos semirrectas. Veamos ahora dos ejemplos más.



La primera función (cuyo gráfico recibe el nombre de “dientes de sierra”) tiene varias aplicaciones en Economía; algunas de estas se presentan a continuación:

i) Salarios: se puede representar en el eje horizontal el tiempo y en el eje vertical el nivel de los salarios; los salarios se mantienen constantes por un cierto tiempo (3 meses, 6 meses, 12 meses) y luego pegan un salto igual al aumento recibido por los trabajadores. Las líneas verticales que unen los escalones no son, estrictamente hablando, parte del gráfico de la función, pero se dibujan para mostrar la magnitud del aumento en cada período.

ii) Cargo por consumo de energía: se puede representar en el eje horizontal los kilowatts consumidos por hora (kWh) y en el eje vertical el cargo por consumo de energía que cobra UTE. El cargo por cada kWh consumido es de $ 6,196 para el consumo de 1 kWh hasta 100 kWh mensuales, de $ 7,766 para el consumo de 101 kWh a 600 kWh mensuales, y de $ 9,684 para el consumo de más de 600 kWh mensuales.[1]

[1] Los cargos por kWh consumidos señalados son los correspondientes a los servicios con modalidad de consumo residencial cuya potencia contratada sea menor o igual a 40 kW y corresponden a los vigentes al 1 de enero de 2022.

La segunda función suele utilizarse en Estadística para representar distribuciones acumuladas. En Economía, la poligonal puede utilizarse para representar el ingreso total acumulado por las personas o los hogares. Si por ejemplo un trabajador gana $40 la hora normal y $80 la hora extra, entonces el ingreso total acumulado por el trabajador en un día de trabajo, según el tiempo trabajado (t) es una poligonal que tiene la siguiente fórmula:

$$Y(t) = \begin{cases} 40t & si\ 0 \leq t \leq 8 \\ 320 + 80t & si\ t > 8 \end{cases}$$

Por último, los siguientes resultados de la geometría analítica son útiles para construir e interpretar el gráfico de las funciones.

Ecuación de la recta que pasa por el punto P = (x_0, y_0) y tiene pendiente m

$$y = y_0 + m\,(x - x_0)$$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos A = (x_1, y_1) y B = (x_2, y_2)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ecuación de la circunferencia de radio r y centro en el punto P = (x_0, y_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$