UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

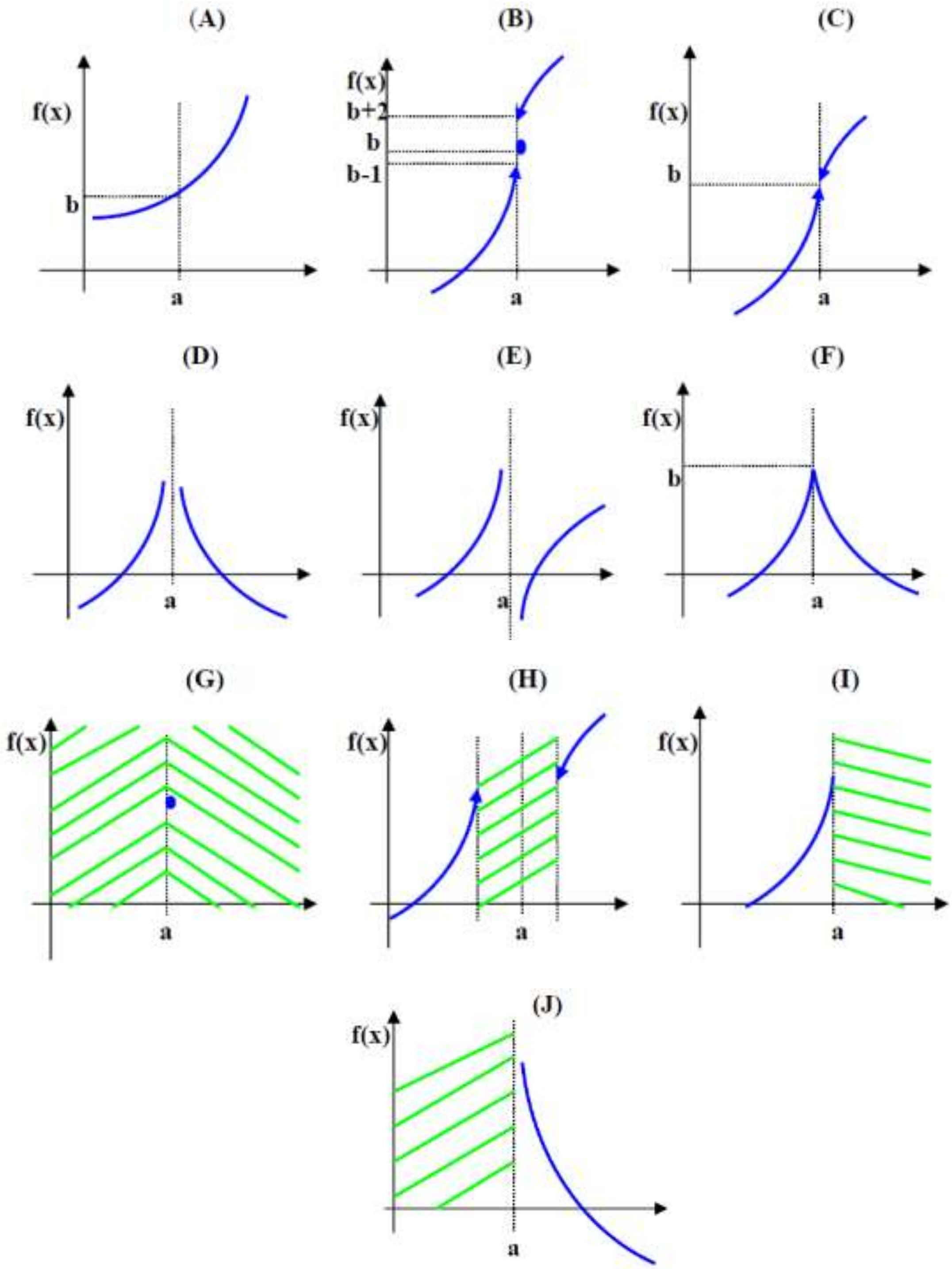
CURSO 2022

ANÁLISIS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. Límites de funciones

El concepto de límite de una función (*f*) en un punto (x = a) refiere al comportamiento del gráfico en las vecindades del punto, es decir, en un entorno reducido centrado en dicho punto. ¿Qué comportamiento podría tener el gráfico de f en un entorno de x = a?



¿En qué difieren los gráficos precedentes en relación a lo que ocurre en las vecindades de x = a?

En algunos de ellos el punto x = a no es parte del D(f): (C), (D), (E), (H), (J).

En algunos de ellos el D(*f*) excluye un entorno o un entorno reducido centrado en a: (G), (H).

En algunos de ellos el D(*f*) excluye los valores de x en un semi-entorno reducido (a izquierda o a derecha) centrado en x = a: (I), (J).

En algunos de ellos el gráfico de la función se puede dibujar sin levantar el lápiz al pasar por x = a: (A), (F).

En esta sección nos dedicaremos en particular a analizar el comportamiento de una función a medida que nos aproximamos más y más a cierto valor x = a. Si la función se acerca a un valor L a medida que la variable independiente se acerca al valor a, entonces ese valor L recibe el nombre de límite.

La notación a utilizar será:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

La ecuación anterior se lee "el límite de *f* (x) cuando x tiende a a es L".

Más formalmente, el concepto de límite puede definirse de la siguiente manera:

Definición 1. ***Límite finito de una función en un punto***

Que el límite de la función *f* en el punto x = a sea L ∈ ℝ implica, entonces, que *f* (x) está tan cercano a L como se quiera, cuando x se aproxima a a sin tocar a.

Ejemplo 1: Sea $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. ¿Qué pasa con la función en x = 1? El punto x = 1 no pertenece al dominio de la función (en ese valor, el denominador se anula). Sin embargo, se puede calcular el límite de la función cuando x se acerca a 1.

Obsérvese que si $x \neq 1$, es $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$. Es decir, que salvo en x = 1, la función se comporta como la recta y = x + 1. Por lo tanto: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$, porque en un entorno reducido de centro a = 1, los valores de x tienen imágenes muy cercanas a L = 2.

Observaciones

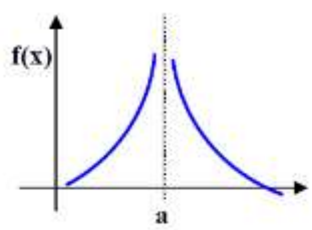
1. Según la definición de límite de $f(x)$ en el punto x = a, lo que hay que saber es qué ocurre con los valores de $f(x)$ cuando la variable x recorre los puntos de un entorno reducido de centro a. Es decir, no importa lo que ocurre en el punto x = a, sino lo que ocurre en los puntos vecinos al punto a.

2. Podría ocurrir que $f(a) = L$, que $f(a) \neq L$ o también que x = a no formara parte del D(*f*).

3. ¿Por qué en el caso del gráfico (B) no es $\lim_{x \to a} f(x) = b$? Porque no importa que tan cerca de a estén los valores de x –por la izquierda o por la derecha de a– los valores de f(x) siempre estarán a una distancia mayor que 1 del valor b.

<u>**Definición 2**</u>. ***Límite infinito de una función en un punto***.

El límite de una función *f* en el punto x = a es $+\infty$, cuando $f(x) > K$ (K arbitrario y tan grande como se quiera) cuando la variable x se acerca a <u>a</u> sin tocarlo.



Notación: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Ejemplo 2: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$

En la siguiente tabla se puede observar que a medida que nos acercamos a 0 (por valores menores o mayores que 0), la función toma valores cada vez mayores:

f(x)	**1**	**2**	**4**	**10**	**100**	**1.000**	**10.000**	**100.000**
x	1	0,5	0,25	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,0001
x	-1	-0,5	-0,25	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,0001

De manera análoga se define el límite $-\infty$ de una función en un punto. En este caso lo que ocurre con la función es que en las cercanías del punto a, $f(x)$ toma valores grandes (en valor absoluto) pero con signo negativo: $f(x) < -H$ (con H positivo y arbitrariamente grande) cuando los valores de x se acercan a <u>a</u>.

En el ejemplo anterior nos hemos acercado al valor 0 por los números menores que 0 y por los mayores que 0. Esa posibilidad de acercarse al valor x = a por la izquierda o por la derecha, motiva las siguientes dos definiciones.

<u>Definición 3</u>. ***Límite lateral por izquierda de una función en un punto.***

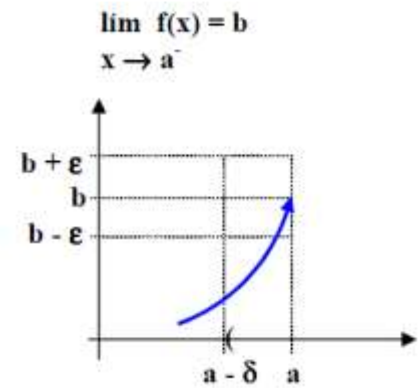
Notación: $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b$

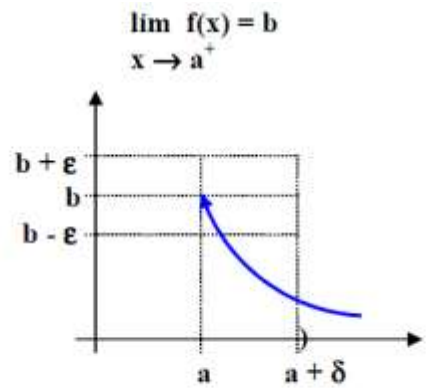
Para que el límite de f en “a por izquierda” sea b se tiene que cumplir que cuando x está cerca de a, pero con valores más pequeños que a, los valores de f (x) estén cerca de b.

<u>Definición 4</u>. ***Límite lateral por derecha de una función en un punto.***

Notación: $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$

Para que el límite de f en “a por derecha” sea b se tiene que cumplir que cuando x está cerca de a, pero con valores más grandes que a, los valores de f (x) estén cerca de b.

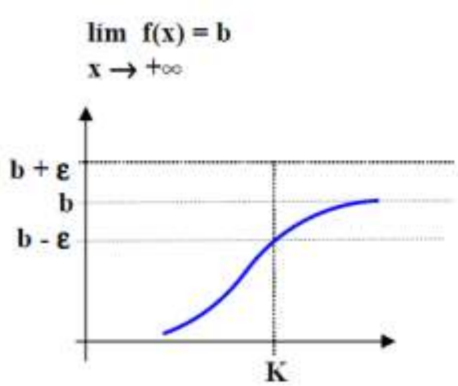


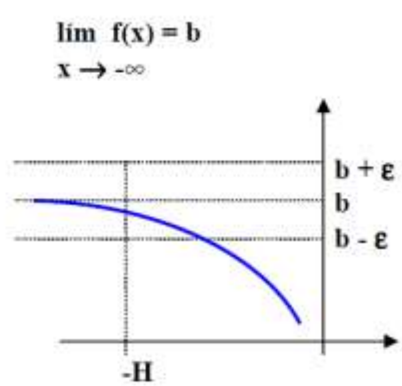


<u>Definición 5</u>. Se dice que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ existe y vale b si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$

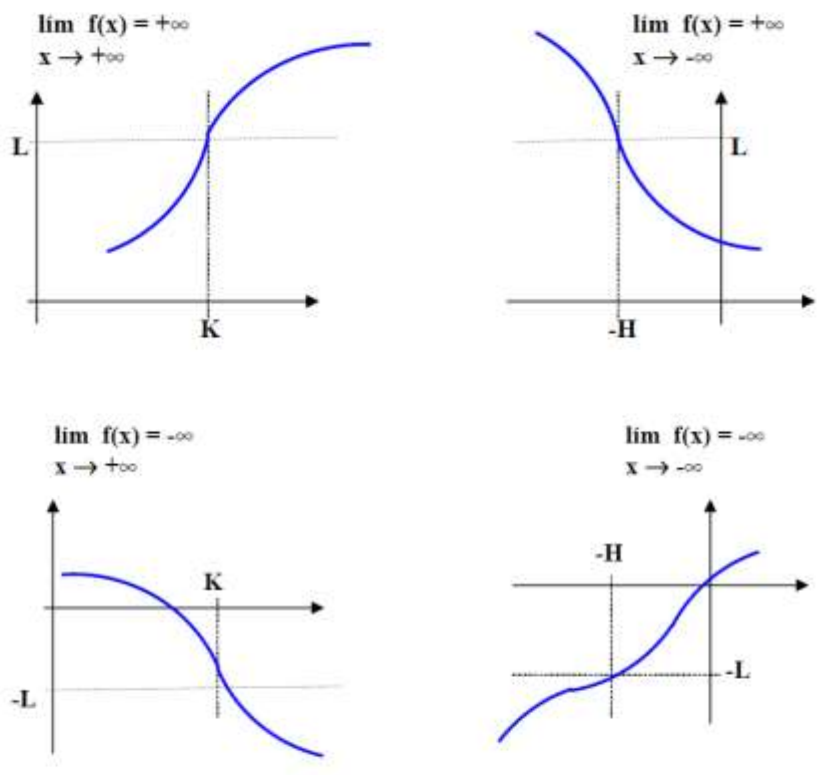
Ejemplo 3: $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ ⇒ Entonces: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe.

<u>Definición 6.</u> ***Límite finito de una función cuando x → +∞*** o ***x → -∞***





<u>Definición 7</u>. ***Límite menos infinito de una función cuando*** $x \to +\infty$ ***o*** $x \to -\infty$



<u>Propiedades de los límites de funciones</u>

1) Si $f(x) = c$, donde c es un número real:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

2) Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo:

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

En las siguientes propiedades, α puede ser un número finito (a) o infinito (+∞ o -∞). f y g son dos funciones, tales que: $\lim_{x \to \alpha} f(x) = b_1$ y $\lim_{x \to \alpha} g(x) = b_2$, donde b_1 y b_2 son números finitos.

3) Si c es un número real:

$$\lim_{x \to \alpha} c.f(x) = c.\lim_{x \to \alpha} f(x) = c.b_1$$

4) $\lim_{x \to \alpha}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) + \lim_{x \to \alpha} g(x) = b_1 + b_2$

5) $\lim_{x\to\alpha}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to\alpha} f(x) - \lim_{x\to\alpha} g(x) = b_1 - b_2$

6) $\lim_{x\to\alpha}[f(x) * g(x)] = \lim_{x\to\alpha} f(x) * \lim_{x\to\alpha} g(x) = b_1 * b_2$

7) $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)} = \frac{b_1}{b_2}$ (si $b_2 \neq 0$)

Las últimas cuatro propiedades resuelven el problema de calcular el límite de una suma, resta, multiplicación o cociente, cuando ambos limites son finitos. Pero, ¿qué ocurre cuando el límite de un sumando, por ejemplo, es infinito? Si uno de los sumandos tiene límite finito y el otro límite infinito, entonces el límite de la suma es infinito. Si los dos sumandos tienen límite infinito y del mismo signo, entonces la suma también tiende a infinito, y con el mismo signo. Pero si los sumandos tienen límite infinito y de diferente signo, el límite de la suma no puede obtenerse como un resultado general, y hay que estudiar caso por caso.

$\lim_{x\to a} f(x)$	b	0	$b \neq 0$	$b \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$c \neq 0$	0	0^+	0^-	0^+	0^-	$c \neq 0$	$c \neq 0$
$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$	b + c	0	b	b	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$	b - c	0	b	b	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)]$	b * c	0	0	0	¿?	¿?	(sgn c). ∞	-(sgn c). ∞
$\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]$	b/c	¿?	(sgn b).∞	-(sgn b).∞	$+\infty$	$-\infty$	(sgn c). ∞	-(sgn c). ∞

Los casos señalados con el símbolo "¿?" son de ***indeterminación*** o de no existencia del límite y requieren, por tanto, el estudio caso a caso.

$\lim_{x\to a} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)]$	$+\infty$	¿?	¿?	$-\infty$
$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$	¿?	$+\infty$	$-\infty$	¿?
$\lim_{x\to a}[f(x) * g(x)]$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]$	¿?	¿?	¿?	¿?

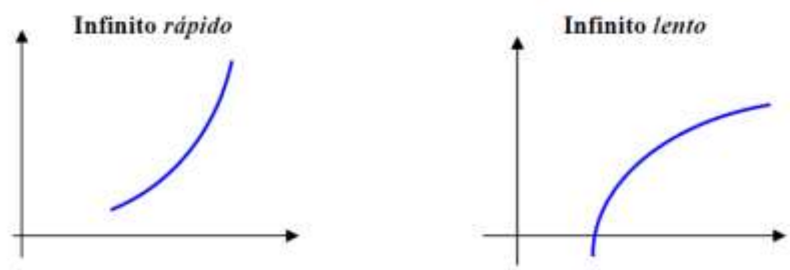
<u>Definición 8.</u> *Infinitos.*

Se dice que una función f es un ***infinito*** cuando x → α si se cumple que:

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$$

A nosotros nos interesará en particular considerar el caso en que α es +∞.

Entre los "infinitos" los hay más lentos y los que se "disparan" más rápido a valores altos.



<u>Definición 9</u>. Órdenes de infinitos.

A) Se dice que un *infinito* f es de ***mayor orden*** que otro g, si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

B) Se dice que un *infinito* f es de ***menor orden*** que otro g, si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Un resultado importante es el siguiente:

Orden (infinito logarítimo) < Orden (infinito potencial) < Orden (infinito exponencial)

Entre dos infinitos potenciales –por ejemplo, x^2 y x^5– el de mayor orden es el que tiene exponente más alto.

<u>Definición 10</u>. *Equivalentes.*

Se dice que dos *infinitos* f y g son ***equivalentes***, si $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Notas:
1) Si el límite del cociente no es el número uno, sino otro número distinto de cero, entonces los dos infinitos no son equivalentes, pero son de igual orden.

2) Se puede demostrar que la suma de infinitos de distinto orden es equivalente al término de mayor orden.

3) Se puede demostrar también que los polinomios son equivalentes al término de mayor grado.

Aplicando las definiciones 9 y 10 se pueden resolver muchos problemas de límites.

Ejemplo 4:

1) $(x^2 + e^x) \sim e^x \quad con \quad x \to +\infty$. Este resultado expresa que el primer infinito es equivalente al segundo. ¿Por qué? Porque la suma de infinitos de distinto orden –en este caso, uno potencial y uno exponencial- es equivalente al de mayor orden.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^{0,01}} = 0$. En este caso tenemos el cociente de dos infinitos, uno logarítmico y otro potencial. Como el del numerador es de menor orden que el del denominador, el cociente tiende a 0.

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + ln(x)}{2x - ln(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} x.e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

Algunos "límite tipo"

Para resolver problemas mediante la aplicación de la última propiedad, se conocen los siguientes resultados "tipo".

$a)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$b)$ $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x} = e$

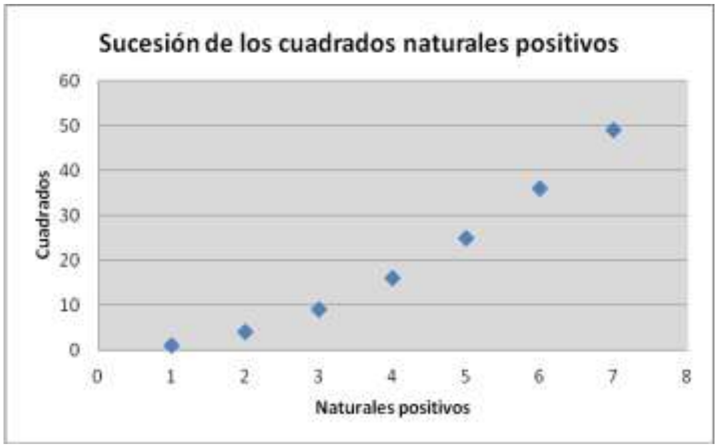
$c)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$

$d)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$e)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ (x)}{x} = 1$

2. Límite de sucesiones

Las sucesiones (también denominadas progresiones) son un caso particular de funciones. Lo que tienen de particular es que su dominio no es el conjunto de los números reales, sino el conjunto de los números naturales positivos. Por ejemplo, la sucesión $f(n) = n^2$ asocia a cada número natural positivo su cuadrado.



La notación más habitual es de la forma: $(a_n) \mid a_n = f(n)$. Por ejemplo: $(a_n) \mid a_n = n^2$ o bien $(b_n) \mid b_n = 1/n$. En el primer caso la sucesión (la función) hace corresponder a cada natural positivo n su cuadrado, y en el segundo caso a cada natural positivo la sucesión le hace corresponder su inverso. En estos casos no tiene sentido estudiar el límite en un punto del dominio, porque en un entorno reducido del punto la función no está definida. El único límite que puede definirse es el caso en que $n \to +\infty$. Las propiedades de los límites relativas al orden y equivalencia de funciones en general, son aplicables al caso del límite de sucesiones.

Ejemplo 7: $\lim \frac{2n^2-5n+8}{n^2+3n-2} = \lim \frac{2n^2}{n^2} = 2$, donde no es necesario anotar que $n \to +\infty$, pues está sobreentendido.

Algunas sucesiones de uso frecuente son las ***sucesiones aritméticas*** y las ***sucesiones geométricas***.

Definición 12. ***Sucesiones aritméticas***.

Son sucesiones donde cada elemento se obtiene del precedente adicionándole una constante llamada "razón". La sucesión es de la forma:

$$a_1, (a_1 + k), (a_1 + 2k), (a_1 + 3k), \ldots$$

La correspondencia con los naturales puede hacerse a partir del uno (como en el caso precedente) o también a partir del cero. En este caso la correspondencia es así:

$$0 \to a_0$$
$$1 \to a_1 = a_0 + k$$
$$2 \to a_2 = a_1 + k = a_0 + 2k$$
$$\ldots$$

Obsérvese que la diferencia entre dos elementos consecutivos de la sucesión es siempre la *razón* "k". También se cumple que $a_n = a_{n-1} + k \ \forall\, n > 1$, donde "$a_n$" se denomina *término general de la sucesión*.

Ejemplos de progresiones aritméticas son: el conjunto de los naturales (razón= 1), el conjunto de los números naturales pares (razón = 2) y el conjunto de los naturales impares (razón = 2).

¿Se puede expresar el término general de una progresión aritmética en función de k y n?

$$a_2 = a_1 + k$$
$$a_3 = a_2 + k$$
$$a_4 = a_3 + k$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$a_{n-1} = a_{n-2} + k$$
$$a_n = a_{n-1} + k$$

Si se suman estas igualdades y se eliminan los mismos términos en ambos miembros, resulta:

$$a_n = a_1 +(n-1).\ K$$

Ejemplo 8: Una aplicación de sucesiones aritméticas a la Economía _ El cálculo del monto con interés simple

Con anterioridad en el curso hemos trabajado en el cálculo del monto generado a partir de un capital inicial depositado a interés simple luego de haber transcurrido cierta cantidad de tiempo. Para calcular dicho monto se aplicaba la siguiente fórmula:

$$M_n = C(1 + n.i)$$

donde: M _ Monto total de dinero disponible (capital más intereses).
n _ cantidad de períodos de tiempo transcurridos.
C _ Capital inicialmente depositado.
i _ tasa de interés (expresada en las mismas unidades de tiempo que n).

Operando con la fórmula anterior, puede probarse que se trata de una sucesión aritmética:

$$M_n = C.(1 + n.i) = C.(1 + i + (n-1).i) = \underbrace{C.(1+i)}_{a_1} + (n-1).\underbrace{C.i}_{K}$$

<u>**Definición 13.**</u> ***Sucesiones geométricas***.

Son sucesiones donde cada elemento se obtiene del precedente multiplicándolo por una constante, también llamada ***razón*** de la progresión. Las progresiones geométricas tienen la forma:

$$a_1,\ a_1.q,\ a_1.q^2,\ a_1.q^3, \ldots.$$

Por lo tanto, el término general de la sucesión es:

$$a_n = a_1.q^n$$

Aquí el cociente de dos términos consecutivos es siempre la razón "q" y el término general es:

$$a_n = a_{n-1}.q \ \ \forall\, n > 1.$$

El ejemplo más conocido de sucesión geométrica es el conjunto de las potencias de 2: 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, … La fama de esta progresión resulta de la anécdota que cuenta que el Sha de Persia quiso premiar al inventor del ajedrez con el regalo que este quisiera elegir. El inventor pidió un grano de trigo (2^0) por el primer escaque[1] del tablero de ajedrez, dos granos (2^1) por el segundo escaque, cuatro granos (2^2) por el tercero y así hasta completar el escaque 64 por el que pidió 2^{63} granos de trigo. El Sha mandó al jefe de los graneros reales que pagara inmediatamente el premio, pero este le hizo saber que sería necesario más de una cosecha anual para cumplir con el pedido, porque la suma de $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$ granos de trigo –que es igual a $(2^{64}–1)$– tiene un volumen superior al de 5 galpones de 20x10x3 metros cúbicos.

<u>Ejemplo 9</u>: Sucesiones geométricas en Economía_ Cálculo del monto con interés compuesto

En el curso también calculamos el monto generado por una colocación de dinero, pero calculando los intereses de manera compuesta. En ese caso la fórmula que utilizamos fue la siguiente:

$$M_n = C(1+i)^n$$

Si definimos: $a_1 = C$ y $q = 1+i$, entonces queda probado que los montos no forman otra cosa que una sucesión geométrica de razón 1+i.

Las sucesiones fueron utilizadas por el economista inglés Thomas Malthus (1766-1834) en su famosa ley por la cual la población crece según una sucesión geométrica (de razón mayor que uno) mientras que los alimentos crecen según una sucesión aritmética. Malthus plantea que la única forma de evitar las hambrunas sería mediante el control de la natalidad.

3. Continuidad

Recordamos que entre los ejemplos iniciales de esta sección nos interesó identificar aquellos casos en que el gráfico de la función se podía dibujar sin levantar el lápiz al pasar por x = a. Ahora vamos a centrar nuestro interés en este concepto.

<u>Definición 14</u>. *Función continua en un punto.*

Se dice que f es una función continua en el punto x = a, donde a es un punto interior al dominio de la función, si se cumple que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Cuando una función no es continua en un punto, se dice que es discontinua en dicho punto.

¿En cuáles de los ejemplos del inicio de esta sección (p. 1) la función f es continua en x = a ?

[1] Un escaque es cada una de las casillas cuadradas e iguales en que se divide el tablero de ajedrez.

Definición 15. Se dice que f es una función continua en a^- (a por izquierda) si se cumple que:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

En tal caso se dice que la función f es continua lateralmente por izquierda.

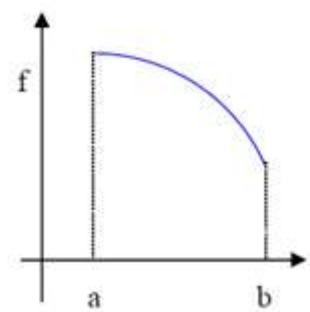
Definición 16. Se dice que f es una función continua en a^+ (a por derecha) si se cumple que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

En tal caso se dice que la función f es continua lateralmente por derecha.

Definición 17. Se dice que f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] si es continua en cada punto del intervalo abierto (a, b), es continua en x = a por derecha y es continua en x = b por izquierda.

Entonces, una función es continua en un intervalo cerrado si el gráfico de la función en dicho intervalo se dibuja sin levantar el lápiz.



¿Qué ocurre con la propiedad de continuidad en un intervalo abierto o cerrado cuando se opera con funciones? La propiedad de continuidad se extiende sin dificultad a la suma, resta y multiplicación de funciones. En el caso de la división, radicación y logaritmación se presentan algunas dificultades. En el siguiente cuadro se presentan los resultados más importantes. Donde aparece la expresión "intervalo cerrado" puede sustituirse por "intervalo abierto" y la propiedad enunciada sigue siendo válida.

Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo [a, b]. Entonces:
a) La suma (f + g) es una función continua en el intervalo [a, b].
b) La resta (f - g) es una función continua en el intervalo [a, b].
c) La multiplicación (f * g) es una función continua en el intervalo [a, b].
d) El cociente (f / g) es una función continua en el intervalo [a, b] si g(x)≠0 en [a, b].
e) Las funciones e^f y e^g son funciones continuas en el intervalo [a, b].
f) La función $\sqrt{f}$ es una función continua en el intervalo [a, b] si f(x) ≥ 0 en [a, b].
g) La función L(f) es una función continua en el intervalo [a, b] si f(x) > 0 en [a, b].

Nota 1: Como puede observarse a partir de sus gráficos, las funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas son continuas en sus respectivos dominios.

Nota 2: La composición de funciones continuas, es continua.

Definición 19. El ***Máximo*** (o ***Máximo absoluto***) de una función en un intervalo [a, b] es el mayor valor que toma la función para todos los valores del intervalo. Se llama *punto de máximo* al valor de x donde f presenta el máximo absoluto.

Definición 20. El ***mínimo*** (o ***mínimo absoluto***) de una función en un intervalo [a, b] es el menor valor que toma la función para todos los valores del intervalo. Se llama *punto de mínimo* al valor de x donde f presenta el mínimo absoluto.

Dada una función en un intervalo cerrado, ¿siempre existen el mínimo y el máximo? La respuesta es negativa. Sin embargo, si la función es continua en dicho intervalo, la respuesta es afirmativa, y este importante resultado es el que se enuncia a continuación.

Teorema de Weierstrass. Toda función continua en un intervalo cerrado tiene mínimo y máximo absolutos.