UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

CURSO 2022

CÁLCULO DE DERIVADAS

CÁLCULO DE DERIVADAS (CÁLCULO DIFERENCIAL)

En esta sección trabajaremos con funciones que tienen como dominio el conjunto de los números reales (o un subconjunto del mismo) y codominio también real. Es decir, nos ocuparemos de funciones f definidas de esta manera:

$$f : A \subseteq R \to R$$

En particular, nos interesará estudiar estas funciones con el fin de representarlas gráficamente y de resolver problemas de optimización (cálculo de mínimos y máximos). Para ello resulta imprescindible introducir un concepto nuevo: el de ***derivada*** de una función.

Este concepto se tratará apelando en primer lugar a una interpretación dinámica del mismo, para luego presentar también una interpretación geométrica.

1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Consideremos una cierta función $f : A \subseteq R \to R$, que vincula a dos variables (x e y) de forma tal que y = f (x), es decir la variable y (dependiente) es función de la variable x (independiente). Podemos pensar, por ejemplo en y: Porcentaje de personas pobres en Uruguay, x: Gasto público social en Uruguay. Intuitivamente, el porcentaje de personas pobres dependería de cuánto invirtiese el gobierno nacional en políticas sociales.

Supongamos que inicialmente la variable “x” toma el valor a. Nuestro interés se centra en estudiar qué sucede con la variable “y”, cuando la variable “x” incrementa su valor en una cierta cantidad h (podría tratarse también de una reducción en x y el resultado sería el mismo). Volviendo al ejemplo anterior, nos interesa analizar cómo una variación en el gasto público social afecta al porcentaje de personas pobres, como forma de comprobar la eficacia de las políticas sociales gubernamentales.

Los cambios en “x” y en “y” se resumen en la siguiente tabla:

x	**y = *f* (x)**
a	f (a)
a + h	f (a+h)

Así, inicialmente x = a y la variable “y” toma el valor f (a). Cuando la variable “x” se incrementa en h y pasa a valer a+h, la variable “y” pasa a tomar el valor f (a+h).

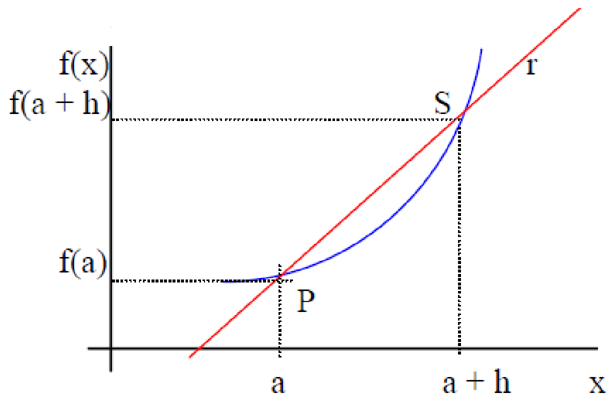
Para caracterizar cómo varía “y” ante el señalado cambio en “x”, se define la **Tasa Promedio de Cambio (TPC)**.

Definición 1. Tasa Promedio de Cambio (TPC).

$$\underset{x=a,x=a+h}{TPC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

La Tasa Promedio de Cambio se define, entonces, como el cociente entre la variación experimentada por "y" [$\Delta y = f(a+h) - f(a)$] y la variación de "x" ($\Delta x = h$). La TPC indica la variación promedio en "y" por cada unidad que se incrementa "x".

Gráficamente, lo anterior puede representarse de esta manera:



El punto inicial es P, en el que "x" vale a y la variable "y" toma el valor *f* (a). Luego del incremento en "x", se pasa al punto S, con "x" valiendo a+h y la variable "y" alcanzando el valor *f* (a+h). Este salto puede representarse también mediante la recta (r) que pasa por los dos puntos, P y S, y que se denomina ***recta secante***.

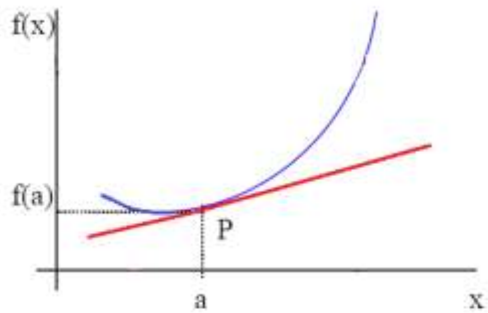
¿Cuánto vale la pendiente de la recta (r)? Considerando dos puntos cualesquiera de la recta, su pendiente (o coeficiente angular) puede calcularse como: $\Delta y/\Delta x$. Si consideramos los puntos P y S, la pendiente de la recta (r) resulta ser precisamente la Tasa Promedio de Cambio. Así que, desde el punto de vista geométrico, la TPC no es otra cosa que la pendiente de la recta secante al gráfico de la función *f* en los puntos P y S.

Supongamos ahora que nos sigue interesando analizar cómo se comporta la variable "y" al incrementar el valor de "x", pero ahora considerando incrementos muy pequeños en "x". En otras palabras, vamos a estudiar qué sucede cuando hacemos tender h a 0. El resultado del límite de la TPC cuando h tiende a 0, si es que existe y da finito, se denomina **Tasa Instantánea de Cambio (TIC)** o **derivada** de la función en x = a y se denota con el símbolo $f'(a)$.

$$\underset{x=a}{TIC} = f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Es decir que la derivada de una función en un punto nos dice cuánto varía la variable "y" por cada unidad que se incrementa "x", para cambios pequeños en "x". Esta es ***la interpretación dinámica*** de la derivada.

Desde el punto de vista gráfico, si hacemos tender h a 0, el punto S del gráfico anterior se irá aproximando al punto P y la recta (r) se irá acercando a la posición de la recta (t) en el siguiente gráfico. A esta recta se le denomina ***recta tangente*** al gráfico de la función f en el punto P.



Siguiendo el mismo razonamiento que hicimos antes para la recta secante, la pendiente de la recta tangente es $f\,'(a)$. Esta es la ***interpretación geométrica*** de la derivada.

<u>Definición 2. Derivada de una función en un punto.</u>

Se llama ***derivada*** de la función f en x = a, y se denota $f\,'(a)$, al resultado del siguiente límite, siempre y cuando exista y sea finito:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observaciones

1. No siempre existe la derivada de la función en un punto. Ello depende de la existencia del límite que define $f\,'(a)$.

2. La expresión $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ es un cociente (denominado *cociente incremental*), cuyo denominador es un infinitésimo[1] cuando h → 0. Entonces, para que el límite de dicha expresión sea un número finito, el numerador debe ser también un infinitésimo del mismo orden que h o de orden superior. Por lo tanto, cuando h → 0, debe ser lim [f(a+h) – f(a)] = 0, que es equivalente a afirmar que lim f(x) = f(a) cuando x → a, que es de la definición de función continua en x = a.

En otras palabras, para que exista la derivada de la función en un punto, es condición necesaria que la función sea continua en dicho punto (por lo tanto, si existe $f\,'(a)$, la función f es continua en x = a).

[1] Una función f es un infinitésimo para x→a si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Ejemplo 1. Considérese la función $f : f(x) = x^2$. Se quiere calcular, si existe, $f\,'(2)$.

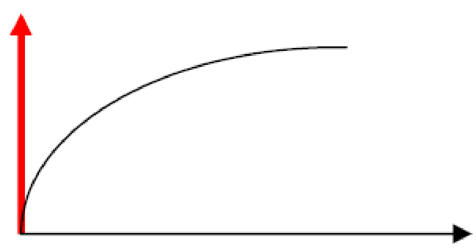
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-(2)^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4+h = 4$$

Entonces $f'(2) = 4$

Ejemplo 2. Sea la función $f : f(x) = \sqrt{x}$. Es fácil observar que no existe el límite de esta función en el punto x = 0, porque la función no está definida en un entorno de 0 (no está definida a la izquierda de 0). Por tanto, no puede calcularse $\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$. Pero sí puede calcularse dicho límite cuando h → 0^+. Resulta:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}-\overbrace{\sqrt{0}}^{=0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\underbrace{\sqrt{h}}_{\to 0^+}} = +\infty$$

¿Cómo se interpreta gráficamente este resultado? Cuando el límite lateral es infinito, y la función está definida en el punto x = a, significa que en el punto la curva presenta una tangente perpendicular al eje de las abscisas. En este caso particular, la tangente es el eje Oy.



Si existen y son finitos los límites laterales: $\lim_{x\to a^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y $\lim_{x\to a^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, se dice que f tiene en x = a ***derivadas laterales***.

Definición 3. Función derivada.

Se llama ***derivada*** de la función *f* (notación: f' o bien $\frac{dy}{dx}$) a una función que a cada punto del dominio de f le hace corresponder el valor de la derivada en dicho punto.

$$f': \quad x \rightarrow f'(x)$$

Ejemplo 3. Considérese la función $f : f(x) = x^2$. Se quiere calcular $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Con el mismo argumento se puede demostrar que si $f : f(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 3x^2$ y, más en general, que si $f : f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n\, x^{n-1}$.

De la misma manera que se hizo en el ejemplo anterior, se puede obtener las derivadas de cualquier función. En la siguiente tabla se resumen los casos más usuales:

Tabla de derivadas

Función _ f(x)	**Derivada _ f´(x)**
K	0
K x	K
x^n	$n.x^{n-1}$
1/x	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2.\sqrt{x}}$
e^x	e^x
ln(x)	1/x
f(x) ± g(x)	f´(x) ± g´(x)
K.f(x)	K.f´(x)
f(x) . g(x)	f´(x) . g(x) + f(x) . g´(x)
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$
f[g(x)]	f´[g(x)] . g´(x)
$[f(x)]^n$	$n.[f(x)]^{n-1} . f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} . f'(x)$
ln[f(x)]	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

Ejemplo 4. Hallar la derivada de la función polinómica $P \mid P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 1/2\,x^2 + 5x + 8$

$$P'(x) = 4(3x^3) + 3(2x^2) - 2(1/2\,x) + 5 = 12x^3 + 6x^2 - x + 5$$

Ejemplo 5. Hallar la derivada de la función $f \mid f(x) = 4x^2 e^{5x+2}$

$$f'(x) = \underbrace{\left(4x^2\right)'}_{8x}.e^{5x+2} + 4x^2.\underbrace{\left(e^{5x+2}\right)'}_{e^{5x+2}.\underbrace{(5x+2)'}_{5}} = 8xe^{5x+2} + 4x^2 e^{5x+2}.5 = 8xe^{5x+2} + 20x^2 e^{5x+2} = e^{5x+2}\left(8x + 20x^2\right)$$

Ejemplo 6. Hallar la derivada de la función $f \mid f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{[\ln(x)]'\,x^3 - \ln(x).\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{\frac{1}{x}.x^3 - \ln(x).3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2\ln(x)}{x^6} = \frac{1 - 3\ln(x)}{x^4}$$

<u>Definición 4. Derivada segunda de una función.</u>

Se define la derivada segunda de una función *f* como la derivada de la función derivada, es decir, la derivada de *f* ´(x). La notación que utilizaremos es *f* ´´(x) = [*f* ´(x)]´

Ejemplo 7. Consideremos la función polinómica del ejemplo 4:

$$P \mid P(x) = 3x^4 + 2x^3 - 1/2\,x^2 + 5x + 8$$

Entonces la derivada segunda de P(x) será:

$$P''(x) = [P'(x)]' = \left(12x^3 + 6x^2 - x + 5\right)' = 36x^2 + 12x - 1$$

Más adelante veremos qué información nos da la derivada segunda sobre la función *f*.

2. APLICACIÓN DE LA DERIVADA PARA LA APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

Como puede observarse en el gráfico de la página 4, los valores que toma la recta tangente y la función *f* en las proximidades del punto a son muy similares, por lo cual la recta tangente puede utilizarse para aproximar el valor de la función para valores de x cercanos a a.

Por ello es interesante contar con la ecuación de la recta tangente. Sabemos que la pendiente de la recta tangente es *f*´(a) y que la recta pasa por el punto (a, *f* (a)).

Ecuación de la recta tangente al gráfico de la función *f* en el punto (a, f(a)):

$$y = f(a) + f'(a) * (x - a)$$

Ejemplo 7: Sea la función *f* | *f* (x) = x^2. Vamos a hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función *f* en el punto de abscisa 2.

$$y = f(2) + f'(2) * (x - 2)$$

f (2) = 2^2 = 4 *f*´(2) = 4 (como fue calculado en el ejemplo 1 de la página 4)

Entonces la ecuación queda: $y = 4 + 4 * (x - 2) = 4x - 4$

Supongamos que queremos tener una aproximación del valor que toma la función cuando x = 2,1 [*f* (2,1)]. Para ello podemos usar la recta tangente:

$$f(2{,}1) \cong 4 * 2{,}1 - 4 = 4{,}4$$

Así, un valor aproximado de *f* (2,1) es 4,4.

Si comparamos este valor con el valor exacto de *f* (2,1) [*f* (2,1) = $(2{,}1)^2$ = 4,41], concluimos que la aplicación de la tangente nos brinda un valor muy próximo al verdadero valor de la función cuando x = 2,1 (la diferencia es solamente 0,01).

3. APLICACIÓN DE LA DERIVADA PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Definición 5. Monotonía.

Si para todo x_1 y x_2, con $x_1 < x_2$, pertenecientes al intervalo [a, b] se cumple que:

- $f(x_1) \leq f(x_2)$, entonces f es monótona creciente en [a, b]
- $f(x_1) < f(x_2)$, entonces f es estrictamente monótona creciente en [a, b]
- $f(x_1) \geq f(x_2)$, entonces f es monótona decreciente en [a, b]
- $f(x_1) > f(x_2)$, entonces f es estrictamente monótona decreciente en [a, b]

Definición 6. Extremos relativos (o locales).

La función f presenta un ***máximo relativo*** en x = a si existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo x perteneciente al intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se cumple que: $f(x) \leq f(a)$. En otras palabras, para todo x cercano al punto a (tan cercano como uno desee), se cumple que $f(x) \leq f(a)$.

La función f presenta un ***mínimo relativo*** en x = a si existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo x perteneciente al intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ se cumple que: $f(x) \geq f(a)$. Es decir, para todo x cercano al punto a (tan cercano como uno desee), se cumple que $f(x) \geq f(a)$.

Aplicación de las derivadas

¿Qué información nos da la derivada primera? Supongamos que en el intervalo donde interesa estudiar la función ([a,b]), existe la derivada. Entonces, se tienen los siguientes resultados en relación a f':

- f es estrictamente creciente en [a,b], si $f'(x)$ es positiva en dicho intervalo.

- f es estrictamente decreciente en [a,b], si $f'(x)$ es negativa en dicho intervalo.

- f presenta un mínimo relativo en x = c, si se cumple que: $f'(c) = 0$, el signo de f' es negativo a la izquierda de c y positivo a la derecha de c.[2]

- f presenta un máximo relativo en x = c, si se cumple que: $f'(c) = 0$, el signo de f' es positivo a la izquierda de c y negativo a la derecha de c.[3]

En los dos últimos casos, la tangente a la curva es horizontal (pues su coeficiente angular es nulo).

[2] También puede haber un mínimo relativo en el caso en que $f'(c)$ no exista, aunque $f(c)$ sí, y el signo de f' sea negativo a la izquierda de c y positivo a la derecha de c.

[3] La misma aclaración efectuada en la nota al pie anterior, se aplica en este caso.

¿Qué información nos da la derivada segunda? Si la derivada primera nos indicaba en qué tramos la función f es creciente y en qué tramos es decreciente, la derivada segunda hará lo mismo, pero con relación a f': nos dirá en qué intervalos f' es creciente y en qué intervalos f' es decreciente. Nos da información entonces sobre cómo es el crecimiento de f'. O en otras palabras, nos indica si f está creciendo (o decreciendo) a una tasa creciente o decreciente; es decir, nos indica cuál es la concavidad de f.

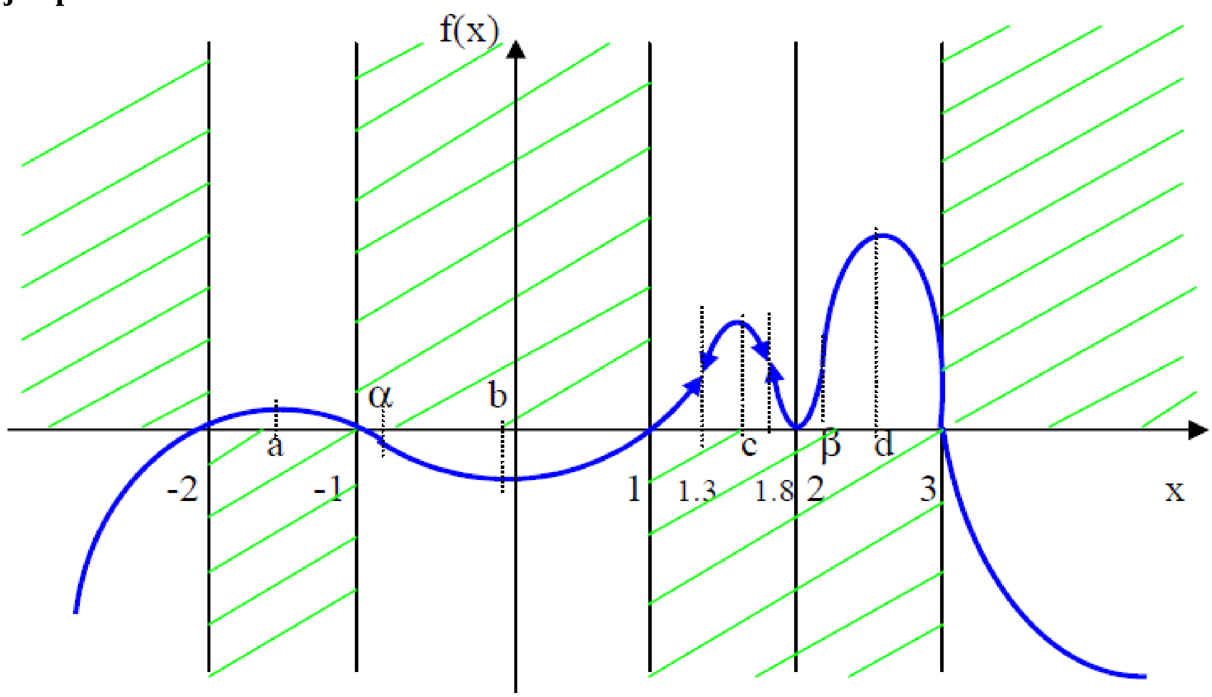
Así, se tiene que:

- f presenta concavidad positiva (o convexidad) en un intervalo, si f'' es positiva en dicho intervalo.

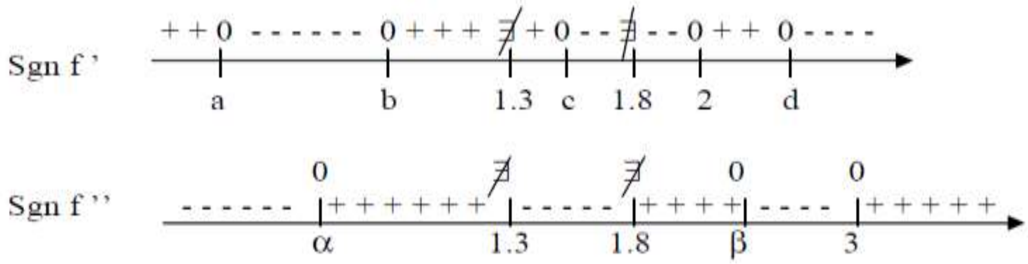
- f presenta concavidad negativa en un intervalo si f'' es negativa en dicho intervalo.

En términos gráficos, que una función presente concavidad positiva en un punto significa que la tangente a la curva en dicho punto se dibuja por debajo del gráfico de la función. Por el contrario, que una función presente concavidad negativa en un punto significa que la tangente a la curva en dicho punto se dibuja por encima del gráfico de la función.

Ejemplo 8.



La función del gráfico presenta tres ***máximos relativos***, en los puntos x = a, x = c y x = d, y un ***mínimo relativo*** en x = b. La función es ***creciente*** en los intervalos: (-∞, a), (b; 1,3), (1,3; c) y (2,d). La función es ***decreciente*** en los intervalos: (a, b), (c; 1,8), (1.8, 2) y (d, +∞). La función tiene concavidad negativa en los intervalos (-∞, α), (1,3; 1,8) y (β, 3) y presenta concavidad positiva o convexidad en los intervalos (α; 1,3), (1,8; β) y (3, +∞). Por tanto, a dicho gráfico le corresponden los siguientes esquemas de signo de f' y f'':



En los puntos x = α, x = β y x = 3, el gráfico presenta ***puntos de inflexión***, esto es, puntos en los que la curva cambia de concavidad. Obsérvese que en dichos puntos se anula y se produce un cambio de signo de la derivada segunda de la función.

Nótese también que la función no está definida ni en x = 1,3 ni en x = 1,8, por lo cual no existen tampoco su derivada primera ni su derivada segunda en dichos puntos.

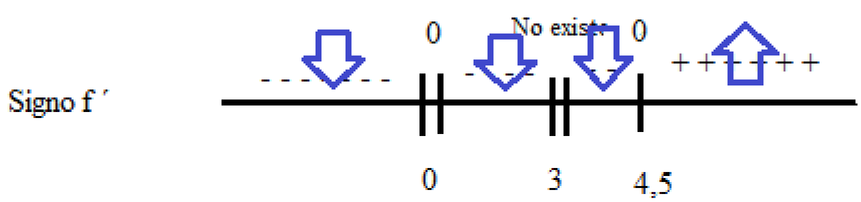
Ejemplo 9. Estudiar el crecimiento y la concavidad de la función $f : f(x) = \dfrac{x^3 - 4x + 12}{x - 3}$

Crecimiento de *f* (estudio del signo de *f ´*)

$$f'(x) = \frac{\overbrace{\left(x^3 - 4x + 12\right)'}^{=3x^2-4}.(x-3) - \left(x^3 - 4x + 12\right).\overbrace{(x-3)'}^{=1}}{(x-3)^2} = \frac{\left(3x^2 - 4\right).(x-3) - \left(x^3 - 4x + 12\right)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{3x^3 - 4x - 9x^2 + 12 - x^3 + 4x - 12}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 9x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2(2x-9)}{(x-3)^2}$$

El signo de *f ′* (x) queda así:



La función *f* es creciente en el intervalo (9/2, +∞) y es decreciente en los intervalos (- ∞, 0), (0,3) y (3, 9/2).

f (4,5) = 56,75 En x = 4,5 la función *f* presenta un mínimo relativo, que vale 56,75.

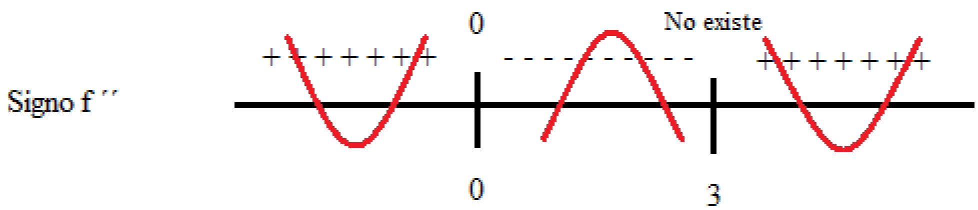
Concavidad de *f* (estudio del signo de *f ´´*)

$$f''(x)=\frac{\overbrace{\left(2x^3-9x^2\right)'}^{=6x^2-18x}.\left[(x-3)^2\right]-\left(2x^3-9x^2\right).\overbrace{\left[(x-3)^2\right]'}^{=2(x-3).\overbrace{(x-3)'}^{=1}}}{\left[(x-3)^2\right]^2}=\frac{\left(6x^2-18x\right).\left[(x-3)^2\right]-\left(2x^3-9x^2\right).2(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$=\frac{(x-3).\left[\left(6x^2-18x\right).(x-3)-2\left(2x^3-9x^2\right)\right]}{(x-3)^4}=\frac{6x^3-18x^2-18x^2+54x-4x^3+18x^2}{(x-3)^3}$$

$$=\frac{2x^3-18x^2+54x}{(x-3)^3}=\frac{x\left(2x^2-18x+54\right)}{(x-3)^3}$$

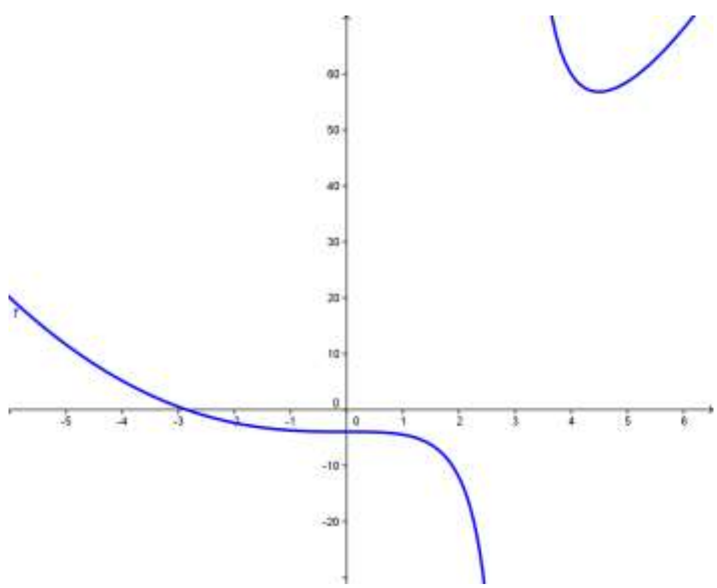
El signo resulta así:



La función *f* tiene concavidad positiva en el intervalo (-∞, 0) y en (3, +∞) y tiene concavidad negativa en el intervalo (0,3).

f (0) = -4 (0, -4) es un punto de inflexión.

Si representas gráficamente la función *f* (por ejemplo empleando geogebra) puedes comprobar que los resultados obtenidos anteriormente sobre su crecimiento y concavidad son correctos:



4. APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS PARA LA OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

Uno de los problemas con que uno se puede encontrar al estudiar determinado fenómeno social es la optimización de funciones (ya sea la maximización del apoyo social que tiene un gobierno, la maximización de beneficios de una empresa o la minimización de la tasa de mortalidad infantil en un país).

El problema en el que nos vamos a concentrar ahora entonces es estudiar la eventual existencia de extremos absolutos de una función en un intervalo. Para resolver este problema, el concepto de función derivada resulta de suma utilidad.

Definición 7. Extremos absolutos.

Denominaremos ***Máximo*** (o ***máximo absoluto***) de una función en un intervalo, y lo denotaremos como **M**, al mayor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama punto de máximo, y lo denotaremos como x_M, al valor de x donde f presenta el máximo absoluto.

Denominaremos ***mínimo*** (o ***mínimo absoluto***) de una función en un intervalo, y lo denotaremos como **m**, al menor valor que toma la función al recorrer x todos los valores del intervalo. Se llama punto de mínimo, y lo denotaremos como x_m, al valor de x donde f presenta el mínimo absoluto.

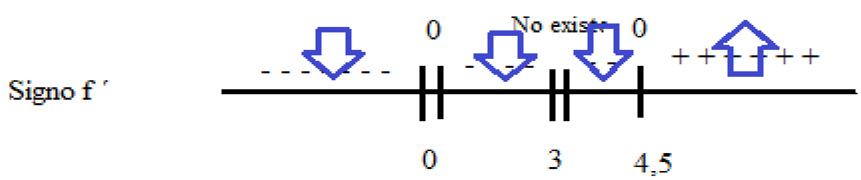
El estudio de la existencia de extremos absolutos se realiza de manera diferente según el intervalo sea un intervalo cerrado y acotado [a, b] o sea un intervalo cerrado, pero no acotado, del tipo [a,+∞), (- ∞, b] o (- ∞, + ∞). Dejaremos fuera del análisis, por exceder el alcance del curso, la consideración de intervalos no cerrados, del tipo por ejemplo (a,b).

Caso 1. Extremos absolutos en intervalos cerrados y no acotados, de la forma [a, + ∞), (- ∞, b] o (- ∞, + ∞)

Para analizar la existencia de extremos absolutos (Máximo y mínimo) en intervalos de esta forma se comienza por el estudio del signo de $f\,'$ (x), con el fin de tener información sobre el crecimiento de la función.

Ejemplo 10. Se quiere estudiar si la función $f : f(x) = \dfrac{x^3 - 4x + 12}{x-3}$ tiene Máximo y mínimo absolutos en [4**, +∞)**.

Para ello se estudia el signo de $f\,'$ (x), que tal como lo hallamos en el ejemplo 9 es el siguiente:



Como se deduce a partir del signo de f' (x), la función en el intervalo [4**, +∞)** presenta un mínimo relativo, que también es absoluto, en x = 4,5 [el mínimo es m = f (4,5) = 56,75]. Por otra parte, la función crece indefinidamente a partir del valor x = 4,5, lo cual hace sospechar que tal vez la misma no tenga Máximo absoluto.

Efectivamente, si calculamos el límite de la función cuando x → +∞, el mismo da +∞, por lo cual se concluye que la función no tiene Máximo absoluto en el intervalo [4**, +∞)**.

Comprueba estas conclusiones observando el gráfico de la función, presentado en la página 11.

<u>Caso 2.</u> Extremos absolutos en intervalos de la forma [a, b]

Teorema de Weierstrass[4]

Sea f una función continua en el intervalo [a, b], contenido en el dominio de f. Entonces la función f tiene Máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo.

El teorema de Weierstrass es muy importante, pues nos permite afirmar la existencia del Máximo y mínimo absolutos de una función, siempre y cuando esta sea continua en un intervalo cerrado y acotado. Sin embargo, no nos indica cómo hallar dichos valores Máximo y mínimo.

Los extremos absolutos pueden ser los extremos relativos que presenta la función en el intervalo o los valores funcionales de los extremos del intervalo (es decir, f (a) y f (b)). Estos serán los candidatos a ser Máximo y mínimo absolutos de la función en el intervalo. El mayor de dichos candidatos será el Máximo absoluto y el menor será el mínimo absoluto de f en [a, b].

Ejemplo 11. Se quiere estudiar si la función $f : f(x) = \dfrac{x^3 - 4x + 12}{x - 3}$ tiene Máximo y mínimo absolutos en el intervalo [4**,**6].

Por Weierstrass, sabemos que f tiene Máximo y mínimo absolutos en dicho intervalo, pues la función es continua en él. Ahora habrá que buscarlos.

Según el signo de f' (x), que se puede observar en la página anterior, en dicho intervalo la función presenta un mínimo relativo, que se alcanza en x = 4,5.

[4] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897) fue un matemático nacido en la actual Alemania. Es citado como el “padre del análisis moderno”.

Entonces, los candidatos a extremos absolutos de f en el intervalo [4**,**6] son:

Candidatos
f (4,5) = 56,75
f (4) = 60
f (6) = 68

El menor de los valores de los candidatos es f (4,5) = 56,75. Entonces, 56,75 es el mínimo de la función f en el intervalo [4**,**6] y se alcanza cuando x = 4,5.

Por otra parte, el mayor de los valores de los candidatos es f (6) = 68. Entonces 68 es el Máximo de la función f en el intervalo [4**,**6] y se alcanza cuando x = 6.

5. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LA DERIVADA

Considérese una función de costos, C(q), que representa el ***costo total*** de producir q unidades de un único producto.

A partir de dicha función, pueden definirse dos funciones más que aportan información valiosa para la empresa.

1) El ***costo medio*** de producción [CMe (q)] se define como $\frac{C(q)}{q}$. Este nos indica en promedio cuánto cuesta producir cada unidad de producto.

2) El ***costo marginal*** de producción en q [CMa(q)] se define como la derivada de la función de costo total en el punto q:

$$\text{CMa(q)} = C'(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{C(q+\Delta q) - C(q)}{\Delta q}$$

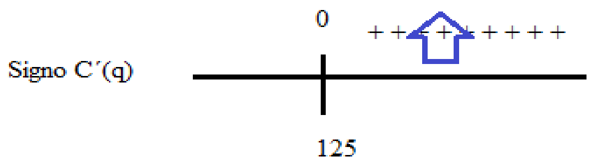
El costo marginal nos indica, entonces, lo que cuesta aproximadamente producir una unidad más, por encima del nivel de producción q.

Se notará que en la interpretación anterior se hizo referencia al costo “aproximado” y no “exacto” de producir una unidad adicional. ¿Cuál es el incremento exacto del costo al pasar a producir una unidad adicional a partir de q? Este concepto se denomina incremento de costo y es igual a:
C(q + 1) – C(q). El costo marginal no nos da, entonces, el valor exacto de dicho incremento, pero sí una aproximación al mismo.

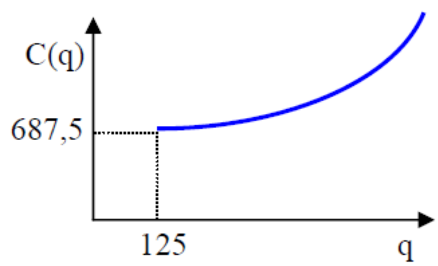
Ejemplo 12. Sea la función de Costo Total C(q) = 1.000 – 5q + 0,02 q^2 $\forall q \geq 125$

a) ¿Cómo se comporta la función de Costo Total, en cuanto a su crecimiento?

C´(q) = -5 + 0,04 q



C (125) = 687,5



El costo es creciente $\forall q \geq 125$

b) Si se están produciendo 200 unidades, ¿cuál es el incremento exacto del Costo Total al producir una unidad más? ¿Cuál es el costo marginal en q = 200?

$$C(201) - C(200) = [1.000 - 5(201) + 0{,}02(201)^2] - [1.000 - 5(200) + 0{,}02(200)^2] = 3{,}02$$

= Costo de producir una unidad adicional por encima de 200.

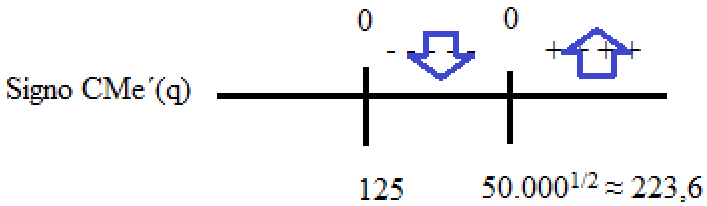
CMa (200) = C´(200) = -5 + 0,04 (200) = 3 = costo aproximado de producir una unidad adicional por encima de 200.

c) Definir la función de Costo Medio (CMe).

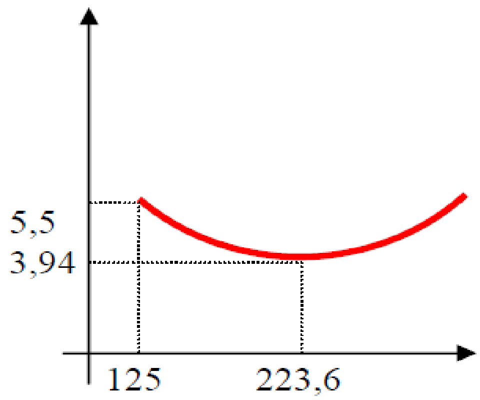
$$CMe(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{1.000 - 5q + 0{,}02q^2}{q} = \frac{1.000}{q} - 5 + 0{,}02q$$

d) ¿Cómo se comporta la función de Costo Medio, en cuanto a su crecimiento?

$$CMe'(q) = -\frac{1.000}{q^2} + 0{,}02 = \frac{0{,}02q^2 - 1.000}{q^2}$$



$$CMe\ (125) = \frac{687{,}5}{125} = 5{,}5 \qquad CMe\left(\sqrt{50.000}\right) \cong CMe(223{,}6) = 3{,}94$$



e) ¿Cuál es el Costo Medio mínimo?

Si las unidades de producto se pueden fraccionar, entonces el mínimo Costo Medio se obtiene para un nivel de producción $q = 50.000^{½} \approx 223{,}6$. Si las unidades de producto no se pueden fraccionar, entonces está claro por el gráfico que el mínimo costo medio se obtiene en un número entero próximo a 223, 6.

CMe (223) ≈ 3,94430
CMe (224) ≈ 3,94429

El costo medio mínimo se obtiene para un nivel de producción de 224 unidades.

Considérese ahora la función B(q) que mide el ***Beneficio Total*** de producir q unidades de producto. Entonces el Beneficio Medio por unidad de producto (BMe) es B(q)/q y la derivada B'(q) es el beneficio marginal (BMa) que mide aproximadamente el beneficio de producir una unidad adicional por encima de q unidades.

Similares definiciones (función total, media y marginal) pueden aplicarse para el caso de los ingresos y del producto.

6. ELASTICIDAD

Volvamos sobre la demanda como función del precio: q = f(p). La derivada de la función, $\frac{dq}{dp} = f'(p)$, nos permite saber, en cantidades absolutas, cómo variará aproximadamente la demanda ante una variación unitaria en el precio, por cuanto $f'(p_0)$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva f en el punto $p=p_0$. El diferencial $dq = f'(p).dp$ nos permite saber, en cantidades absolutas, cómo variará aproximadamente la demanda ante una variación "dp" en el precio. Pero las variaciones en cantidad proporcionan a veces información poco interesante: un aumento de $1 en el kilo de pan puede incidir en forma importante en la demanda de pan, mientras que el mismo aumento en el precio de una vivienda es insignificante (no mueve la demanda). Entonces, sería deseable disponer de un instrumento que permita conocer qué tan sensible es la demanda ante variaciones porcentuales de precio.

Definición: Elasticidad puntual de y respecto de x: $\varepsilon = \frac{dy/dx}{y/x}$.

Si se utiliza la notación y = f(x) entonces la elasticidad también puede definirse así:

$$\varepsilon = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}$$

Definición: Se dice que f es *elástica* en el punto x si: $|\varepsilon| > 1$.
Se dice que f es *de elasticidad unitaria* en el punto x si: $|\varepsilon| = 1$.
Se dice que f es *inelástica* en el punto x si: $|\varepsilon| < 1$.

¿Qué significa que una función de demanda es inelástica en el punto $p=p_0$? Significa que en ese punto la variación porcentual de la cantidad demandada es menor, en valor absoluto, que la variación porcentual en el precio a partir de $p=p_0$.

$$q = f(p) \text{ es inelástica} \Rightarrow \left| \frac{\frac{dq}{dp}}{\frac{q}{p}} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{\frac{dq}{q}}{\frac{dp}{p}} \right| < 1 \Rightarrow \left| \frac{dq}{q} \right| < \left| \frac{dp}{p} \right|$$