UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE CIENCIAS SOCIALES - DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

DIPLOMA EN ECONOMÍA PARA NO ECONOMISTAS

CURSO: MATEMÁTICA APLICADA A LA ECONOMÍA

NOTAS DEL CURSO Y APLICACIONES PRÁCTICAS

CURSO 2022

ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En las notas anteriores hemos trabajado con funciones de una sola variable, lo cual implicaba relacionar dos variables, x e y, estableciendo que y dependiera del valor que tomara x: $y = f(x)$.

Por ejemplo, si estamos estudiando la tasa de mortalidad materna (TMM) en Uruguay, puede pensarse que uno de los factores que inciden en la misma es el gasto público en salud (GPS) y podríamos establecer una relación del tipo:

$$TMM = f(GPS)$$

Sin embargo, la tasa de mortalidad materna no depende en la realidad de un único factor (el gasto público en salud, por ejemplo), sino que en ella inciden un conjunto mucho más amplio de factores, como pueden ser: el porcentaje de partos atendidos por personal capacitado (PAPC), el número de habitantes por médico (HPM), el número de camas de hospital por habitante (CHPH), el gasto público en educación (GPE).

De esta manera, podría plantearse una relación mucho más amplia:

$$TMM = f(GPS,\ PAPC,\ HPM,\ CHPH,\ GPE)$$

Así, lo que tenemos es que la tasa de mortalidad materna sería una función de varias variables, con lo cual ganamos en profundidad y realismo en nuestro análisis. La forma concreta en que se relacionen estas variables para explicar la tasa de mortalidad materna dependerá de la teoría que tenga asociada. A continuación se presentan tres ejemplos de cómo podría presentarse en forma explícita esa relación:

$$TMM = -3.GPS - 4.PAPC + 2.HPM - 5.CHPH - 6.GPE$$

$$TMM = -3.GPS - PAPC^2 + 2.HPM - HPM^2 - 4.CHPH.GPE$$

$$TMM = e^{-GPS - 3.PAPC + 5.HPM - CHPH - 2.GPE}$$

La relevancia de identificar una forma funcional concreta radica en saber cómo un cambio en una de las variables independientes o explicativas afecta a la variable dependiente, en este caso, la tasa de mortalidad materna. Por ejemplo, es interesante conocer cómo un cambio en el gasto público en salud afecta la tasa de mortalidad materna. ¿Un incremento en el gasto público en salud ayuda a disminuir la tasa de mortalidad materna? Si es que influye, ¿cuánto debería incrementar el gobierno el gasto público en salud para conseguir disminuir la tasa de mortalidad materna en 1 unidad?

En todas las disciplinas científicas, pero en particular en las Ciencias Sociales es poco frecuente encontrar que cierta variable dependa exclusivamente de una única variable. Es decir, son poco frecuentes las relaciones del tipo: $y = f(x)$. Lo común es que una variable dependa del valor que tomen varias variables, por lo cual se vuelve imperioso considerar funciones que incluyan más de una variable independiente o explicativa a la vez. Esto es, se vuelve necesario considerar relaciones del tipo: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Eso es precisamente lo que haremos en la presente sección.

1. ANÁLISIS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Definición 1. Una función f en las variables $x_1, x_2, \dots, x_k$ con dominio $D(f)$ es una relación que a cada punto $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in D(f)$ le asigna un único número real, que simbolizaremos $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Notación: En el caso de dos variables en lugar de $f(x_1, x_2)$ suele utilizarse también $f(x, y)$.

Ejemplo 1: Supongamos que la función f, con la siguiente expresión analítica:

$$TMM = f(GPS,\ PAPC,\ HPM,\ CHPH,\ GPE) = -3.GPS - 4.PAPC + 2.HPM - 5.CHPH - 6.GPE$$

explica el comportamiento de la tasa de mortalidad materna (en número de muertes maternas cada 100.000 nacidos vivos) a partir de las variables Gasto público en salud (en porcentaje del Producto Interno Bruto - PIB), Porcentaje de partos atendidos por personal capacitado, Número de habitantes (en miles) por médico, Número de camas de hospital cada 1.000 habitantes y Gasto público en educación (en porcentaje del Producto Interno Bruto – PIB).

Supongamos que se tienen datos para dos países:

País	GPS	PAPC	HPM	CHPH	GPE
A	4	90	300	2	5
B	6	100	250	3	6

Vamos a calcular la tasa de mortalidad materna para uno y otro país, de acuerdo a la función explicitada anteriormente:

$$TMM_{Pais\ A} = f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5) = -3.(4) - 4.(90) + 2.(300) - 5.(2) - 6.(5) = 188$$

$$TMM_{Pais\ B} = f(6,\ 100,\ 250,\ 3,\ 6) = -3.(6) - 4.(100) + 2.(250) - 5.(3) - 6.(6) = 31$$

Se concluye por lo tanto que el país B tiene una tasa de mortalidad materna mucho menor que el país A.[1]

Ejemplo 2: El Producto Bruto Interno (PIB) de un país se define como el valor de la producción de bienes de uso final realizada en un país o región durante cierto período de tiempo, en general un trimestre o un año. El destino de tal producción puede ser los hogares, las empresas, el gobierno o el exterior. Es así que puede plantearse la siguiente relación:

$$PIB = Consumo_{hogares} + Inversión_{empresas} + Consumo_{gobierno} + Exportaciones - Importaciones$$

En el caso en que la producción sea utilizada por los hogares se denomina Consumo de los hogares (C). Si es comprada por las empresas recibe el nombre de Inversión (I), mientras que si tiene como destino el gobierno se denomina Consumo del gobierno (G). Si se vende al exterior se denomina Exportaciones (X). Por último hay que señalar que los hogares, las empresas y el mismo gobierno compran productos del exterior, denominados Importaciones (M). Dado que el PIB solo contabiliza la producción realizada en el país, es preciso restar de los demás ítems las Importaciones.

Desde el punto de vista matemático, el PIB es una función de cinco variables:

$$PIB = f(C, I, G, X, M) = C + I + G + X - M$$

Sabiendo el valor de dichas cinco variables se puede calcular el valor del PIB.

[1] A modo informativo, en 2015 la tasa de mortalidad materna en Uruguay fue de 15 muertes maternas cada 100.000 nacidos vivos, mientras que la de Bolivia fue de 206 muertes maternas cada 100.000 nacidos vivos.
Fuente: CEPALSTAT (http://estadisticas.cepal.org/cepalstat/WEB_CEPALSTAT/estadisticasIndicadores.asp?idioma=e).

Por ejemplo, el valor de dichas variables (en miles de millones de pesos) para los años 2017, 2018 y 2019 se presenta en la siguiente tabla:

	C	I	G	X	M
2017	1.147	259	248	366	313
2018	1.223	303	268	387	348
2019	1.312	319	296	429	381

Fuente: INE (Instituto Nacional de Estadística).

Para obtener el PIB de 2017, debemos calcular:

$$PIB_{2017} = f(C_{2017}, I_{2017}, G_{2017}, X_{2017}, M_{2017})$$

$$= f(1.147,\ 259,\ 248,\ 366,\ 313) \ = \ 1.147 + 259 + 248 + 366 - 313 \ = \ 1.707$$

De la misma manera, para obtener el PIB de 2018 y de 2019, habría que calcular:

$$PIB_{2018} = f(C_{2018}, I_{2018}, G_{2018}, X_{2018}, M_{2018}) = f(1.223,\ 303,\ 268,\ 387,\ 348)$$

$$PIB_{2019} = f(C_{2019},\ I_{2019},\ G_{2019},\ X_{2019},\ M_{2019}) = f(1.312,\ 319,\ 296,\ 429,\ 381)$$

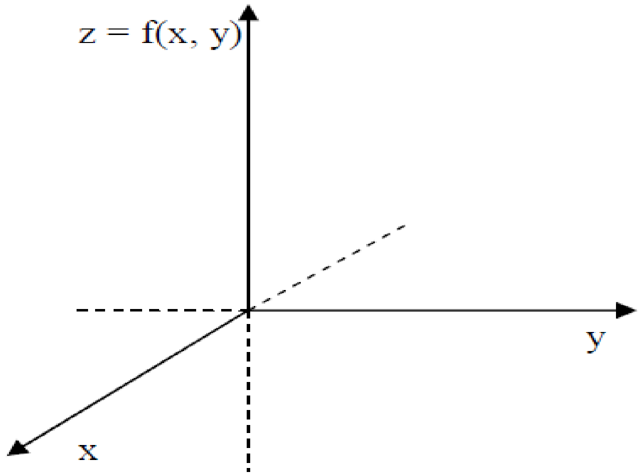
Realice los cálculos usted mismo y confirme que el PIB de 2018 fue de 1.833 mil millones de pesos y el de 2019 fue de 1.975 mil millones de pesos.

Ejemplo 3: Sea la función f tal que $f(x, y) = 2x - 10y - 40$

Calcular el valor que toma la función cuando x = 1, y = 3.

Eso implica calcular $f(1,3) = 2.(1) - 10.(3) - 40 = -68$

La representación gráfica de este tipo de funciones solo puede realizarse en el caso de dos variables independientes: $z = f(x, y)$, donde z es el valor que toma la función. Si en el caso de funciones de una variable considerábamos dos ejes cartesianos perpendiculares para efectuar la representación gráfica, en el caso de funciones de dos variables deberemos considerar tres ejes, de la siguiente forma:

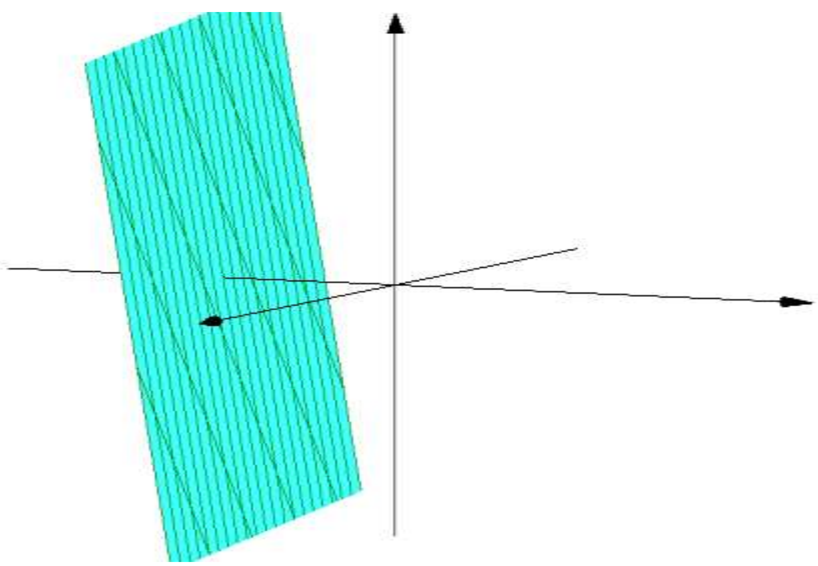


La representación gráfica de funciones de dos variables no suele ser sencilla de ser llevada a cabo y no será tratada en este curso.

De todas maneras, y solo a modo de ejemplo, presentaremos los gráficos de algunas funciones de dos variables.

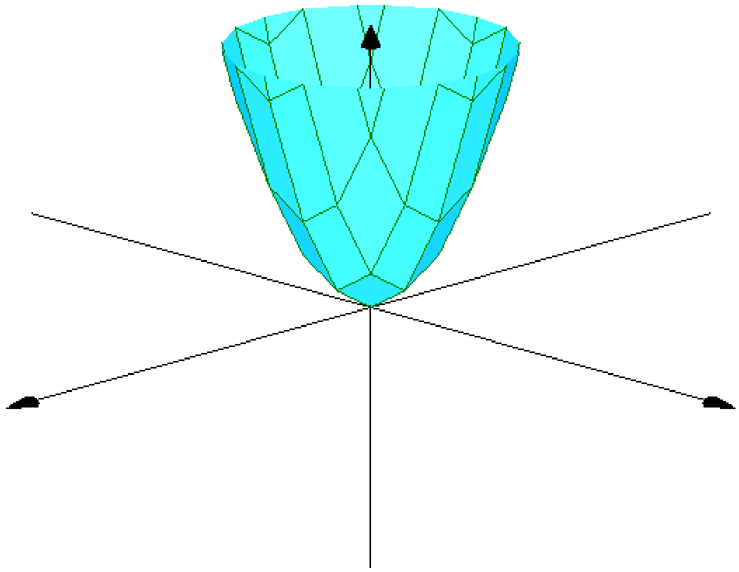
Ejemplo 4: Consideremos la función del ejemplo 3: $z = f(x, y) = 2x - 10y - 40$

Su representación gráfica sería:

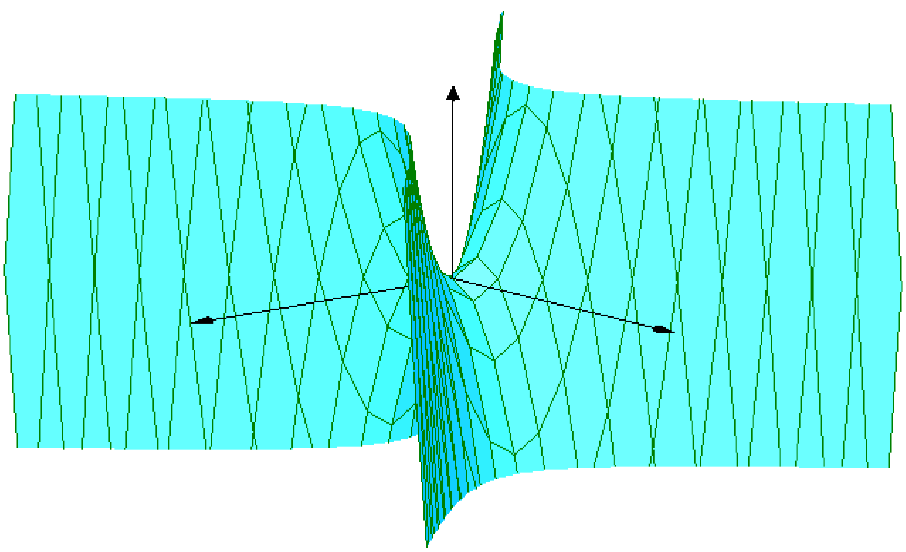


Los gráficos de funciones lineales en x e y, como el caso de la función anterior, tienen la forma de planos.

Ejemplo 5: $z = f(x, y) = x^2 + y^2$



Ejemplo 6: $z = f(x, y) = x^2 - y^2$



Para el caso de más de dos variables independientes, la representación gráfica a través de un sistema de ejes no puede realizarse.

Una manera alternativa de representar el gráfico de una función de dos variables es mediante los denominados ***conjuntos*** o ***curvas de nivel***.

<u>Definición 2. Curvas de nivel.</u>

Sea una función $f: R^2 \to R$, es decir, una función con dominio $R^2 = R \times R$ (significa que las variables independientes, x e y, pueden tomar cualquier valor real) y con codominio R.

Definimos las curvas o conjuntos de nivel $\alpha \in R$ asociadas a la función *f*, las que denotaremos por $C_{f,\alpha}$ de la siguiente manera:

$$C_{f,\alpha} = \{(x, y) \mid f(x, y) = \alpha\}$$

En otras palabras, las curvas de nivel α asociadas a la función *f* están formadas por todos los puntos del dominio de la función cuya imagen a través de la función es α.

Ejemplo 7: Volvamos a considerar la función del ejemplo 5: $f | f(x, y) = x^2 + y^2$

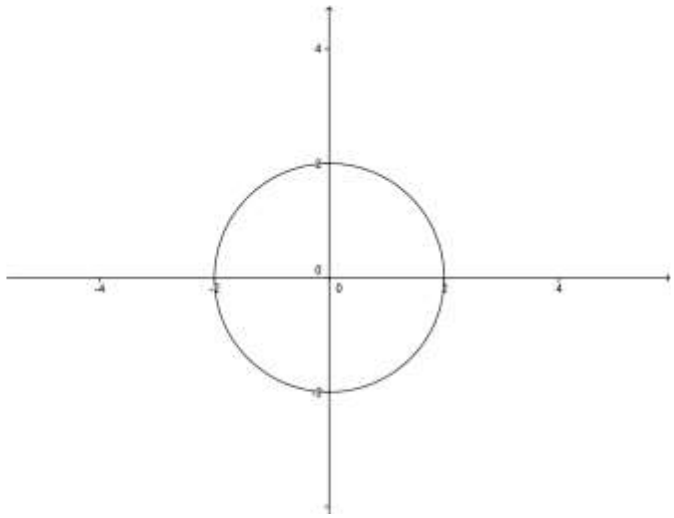
En la página anterior podemos observar su representación gráfica utilizando tres ejes cartesianos para ello. Ahora vamos a servirnos de las curvas de nivel para obtener una representación alternativa de su gráfico, pero utilizando para ello solamente dos ejes.

Vamos a preguntarnos en primer lugar qué puntos (x,y) tienen como valor funcional el número 4, por ejemplo. Esta pregunta la podemos responder determinando la curva de nivel 4 ($\alpha = 4$) para esta función *f*:

$$C_{f,4} = \{(x, y) \mid f(x, y) = 4\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

Observando la ecuación que nos queda determinada, apreciamos que esta curva de nivel 4 no es otra cosa que una circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{4} = 2$.[2] Además, podemos representar esta circunferencia, considerando dos ejes cartesianos perpendiculares, como se presenta a continuación:

[2] Recordemos que la ecuación de una circunferencia de centro (a,b) y radio r, tal como fue definida en notas anteriores, es: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

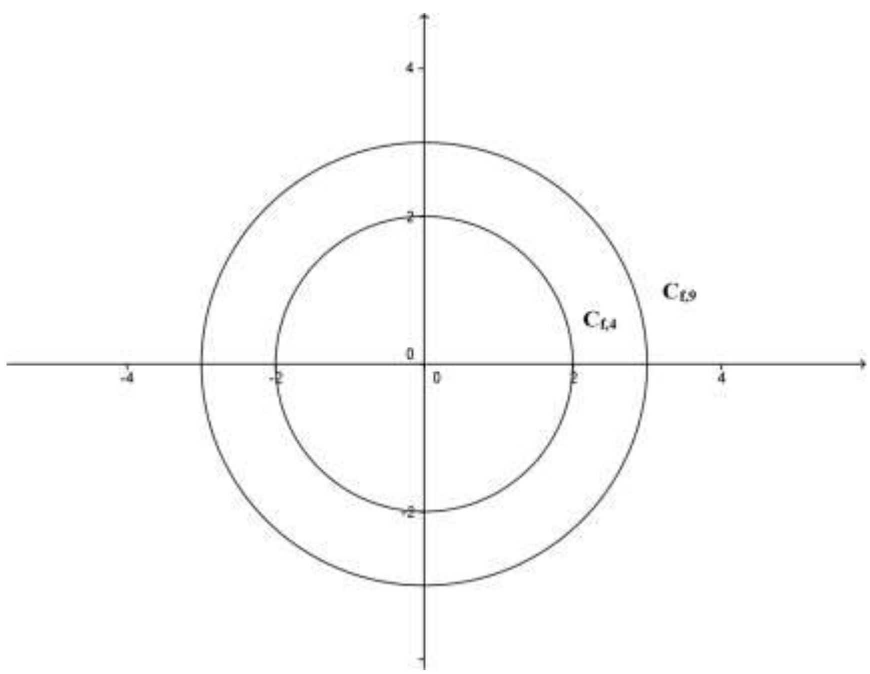


En todos los puntos que forman parte de la circunferencia *f* (x,y) toma el valor 4.

¿Y si en lugar del valor 4, nos interesara encontrar aquellos puntos en que la función vale 9? En ese caso, calcularíamos la curva de nivel 9 para la función *f*:

$$C_{f,9} = \{(x,y) \mid \ f(x,y) = 9\} = \{(x,y) \mid \ x^2 + y^2 = 9\}$$

En este caso, la curva de nivel 9 se trata de una circunferencia de centro (0,0) y radio $\sqrt{9} = 3$, la cual podemos representar junto con la anterior en un nuevo gráfico:



Podemos seguir agregando otras curvas de nivel para reforzar nuestra comprensión del gráfico de la función *f*:

$$C_{f,\alpha} = \{(x, y) \mid \; f(x, y) = \alpha\} = \{(x, y) \mid \; x^2 + y^2 = \alpha\}$$

Se puede deducir, dada la forma general de las curvas de nivel α en este caso, que se tratarán siempre de circunferencias de centro (0,0) y radio $\sqrt{\alpha}$. Esto implica además que la función alcanza valores más altos si nos situamos en puntos ubicados en circunferencias de radio mayor. Nótese por último que la representación gráfica de la función mediante curvas de nivel es equivalente a observar el gráfico de la función en tres ejes "desde arriba". Volveremos más adelante a utilizar las curvas de nivel, cuando nos ocupemos de optimizar funciones.

El estudio de las funciones de más de una variable puede razonarse en forma análoga a lo realizado para las funciones de una sola variable. Por tal motivo, extenderemos las definiciones más importantes vistas para este caso, para el caso más general de funciones de varias variables.

Uno de los ejemplos presentados al inicio del capítulo planteaba una relación entre la Tasa de mortalidad materna y un conjunto de variables [el gasto público en salud (GPS), el porcentaje de partos atendidos por personal capacitado (PAPC), el número de habitantes por médico (HPM), el número de camas de hospital por habitante (CHPH) y el gasto público en educación (GPE)]:

$$TMM = f(GPS,\ PAPC,\ HPM,\ CHPH,\ GPE)$$

Un análisis completo de esta relación sería interesante e informativo que incluyera cómo el cambio en alguna de las variables independientes afectaría a la variable dependiente. Por ejemplo, cómo un cambio en el gasto público en salud afectaría a la tasa de mortalidad materna. Uno, a priori, esperaría que ese efecto fuese de signo negativo: que un incremento en el gasto público en salud provocase una caída en la tasa de mortalidad materna. Pero, ¿ese efecto sería grande o pequeño? Este tipo de preguntas se vuelve fundamental responderlas para que el gobierno implemente políticas adecuadas, en este caso, en el terreno de la salud maternal.

En el párrafo anterior nos cuestionamos cómo una variación en el gasto público en salud afectaría a la tasa de mortalidad materna. En el contexto de funciones de varias variables no tendría mucho sentido preguntarse cómo una variación en varias variables a la vez afecta a la variable dependiente, sino que es mucho más útil preguntarse por el efecto aislado de una sola de las variables independientes. En otras palabras, no es muy informativo preguntarse cómo una variación a la vez en el gasto público en salud (GPS), en el porcentaje de partos atendidos por personal calificado (PAPC) y en el gasto público en educación (GPE) afectaría a la tasa de mortalidad materna (TMM), pues los efectos de los cambios señalados se mezclarían unos con los otros. Sí tiene sentido intentar aislar el efecto que cada una de las variables independientes tiene en la variable dependiente. Esto lo conseguiremos con las denominadas ***derivadas parciales***.

Definición 4. Derivada parcial de una función en un punto.

Sea una función f que depende de k variables: $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Se denomina ***derivada parcial*** de la función f respecto a la variable x_i en el punto $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_k)$ y se denotará como $D_i f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_k)$ al resultado del siguiente límite, siempre y cuando exista y sea finito:

$$D_i f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_k) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i + h,\ \ldots,\ a_k) - f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_k)}{h}$$

Dada una situación en que cada variable toma cierto valor: $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, nos concentramos en calcular el efecto que una variación infinitesimal en la variable x_i provoca en la variable dependiente, mientras las demás variables permanecen constantes.

La definición, y por ende su interpretación, es análoga a la de derivada de una función de una sola variable, en la cual se calculó el límite del cociente incremental cuando el incremento en la variable independiente (h) tendía a 0.

Notación: Otra notación alternativa es la siguiente:

$$D_i f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_k) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots,\ a_k)$$

Observación: Algo importante a destacar es que la única variable que se hace variar es x_i quedando las demás variables constantes.

Ejemplo 11: Anteriormente se señaló que sería interesante estudiar cómo afectaría a la tasa de mortalidad materna un cambio en alguna de las variables de las cuales dependía:

$$\begin{aligned} TMM &= f(GPS,\ PAPC,\ HPM,\ CHPH,\ GPE) \\ &= -3.GPS - 4.PAPC + 2.HPM - 5.CHPH - 6.GPE \end{aligned}$$

A su vez en el ejemplo 1 se consideró un cierto país A, para el cual se calculó el valor de la tasa de mortalidad materna, dados los valores de las variables independientes; es decir se calculó el valor de la función f en el punto $(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5)$:

$$TMM_{País\ A} = f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5) = -3.(4) - 4.(90) + 2.(300) - 5.(2) - 6.(5) = 188$$

Intentaremos ahora calcular cómo se vería afectada la tasa de mortalidad materna ante una variación en una unidad en el gasto público social, lo cual es precisamente lo que nos reporta la derivada parcial de la función con respecto a la variable GPS en el punto $(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5)$.

Siguiendo la definición 3, deberemos calcular el límite del cociente incremental correspondiente:

$$D_1 f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5) - f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[-3.(4+h) - 4.(90) + 2.(300) - 5.(2) - 6.(5)] - [-3.(4) - 4.(90) + 2.(300) - 5.(2) - 6.(5)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h} = -3$$

El resultado final entonces es $D_1 f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5) = -3$, el cual se interpreta así: dados los valores iniciales de las variables independientes, por cada unidad que se incremente el gasto público en salud (GPS), dejando las demás variables constantes, la tasa de mortalidad materna (TMM) se reducirá en 3 unidades.

Si queremos saber el efecto que una variación en el porcentaje de partos atendidos por personal calificado (PAPC), segunda variable independiente, tiene sobre la tasa de mortalidad materna, deberemos calcular la derivada parcial de *f* con respecto a dicha variable en el punto $(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5)$:

$$D_2 f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(4,\ 90+h,\ 300,\ 2,\ 5) - f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[-3.(4) - 4.(90+h) + 2.(300) - 5.(2) - 6.(5)] - [-3.(4) - 4.(90) + 2.(300) - 5.(2) - 6.(5)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{h} = -4$$

En este caso, $D_2 f(4,\ 90,\ 300,\ 2,\ 5) = -4$, lo cual nos quiere decir que, dados los valores iniciales de las variables independientes, por cada unidad que se incremente el porcentaje de partos atendidos por personal calificado (PAPC), dejando las demás variables constantes, la tasa de mortalidad materna (TMM) se reducirá en 4 unidades.

De manera similar podemos calcular el efecto que una variación en cada una de las restantes variables independientes provoca en la tasa de mortalidad materna.

Análogamente a como definíamos en funciones de una sola variable la función derivada, podemos hacerlo en este caso para funciones derivadas parciales.

Definición 5. Funciones derivadas parciales.

La derivada parcial de una función *f* respecto de la variable x_i es una función que a cada punto del dominio de la función *f* le asigna el valor de la derivada parcial de *f* respecto de x_i en dicho punto:

$$D_i f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_i,\ \dots,\ x_k) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_i+h,\ \dots,\ x_k)-f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_i,\ \dots,\ x_k)}{h}$$

La derivada parcial respecto a la variable x_i mide el cambio que se opera en *f (x)* ante un cambio infinitesimal en la variable x_i, manteniéndose las demás variables constantes. Esta interpretación de la derivada parcial respecto a x_i proporciona una regla sencilla para su cálculo: alcanza con derivar la función *f* respecto a una sola variable (x_i), considerando las demás variables como si fueran constantes. Para realizar dicho cálculo pueden aplicarse las reglas de derivación ya vistas en el caso de derivadas de funciones de una sola variable.

Ejemplo 12: Sea la función $f|f(x,y) = 5x^2 - 3y^2$. Calcularemos la derivada parcial de la función *f* respecto a la variable x $[D_1 f(x,y)]$ y la derivada parcial de *f* respecto a la variable y $[D_2 f(x,y)]$.

$D_1 f(x,y) = 10x$. Para obtener este resultado consideramos "y" como una constante (pues la derivada parcial es con respecto a x) y aplicamos las reglas de derivación ya empleadas anteriormente.

$D_2 f(x,y) = -6y$. En este caso, dado que calculamos la derivada parcial con respecto a y, consideramos como constante "x".

Ejemplo 13: Sea la función $f|f(x,y) = 4x^3 - 2xy^2 + 6y^3$. Calcular sus derivadas parciales.

$D_1 f(x,y) = 12x^2 - 2y^2$
$D_2 f(x,y) = -4xy + 18y^2$

Ejemplo 14: Sea la función $f|f(x,y,z) = e^{x^2}.(2x + 3xy - 5y^4 + 3z)$. Calcular sus derivadas parciales.

$D_1 f(x,y,z) = 2xe^{x^2}.(2x + 3xy - 5y^4 + 3z) + e^{x^2}.(2 + 3y)$
$D_2 f(x,y,z) = e^{x^2}.(3x - 20y^3)$
$D_3 f(x,y,z) = e^{x^2}.(3)$

Definición 6. Matriz jacobiana.

Se denomina ***matriz jacobiana*** de una función f a la matriz que tiene como coeficientes las derivadas parciales de la función f. Es decir:

$$J_f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k) = (D_1 f,\ D_2 f,\ \ldots,\ D_k f)$$

Ejemplo 15: La matriz jacobiana de la función del ejemplo 13, $f|f(x,y) = 4x^3 - 2xy^2 + 6y^3$, es:

$$J_f(x,\ y) = \left(D_1 f(x,y),\ D_2 f(x,y)\right) = (12x^2 - 2y^2 \quad -4xy + 18y^2)$$

Definición 7. Derivadas parciales de segundo orden.

Las derivadas parciales que hemos definido anteriormente se denominan también derivadas parciales de primer orden, y son equivalentes a la derivada primera en las funciones de una sola variable. A continuación definiremos las denominadas derivadas parciales de segundo orden, las cuales son equivalentes a la derivada segunda en las funciones de una sola variable.

Las derivadas de segundo orden de la función f respecto a la variable x_j se obtienen derivando las derivadas de primer orden de f respecto a la variable x_i (donde x_i y x_j pueden ser la misma variable):

$$D_{ij} f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_k\right) =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{D_i f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_j + h,\ \ldots,\ x_k\right) - D_i f\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i,\ \ldots,\ x_j,\ \ldots,\ x_k\right)}{h}$$

Ejemplo 16: Retomamos el ejemplo 13, en que se trabajó con $f(x,y) = 4x^3 - 2xy^2 + 6y^3$

En dicho ejemplo se halló que las derivadas parciales de primer orden la función f eran:

$D_1 f(x,y) = 12x^2 - 2y^2$ $\qquad\qquad$ $D_2 f(x,y) = -4xy + 18y^2$

Derivando cada una de las derivadas parciales con respecto a "x" y a "y", obtendremos las derivadas parciales de segundo orden. De esta manera, obtendremos en este caso cuatro derivadas parciales de segundo orden.

$D_{11} f(x,y) = 24x$ $\qquad\qquad$ $D_{12} f(x,y) = -4y$

$D_{21} f(x,y) = -4y$ $\qquad\qquad$ $D_{22} f(x,y) = -4x + 36y$

Observación: En este caso $D_{12}f(x,y) = -4y = D_{21}f(x,y)$. Este no es un resultado casual. Si las derivadas parciales de segundo orden son funciones continuas, se cumple que $D_{ik}f = D_{ki}f$. En este curso trabajaremos siempre con funciones que cumplan esta condición.

Definición 8. Matriz hessiana.

Se denomina ***matriz hessiana*** de una función *f* a la matriz que tiene como coeficientes las derivadas parciales de segundo orden de la función *f*. Es decir:

$$H_f = \begin{pmatrix} D_{11}f & D_{12}f & \dots & D_{1j}f & \dots & D_{1k}f \\ D_{21}f & D_{22}f & \dots & D_{2j}f & \dots & D_{2k}f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{i1}f & D_{i2}f & \dots & D_{ij}f & \dots & D_{ik}f \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{k1}f & D_{k2}f & \dots & D_{kj}f & \dots & D_{kk}f \end{pmatrix}$$

Notas:

1) En el caso particular de una función de una función de dos variables, la matriz hessiana quedaría así:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{pmatrix}$$

2) Dado que en el presente curso trabajaremos siempre con funciones que tengan derivadas de segundo orden continuas, la matriz hessiana siempre será una matriz simétrica, pues $D_{ij}f = D_{ji}f$.

Ejemplo 17: En el caso de la función del ejemplo 16, su matriz hessiana es:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 24x & -4y \\ -4y & -4x + 36y \end{pmatrix}$$

OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Uno de los aspectos más interesantes del estudio de funciones de una variable, como vimos en notas anteriores, es la optimización de las mismas, es decir la búsqueda de sus valores máximo y mínimo. De la misma manera es sumamente útil la optimización de funciones de varias variables, a lo cual nos enfocaremos en la presente sección. Como paso previo al hallazgo de los extremos (máximo y mínimo) absolutos, es preciso buscar los extremos (máximo y mínimo) relativos.

Definición 9. Extremos relativos (o locales).

Sea una función f tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ y sea $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ un punto interior al dominio de la función f.

Se dice que la función f presenta en $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ un ***mínimo relativo*** **(o local)** si para todos los puntos de algún entorno centrado en $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ se cumple que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \geq f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Se dice que la función f presenta en $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ un ***máximo relativo*** **(o local)** si para todos los puntos de algún entorno centrado en $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ se cumple que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leq f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Al punto en el que se alcanza un mínimo o máximo relativo se le denomina ***punto de extremo relativo***.

¿Cómo pueden obtenerse entonces los puntos de extremos relativos? A partir de la siguiente propiedad.

Propiedad 1. Condición necesaria de existencia de extremos relativos.

Sea una función f tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Si f tiene un extremo relativo en un punto $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ interior a su dominio y existe $D_i f(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ para algún i = 1, 2, …, k, entonces: $D_i f(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k) = 0$

Definición 10. Punto estacionario.

Sea una función f tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ y sea $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ un punto interior a su dominio. Si todas las derivadas parciales de f en el punto $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ valen 0, se dice que $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ es un ***punto estacionario*** de la función *f*.

De acuerdo a las definiciones anteriores y a la propiedad 1, los puntos estacionarios serán candidatos a ser puntos de extremos relativos. Hallarlos será lo primero a llevar a cabo para poder optimizar una función.

Definición 12. Punto de silla.

Sea una función f tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ y sea $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ un punto interior a su dominio. Se dice que la función f tiene en $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ un ***punto de silla*** si la función f tiene en $(a_1,\ a_2,,\ \ldots,\ a_k)$ un punto estacionario que no es punto de extremo relativo.

Ejemplo 18: Hallar todos los puntos estacionarios de la función $f\,|f(x,y) = x^2 + y^2$

Para hallar los puntos estacionarios y críticos, debemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{D_1 f(x,y) = 0} \\ \boldsymbol{D_2 f(x,y) = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{2x = 0} \\ \boldsymbol{2y = 0} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x = y = 0}$$

La función f tiene un único punto estacionario, que es (0,0).

Ejemplo 19: Hallar todos los puntos estacionarios de la función *f* tal que $f(x,y) = 2x^3 + xy^2 - 24x + y^2$

Resolvemos entonces el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \boldsymbol{D_1 f(x,y) = 0} \\ \boldsymbol{D_2 f(x,y) = 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{6x^2 + y^2 - 24 = 0} \\ \boldsymbol{2xy + 2y = 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{6x^2 + y^2 - 24 = 0} \\ \boldsymbol{2y.(x+1) = 0} \end{cases}$$

Para que la última ecuación se verifique, basta que y = 0, o que x = -1, con lo cual debemos considerar dos sistemas:

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 24 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad \Rightarrow 6x^2 + 0^2 - 24 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 4 \quad \Rightarrow x = \pm 2$$

De lo cual concluimos que (2,0) y (-2,0) son puntos estacionarios de la función *f*.

El otro sistema a considerar es:

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 24 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow x = -1 \quad \Rightarrow 6.(-1)^2 + y^2 - 24 = 0 \quad \Rightarrow y^2 = 18$$
$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{18}$$

De lo cual concluimos que $\left(-1, \sqrt{18}\right)$ y $\left(-1, -\sqrt{18}\right)$ también son puntos estacionarios de la función f.

En total hemos hallado cuatro puntos estacionarios de la función f: (2,0), (-2,0), $\left(-1, \sqrt{18}\right)$ y $\left(-1, -\sqrt{18}\right)$.

Nos queda pendiente ahora identificar si los puntos estacionarios hallados son puntos de extremos relativos o puntos de silla, es decir, nos queda pendiente clasificar dichos puntos. Para ello aplicaremos la siguiente regla.

Definición 13. Extremos absolutos de una función en un conjunto.

Extendiendo la definición 7 del tomo 8 de las notas para el caso de funciones de varias variables, planteamos las siguientes definiciones.

Denominaremos ***mínimo (o mínimo absoluto)*** de una función $f \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ en un conjunto, y lo denotaremos como **m**, al menor valor que toma la función f al recorrer $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ todos los puntos del conjunto. Se llama punto de mínimo absoluto al punto $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ donde f presenta el mínimo absoluto.

Denominaremos ***Máximo (o máximo absoluto)*** de una función $f \mid f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ en un conjunto, y lo denotaremos como **M**, al mayor valor que toma la función f al recorrer $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ todos los puntos del conjunto. Se llama punto de máximo absoluto al punto $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ donde f presenta el máximo absoluto.

En las Ciencias Sociales las variables objeto de estudio suelen tomar valores restringidos a un subconjunto de los números reales. Por ejemplo, los precios y las cantidades no pueden tomar valores negativos, el porcentaje de partos atendidos por personal capacitado (variable de interés en el ejemplo 1 de este capítulo) solo toma valores entre 0 y 100, al igual que la tasa de pobreza. Estos son solo algunos de los ejemplos de restricciones que pueden aparecer cuando queremos optimizar (maximizar o minimizar) una función.

Por dicho motivo, reduciremos nuestro estudio al caso en que las variables independientes tengan algún tipo de restricción en los valores que pueden tomar. En otras palabras, nos centraremos en optimizar funciones cuyo dominio esté restringido. En particular, consideraremos el caso en que el dominio está restringido a un conjunto cerrado y acotado.

Recordemos antes que nada una extensión de un resultado muy importante que ya hemos visto para funciones de una sola variable.

Teorema 1. Teorema de Weierstrass.

Sea una función f tal que $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ es continua en el conjunto S, contenido en el dominio de *f*. Además, el conjunto S es cerrado y acotado.

Entonces, la función f tiene Máximo y mínimo absolutos en el conjunto S.

En el caso que estamos considerando, dado un conjunto cerrado y acotado y si además trabajamos con una función continua, por el teorema de Weierstrass sabemos que la función tiene Máximo y mínimo absoluto en dicho conjunto.

Ejemplo 22: Uno de los temas centrales de estudio de la microeconomía es cómo toman sus decisiones los consumidores de bienes. Dado que el consumo de bienes le reporta a una persona cierta utilidad o satisfacción, cada persona intentará consumir la mayor cantidad de bienes que le sea posible. Pero a su vez, las personas enfrentan ciertas restricciones para acceder a los bienes: los precios de estos y el ingreso que la persona percibe.

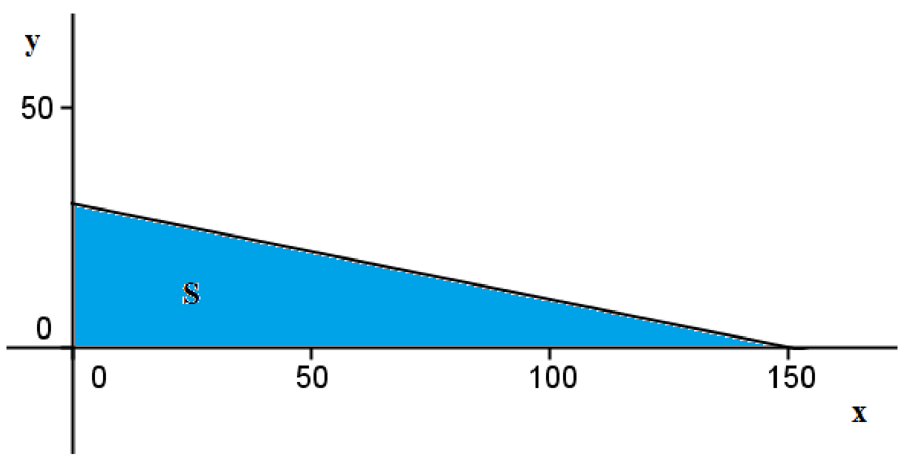
Supongamos que una persona tiene un ingreso mensual de $ 15.000 y para simplificar el análisis supongamos que quiere consumir dos tipos de bienes: alimentos y ropa. Cada unidad de alimento le cuesta $ 100, mientras que cada unidad de ropa le cuesta $ 500. Teniendo en cuenta estos valores, puede identificarse las canastas de bienes (combinaciones de alimentos y ropa, en este caso) que la persona puede adquirir con su ingreso.

Sea x = unidades de alimentos consumidos
y = unidades de ropa consumidas

Entonces la persona podrá consumir las combinaciones de alimentos y ropa, (x, y), que verifiquen la siguiente condición: $100x + 500y \leq 15.000$

La anterior inecuación nos quiere decir simplemente que el gasto de la persona en los dos bienes debe ser a lo sumo $ 15.000, si es que gasta todo su ingreso mensual.

Gráficamente la anterior restricción puede representarse así:



El conjunto S representa todas las canastas de alimentos y ropa [todos los puntos (x,y)] que la persona puede adquirir con su ingreso, y recibe el nombre de conjunto de posibilidades de consumo.

Habitualmente se asume que la persona gasta todo su ingreso, con lo cual la restricción (S) se reduce al segmento de recta: $100x + 500y = 15.000$, denominada recta de restricción presupuestal y compuesta por aquellas combinaciones (canastas) de alimentos y de ropa que el consumidor puede adquirir si gasta todo su ingreso.

Teniendo en cuenta que el consumo de una canasta de bienes le brinda a la persona cierta satisfacción o utilidad, la persona elegirá de todas las canastas que componen su conjunto de posibilidades de consumo, aquella en la que dicha utilidad sea máxima.

Si suponemos que la Utilidad que le brinda una canasta de bienes está representada por la siguiente función: $U|U(x,y) = x.y$, el problema al que se enfrenta la persona es elegir la canasta, (x,y) de S, tal que maximice su utilidad: $\max\limits_{(x,y)\in S} U(x,y)$

Dado que la función de utilidad U es una función continua y que el conjunto S en el cual buscaremos el máximo de dicha función es un conjunto cerrado y acotado, por el teorema de Weierstrass podemos afirmar que la función presenta Máximo absoluto en dicho conjunto.

Considerando la restricción impuesta por el conjunto S y sustituyendo en la función de Utilidad, obtenemos:

$0 \le x \le 150\ ,\ y = 30 - 0{,}2x \quad \Rightarrow \quad U(x\ ,\ 30 - 0{,}2x) = (x).(30 - 0{,}2x) = -0{,}2x^2 + 30x$, que es una expresión dependiente de una sola variable.

Derivando la función f restringida al conjunto S y estudiando el signo de la derivada se concluye que f restringida a S tiene su máximo en x = 75.

El mayor valor es 1.125 al que corresponde el punto (75,15). Es decir, la máxima utilidad que la persona puede obtener en el conjunto de posibilidades de consumo S es 1.125 y dicha utilidad se alcanza en el punto de máximo absoluto (75,15) [la máxima utilidad se alcanza consumiendo 75 unidades de alimentos y 15 unidades de ropa].

Observación: Una manera gráfica de resolver el problema del consumidor es recurriendo a las curvas de nivel definidas anteriormente.

Dado que el objetivo del consumidor es maximizar su utilidad, determinaremos las curvas de nivel α asociadas a la función de utilidad:

$$C_{U,\alpha} = \{(x,y) \mid U(x,y) = \alpha\} = \{(x,y) \mid x.y = \alpha\}$$

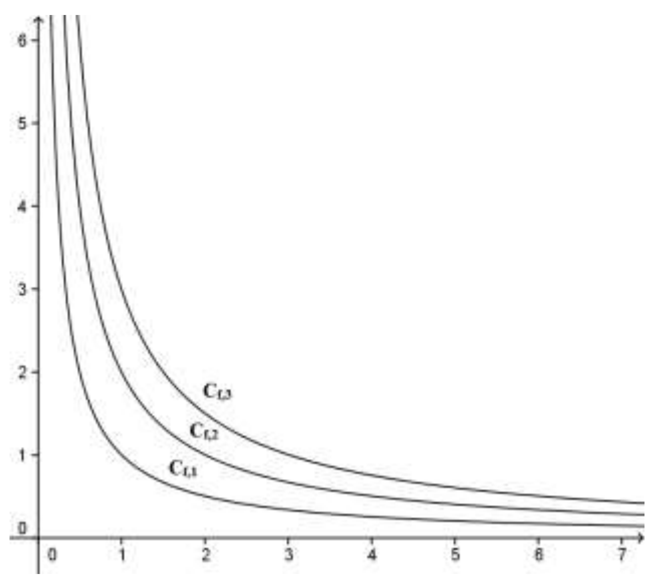
Consideremos algunas de dichas curvas y representémoslas con el fin de extraer información sobre el crecimiento de la función de utilidad.

$$C_{U,1} = \{(x,y) \mid U(x,y) = 1\} = \{(x,y) \mid x.y = 1\} = \left\{(x,y) \mid y = \frac{1}{x}\right\}$$

$$C_{U,2} = \{(x,y) \mid U(x,y) = 2\} = \{(x,y) \mid x.y = 2\} = \left\{(x,y) \mid y = \frac{2}{x}\right\}$$

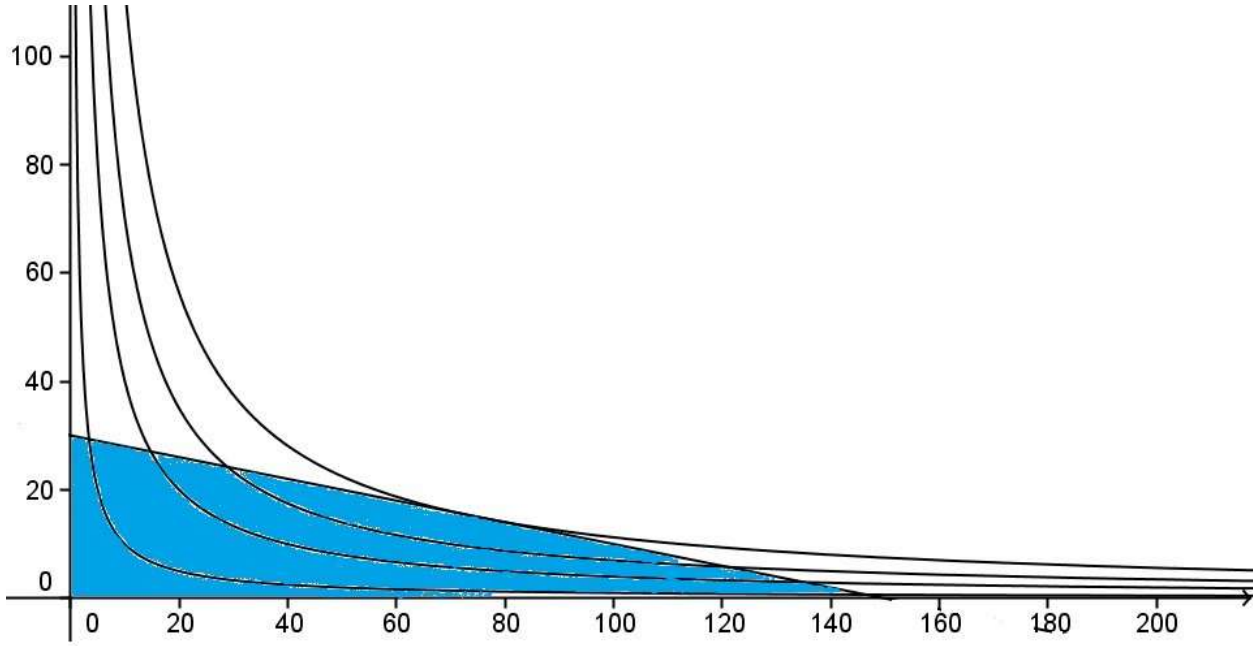
$$C_{U,3} = \{(x,y) \mid U(x,y) = 3\} = \{(x,y) \mid x.y = 3\} = \left\{(x,y) \mid y = \frac{3}{x}\right\}$$

Si representamos gráficamente en el sistema de dos ejes cada una de las anteriores curvas de nivel (por ejemplo, para la curva de nivel 1 implicaría representar la ecuación $x.y = 1$ o su forma equivalente $y = \frac{1}{x}$), obtenemos esto:



Puede apreciarse que valores más elevados de la función se alcanzan en curvas de nivel más alejadas del origen. Esto quiere decir que si nos interesa maximizar la función de utilidad, buscaremos aquella curva de nivel (en el contexto del ejemplo se conocen también como curvas de utilidad) que esté situada tan alejada del origen como las restricciones lo permitan.

Si consideramos a la vez el conjunto de posibilidades de consumo S (determinado por las restricciones que enfrenta el consumidor) y las curvas de nivel asociadas a la función de utilidad obtenemos la siguiente representación gráfica:



En el gráfico podemos deducir que, dado que las curvas de nivel más alejadas del origen estaban asociadas a niveles más altos de la función de utilidad, la máxima utilidad será alcanzada en un punto que, perteneciendo al conjunto de restricciones S, a la vez esté situado sobre aquella curva que más alejada del origen esté. De lo anterior se concluye que el punto de máximo absoluto se situará, como se aprecia en el gráfico, en la recta de restricción presupuestal.

Además se cumple que en el punto de Máximo absoluto la recta presupuestal es tangente a la curva de indiferencia, con lo cual la pendiente de la recta debe coincidir en dicho punto con la derivada de la curva.