# Examen de Teoría de Juegos. Solución

**Ejercicio 1**
Para la empresa 1:

$$\Pi_1(w_1, w_2) = \begin{cases} (x-w_1)((1-\lambda)\frac{N}{2} + \lambda N) & \text{si } w_1 > w_2 \\ (x-w_1)(1-\lambda)\frac{N}{2} & \text{si } w_1 < w_2 \\ (x-w_1)\frac{N}{2} & \text{si } w_1 = w_2 \end{cases}$$

De la misma forma para la empresa 2.

Si $\lambda = 0$ entonces las ganancias no dependen del salario, así que las empresas van a fijar $w_i = 0$ (es una estrategia dominante).

Si $\lambda = 1$ entonces la empresa con el salario más bajo va a tener ganacias 0. Hay un único equilibrio: $w_1 = w_2 = x$.

Si $\lambda \in (0,1)$ entonces, siempre que los salarios sean menores que $x$, una empresa tiene incentivos para fijar un salario un poco más alto que la otra. Si los salarios están en $x$, entonces las empresas tienen ganancia 0 y cada una prefiere bajar el salario a 0. Específicamente:

Supongamos que $w_1 = w_2 < x$, y veamos que si la empresa 1 fija un salario $w_1 + \epsilon$ obtiene mayores beneficios. El beneficio cuando los salarios son iguales es $(x - w_1)\frac{N}{2}$, mientras que si fija $w_1 + \epsilon$ es $(x - w_1 - \epsilon)((1 - \lambda)\frac{N}{2} + \lambda N)$. Por lo tanto, hay que elegir $\epsilon$ tal que $(x - w_1) < (1 + \lambda)(x - w_1 - \epsilon)$, lo que es equivalente a $\epsilon < (x - w_1)\frac{\lambda}{1+\lambda}$, lo cual es posible ya que el lado derecho es mayor que cero.

Supogamos ahora que $w_1 < w_2 < x$. Para que esto sea un equilibrio entonces deberíamos tener que $w_1 = 0$. Pero entonces la empresa 2 siempre tiene incentivos para bajar su precio y aumentar sus pagos. Por otro lado, una situación en la cual $w_1 = w_2 = x$ no puede ser un equilibrio ya que una empresa ofreciendo un salario menor obtiene beneficios positivos en lugar de cero.

**Ejercicio 2**

*Solución:*

El pago esperado para $i$ es $\theta_i x_i E(s_j^*(\theta_j)) - x_i^3$. La condición de primer order nos da

$$\theta_i E(s_j^*(\theta_j)) = 3x_i^2,$$

entonces

$$x_i = \sqrt{\frac{\theta_i E(s_j^*(\theta_j))}{3}}$$

Entonces $a = 0$ y

$$E(s_j^*(\theta_j)) = bE\sqrt{\theta_j} = b\int_0^1 \sqrt{t}dt = b\frac{2}{3}x^{3/2}|_0^1 = 2b/3$$

Entonces

$$x_i = \sqrt{\frac{\theta_i 2b}{9}}$$

Tomando esperanzas:

$$Es_i^*(\theta_i) = 2b/3 = \sqrt{\frac{2b}{9}}\frac{2}{3}$$

Entonces:

$$b^2 = \frac{2b}{9}$$

o $b = 2/9$.

**Ejercicio 3**

a) H es una estrategia dominante para ambos jugadores.

b) No.

c) Sí.

d) Para que el perfil sea un equilibrio necesitamos que

$$5 \geq 8(1-\delta) + 4\delta$$

o lo que es equivalente

$$\delta \geq \frac{3}{4}.$$

El perfil no es un equilibrio perfecto en subjuegos, es fácil verificar que la estrategia en la cual un desvío de cualquiera de los dos jugadores dispara el castigo tiene como resultado un pago mayor.