Examen de Teoría de Juegos. Febrero 2015

Instrucciones: El examen tiene tres (3) ejercicios. Es sin material y dura tres horas. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas (no usen el tiempo para escribir un ensayo sobre los temas relacionados a la pregunta).

1. Dos amigos, llamados A y B, que comparten un cuarto deciden limpiarlo y para ello deben decidir cuánto esfuerzo poner en la limpieza. Denotamos el esfuerzo de i's por $e_i \geq 0$, $i = A, B$. El pago de cada uno de los amigos que resulta de unos esfuerzos (e_A, e_B) están dados por:

$$u_A(e_A, e_B) = k \log(e_A + e_B) - e_A$$
$$u_B(e_A, e_B) = \log(e_A + e_B) - e_B,$$

donde definimos $\log(0) = -\infty$. Asumamos que $k > 1$; para A un cuarto limpio es relativamente más importante que para B. Los amigos eligen el esfuerzo simultáneamente.

(a) Halla las funciones de mejor respuesta de cada jugador (en estrategias puras).

(b) Encuentra un equilibrio de Nash en estrategias puras.

Solución:

(a) Al derivar las funciones de pagos obtenemos:

$$e_A(e_B) = K - e_B$$

$$e_B(e_A) = 1 - e_A.$$

Debemos tener en cuenta que los esfuerzos deben ser mayores o iguales a cero, por lo tanto:

$$e_A(e_B) = K - e_B \text{ si } e_B \leq K \text{ y } e_A(e_B) = 0 \text{ si } e_B > K,$$

y

$$e_B(e_A) = 1 - e_A \text{ si } e_A \leq 1 \text{ y } e_B(e_A) = 0 \text{ si } e_A > 1.$$

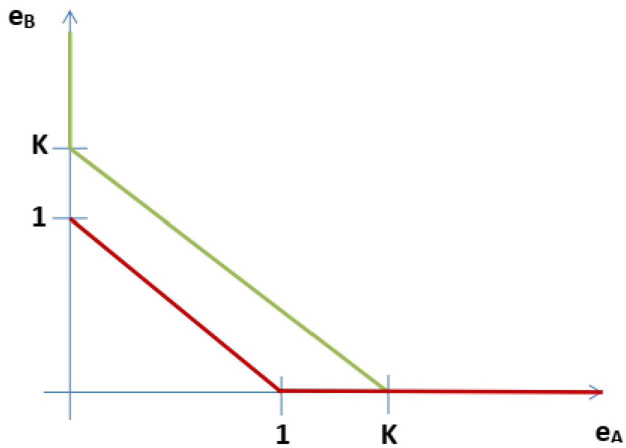

Figure 1: Funciones de reacción

(b) En la Figura 1 representamos ambas funciones de reacción. En verde la del jugador A y en rojo la del jugador B.
Observar que las funciones se cortan en $(e_A, e_B) = (k, 0)$; por lo tanto el vector anterior es el único equilibrio e Nash (el que le importa más la limpieza es el único que limpia).

2. Considera el juego G (ver Figura 2) infinitamente repetido, con δ el factor de descuento de los jugadores. Muestra que existe un δ suficientemente grande tal que (M, M) en cada período es el resultado de un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

   Sugerencia (informal): considera el siguiente perfil de estrategias definidas mediante dos estados, uno bueno y uno malo. Empiezan en el estado bueno, y siempre que estén en el estado bueno, juegan (M, M). Van al estado malo por exactamente un período cuando alguien se desvía de lo que dice la estrategia; luego de un período, vuelven al estado bueno. Cuando están el estado malo, juega (U, L). Observar que para salir del estado malo, deben jugar (U, L), en todo otro caso, se quedan por lo menos un período más.

   SOLUCIÓN:

   Usando el principio de una sola desviación, siguiendo la estrategia luego

		Jugador 2		
		L	M	R
	U	$0,0$	$0,0$	$1,2$
Jugador 1	M	$1,1$	$3,3$	$0,4$
	D	$1,1$	$4,1$	$9,9$

Figure 2: Juego G

de una historia en la que los jugadores estén en el estado bueno requiere:

$$\frac{3}{1-\delta} \geq 4 + \delta 0 + \delta^2 \frac{3}{1-\delta}.$$

Esto es lo mismo que $3 + \delta 3 \geq 4 + \delta 0$, i.e. $\delta \geq 1/3$.

Siguiendo la estrategia en el estado malo, requiere para el jugador 2:

$$0 + \delta \frac{3}{1-\delta} \geq 2 + \delta 0 + \delta^2 \frac{3}{1-\delta},$$

i.e. $0 + \delta 3 \geq 2 + \delta 0$, por lo tanto $\delta \geq 2/3$. Para el jugador 1 sólo requiere:$0 + \delta 3 \geq 1 + \delta 0$, lo que nos da $\delta \geq 1/3$ nuevamente.

Entonces, si $\delta \geq 2/3$ la estrategia es un SPNE.

3. (Una subasta en las que todos pagan). Considera el modelo de subasta que vimos en el curso, asumiendo que hay dos participantes: cada participante i tiene una valoración por el bien que se subasta de θ_i, y hacen una oferta b_i simultáneamente.

   Para $i = 1, 2$, θ_i se extrae de forma independiente de una distribución uniforme en $[0, 1]$.

   Supongamos que la oferta más alta obtiene el objeto que se subasta, pero todos los participantes pagan sus ofertas. Por lo tanto, los dos participantes pagan b_i al vendedor del objeto, sin importar si lo ganan o no.

   (a) Verifica que las estrategias:

   $$(b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)) = (\frac{\theta_1^2}{2}, \frac{\theta_2^2}{2})$$

   son un equilibrio bayesiano perfecto.
   Sugerencia, calcula el pago esperado del jugador 1, sabiendo que el jugador 2 sigue la estrategia $b_2^*(\theta_2)$ y que θ_2 se distibuye uniforme

en $[0,1]$*. Luego, halla* b_1 *que maximiza el pago esperado, y verifica que obtienes* $b_1^*(\theta_1)$*.*

(b) Calcula el ingreso esperado del vendedor del objeto (esto es, $\mathrm{E}(b_1^*(\theta_1) + b_2^*(\theta_2)))$.

SOLUCIÓN: Considerar el jugador 1, cuando se valoración es θ_1 y oferta b_1, su pago esperado es: $\theta_1 \Pr\{(1/2)\tilde{\theta}_2^{\,2} \leq b_1\} - b_1$. Por lo tanto, quiere maximizar: $\theta_1\sqrt{2b_1} - b_1$. La condición de primer orden es:

$$\theta_1 \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{2b_1}} - 1 = 0,$$

que tiene a $s_1^*(\theta_1)$ como solución. La condición de segundo orden se satisface.

El ingreso esperado es

$$\mathrm{E}(s_1^*(\theta_1) + s_2^*(\theta_2)) = 2\int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = 1/3.$$

Esto es lo que obtuvimos en el curso para las subastas de primer y segundo precio. Por lo tanto, esta es otra ilustración del *revenue-equivalence theorem.*