

EXAMEN TEORÍA DE JUEGOS. JUNIO 2015

INSTRUCCIONES: El examen comprende 4 ejercicios. Es sin material y dura tres horas. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas (no usen el tiempo para escribir un ensayo sobre los temas relacionados a la pregunta).

1. Considerar la siguiente variante del dilema del prisionero en la cual los jugadores tienen preferencias altruistas, es decir, la utilidad del otro jugador también les da utilidad. La matriz de pagos está definida por (C representa confesar, NC no confesar):

		J 2	
		NC	C
J 1	NC	$2 + 2\alpha, 2 + 2\alpha$	$3\alpha, 3$
	C	$3, 3\alpha$	$1 + \alpha, 1 + \alpha$

Figura 1: Pagos

con $\alpha \in [0, 1]$.

- a) ¿Para cuáles valores de α el juego es equivalente al dilema del prisionero clásico? (Esto es, (C, C) es el único equilibrio de Nash del juego en estrategias puras, y el outcome (NC, NC) es preferido por los dos jugadores al outcome de equilibrio).
 - b) Para los valores de α distintos a los del punto anterior, hallar todos los equilibrios de Nash del juego en estrategias puras.
2. Dos amigos, Federico y Juan están pensando ejecutar un proyecto productivo. Federico provee el capital, denotado como $K \in [0, 1]$, y Juan provee el trabajo, denotado como $L \in [0, 1]$. Los ingresos del proyecto, que están dados por \sqrt{KL} , los comparten en partes iguales. El costo del capital para Federico es $\frac{K}{4}$, y el costo de trabajo para Juan es $\frac{L^2}{4}$. En suma, los pagos de Federico y Juan están definidos por: $\frac{1}{2}\sqrt{KL} - \frac{K}{4}$ y $\frac{1}{2}\sqrt{KL} - \frac{L^2}{4}$, respectivamente. Todo lo mencionado es de conocimiento común.
 - a) Hallar la función de mejor respuesta de cada jugador, y graficarlas.

- b) Hallar todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.
 - c) Supongamos que antes de comenzar el proyecto, Federico y Juan pueden discutir cuánto aportará cada uno. Si en primer lugar Juan le propone a Federico que él aportará $L = \frac{1}{4}$, ¿cuánto propondrá Federico como aporte de K ?, ¿y cuál será la nueva propuesta de Juan de cantidad de trabajo a la propuesta de Federico? ¿Cómo terminará este procedimiento?
3. Considerar el siguiente juego de provisión de un bien público con dos jugadores e información incompleta. Cada individuo debe elegir si contribuir o no al bien público, y el bien público es provisto si y sólo por lo menos un jugador contribuye. El valor del bien para el jugador i es v_i , para $i = 1, 2$ (y es información privada del individuo). Además, v_i se distribuye idéntica e independientemente entre los individuos, según una distribución uniforme en $[0, 1]$. El pago total de un jugador es su valoración del bien, si es provisto (0 si no es provisto), menos su contribución (que es igual a $c > 0$) en el caso que contribuya, o 0 si no contribuye. Hallar un equilibrio de Nash Bayesiano simétrico en el cual cada jugador i contribuye si y sólo si v_i es mayor o igual a cierto umbral v^* (en particular, esto implica hallar v^*).

Sugerencia:

- a) *Suponer que un jugador, digamos el 2, usa la siguiente estrategia: contribuye si y sólo $v_2 > v^*$, y no contribuye en otro caso. Calcular el pago del jugador 1 si él contribuye contribuye (observar que no es un pago esperado). Calcular el pago esperado si no contribuye.*
- b) *Plantear la condición que implica que el jugador 1 contribuye, y observar que es equivalente a que v_1 sea mayor o igual a cierto umbral.*
- c) *En equilibrio el umbral hallado en el punto anterior debe ser igual a v^* , sabiendo esto, hallar v^* .*

4. Considera el siguiente juego de movidas simultáneas entre una empresa y un trabajador. El trabajador debe decidir entre ejercer esfuerzo en su tarea o no. Por su parte, la firma tiene que decidir si le paga o no. Si el trabajador ejerce esfuerzo, entonces la producción es $y > 0$, de lo contrario es 0. Ejercer un esfuerzo tiene un costo para el trabajador igual a $c < \frac{1}{2}y$. La firma puede decidir si pagarle un salario $\frac{1}{2}y$ o no pagarle. Observar que si la firma decide pagarle, entonces debe hacerlo aún en el caso que el trabajador no ejerza esfuerzo.
- a) Plantear la matriz de pagos del juego y hallar los equilibrios de Nash en estrategias puras.
 - b) Considerar el juego anterior repetido infinitas veces con factor de descuento δ . Encontrar los valores de δ para los cuales existe un equilibrio perfecto por subjuegos en el cual el trabajador se esfuerza y la firma le paga en cada período.