# Examen Teoría de Juegos. Agosto 2017

INSTRUCCIONES: El examen comprende 4 ejercicios. Es sin material y tiene una duración de tres horas. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas (no use el tiempo para escribir un ensayo sobre los temas relacionados a la pregunta). ¡Suerte!

1. Considere el siguiente juego:

| | | J 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $L$ | $C$ | $R$ |
| | $T$ | $3, 2$ | $4, 0$ | $1, 1$ |
| J 1 | $M$ | $2, 0$ | $3, 3$ | $0, 0$ |
| | $D$ | $1, 1$ | $0, 2$ | $2, 3$ |

   *a*) Aplicar el procedimiento de eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.
   *b*) Establecer los supuestos acerca de la racionalidad y conocimiento correspondiente a cada eliminación.
   *c*) Hallar las estrategias racionalizables.
   *d*) Hallar **todos** los equilibrios de Nash (incluidos los equilibrios en estrategias mixtas).

2. Considere un mercado con dos firmas competitivas $N = \{1, 2\}$, y dos períodos. En el período 1, cada firma $i$ elige simultáneamente su costo marginal de producción $c_i \in [0, 1]$. En el período 2, cada firma conoce el costo de producción de la otra firma, y luego eligen simultáneamente la cantidad a producir $q_i \geq 0$. Los pagos de la firma $i$ están dados por:

$$\pi_i(q_i, q_j, c_i) = q_i[P(q_i + q_j) - c_i] - (1 - c_i)^2 \quad i \neq j.$$

   donde $P(q_i + q_j)$ es la demanda del mercado, dado por $P(q_i + q_j) = max\{2 - (q_1 + q_2), 0\}$.

   *a*) Hallar un equilibrio de Nash perfecto por subjuegos (*Sugerencia: usar inducción hacia atrás.*) Describir las estrategias de equilibrio y el outcome del juego en equilibrio (cantidades producidas y costo marginal elegido).
   *b*) Considerar la siguiente modificación al juego anterior. Incialmente la firma 1 determina su costo marginal $c_1$, luego la firma 2 observa $c_1$ y elige $c_2$. Finalmente, la firma 1 observa $c_2$ y las firmas compiten eligiendo las cantidades a producir simultáneamente, como antes. Encontrar un equilibrio de Nash perfecto por subjuegos. Describir las estrategias de equilibrio y el outcome del juego en equilibrio (cantidades producidas y costo marginal elegido).

3. Considere el siguiente juego $G$:

| | | J 2 | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $L$ | $C$ | $R$ |
| | $T$ | $5,6$ | $2,2$ | $2,3$ |
| J 1 | $M$ | $6,3$ | $3,4$ | $0,3$ |
| | $D$ | $2,1$ | $1,0$ | $0,1$ |

Figura 1: $G$

   *a*) Hallar los equilibrios de Nash perfectos por subjuegos del juego repetido $T < \infty$ veces que tiene por stage game el juego $G$, esto es $G(T, \delta)$.

   *b*) Considere el juegos $G$ repetido infinitas veces, $G(\delta)$. Describir un perfil de estrategias gatillo ("trigger strategy") que da un pago en equilibrio perfecto por subjuegos de $(5, 6)$ en cada período. Hallar el mínimo $\delta$ tal que las estrategias anteriores constituyen un equilibrio perfecto por subjuegos.

4. En una universidad hay $n$ estudiantes. Cada estudiante $i$ elige simultáneamente una cantidad $x_i \geq 0$ de datos para enviar a través de la red. La velocidad de la red es inversamente proporcional al total de datos enviados. Los pagos del estudiante $i$ son:

$$\theta_i x_i - x_i \left( \sum_{j=1}^{n} x_j \right),$$

donde $\theta_i \in \{1, 2\}$ es un parámetro que es información privada del jugador $i$. Para cada $j \neq i$, independiente de $\theta_j$, el estudiante $j$ asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ a $\theta_i = 1$ y probabilidad $\frac{1}{2}$ a $\theta_i = 2$. Toda la información anterior es de conocimiento común.

Hallar un equilibrio Bayesiano **simétrico** de la siguiente forma:

$$x_i(\theta_i) = \begin{cases} 0 & si\ \theta_i = 1 \\ y > 0 & si\ \theta_i = 2 \end{cases},$$

para $i \in \{1, \ldots, n\}$. (Se debe hallar el valor de $y$ y una condición sobre $n$, tal que un perfil en el cual cada estudiante siga la estrategia anterior sea un equilibrio Bayesiano).