Examen Teoría de Juegos. Agosto 2017. Solución.

1. *a*) Para el jugador 1, la estrategia T domina a M, por lo tanto eliminamos M. Luego, para el jugador 2, la estrategia R domina a C, entonces puede eliminarse C. Se obtiene:

		J 2	
		L	R
J 1	T	$3,2$	$1,1$
	D	$1,1$	$2,3$

   b) Para la primera eliminación se necesita asumir que el jugador 1 es racional, y por lo tanto no jugaría un estrategia estrictamente dominada. Para la segunda eliminación, se necesita asumir que el jugador 2 es racional y que sabe que el jugador 1 es racional.

   c) Las estrategias racionalizables son $\{T, B\}$ para el jugador 1, y $\{L, R\}$ para el jugador 2.

   d) Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (T, L) y (D, R). El equilibrio de Nash en estrategias mixtas es:

$$\left[\sigma_1(T) = \frac{2}{3}, \sigma_1(M) = 0, \sigma_1(D) = \frac{1}{3}; \sigma_2(L) = \frac{1}{3}, \sigma_2(C) = 0, \sigma_2(R) = \frac{2}{3}\right].$$

   Para hallar el EN en estrategias mixtas se puede partir del juego reducido anterior ya que sabemos que en equilibrio un jugador no usa una estrategia estrictamente dominada con probabilidad positiva.

2. *a*) Los pagos de la firma 1 están dados por:

$$\pi_1 = q_1[2 - (q_1 + q_2) - c_1] - (1 - c_1)^2.$$

   Una vez que c_1 y c_2 están fijados, el valor óptimo de q_1 está dado por la condición de primer orden que se obtiene al maximizar los pagos:

$$q_1 = \frac{1}{2}(2 - q_2 - c_1).$$

   De la misma forma, se encuentra el valor óptimo de q_2:

$$q_2 = \frac{1}{2}(2 - q_1 - c_2).$$

   Las cantidades de equilibrio están dadas por la intersección de las expresiones anteriores:

$$q_1(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_2 - 2c_1),$$

$$q_2(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_1 - 2c_2).$$

Al sustitutir las cantidades anteriores en la función de pagos de la firma 1 se obtiene:

$$\pi_1(q_1(c_1, c_2), q_2(c_1, c_2)) = \frac{1}{9}(2 + c_2 - 2c_1)^2 - (1 - c_1)^2.$$

El valor óptimo de c_1 está dado por $5c_1 = 5 - 2c_2$. De la misma forma para la firma 2 se obitiene $5c_2 = 5 - 2c_1$. Por lo tanto, el nivel de equilibrio del costo marginal está dado por:

$$c_1^* = c_2^* = \frac{5}{7},$$

y el nivel de equilibrio de las cantidades:

$$q_1^* = q_2^* = \frac{3}{7}.$$

Las estrategias de equilibrio son:
para la firma 1:

$$c_1 = \frac{5}{7}, \quad q_1(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_2 - 2c_1),$$

y para la firma 2:

$$c_2 = \frac{5}{7}, \quad q_2(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_1 - 2c_2).$$

b) Nuevamente usamos inducción hacia atrás. En el período final, en el cual las firmas eligen simultáneamente las cantidades a producir, es idéntico al juego anterior. Por lo tanto las elecciones óptimas están dadas por:

$$q_1(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_2 - 2c_1),$$

$$q_2(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_1 - 2c_2).$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la función de pagos de la firma 2, y maximizando, se obtiene:

$$c_2(c_1) = 1 - \frac{2}{5}c_1.$$

Por último, sustimos las expresiones anteriores en la función de pagos de la firma 1, y resulta:

$$\pi_1(c_1) = \left(1 - \frac{4}{5}c_1\right)^2 - (1 - c_1)^2.$$

El valor óptimo de c_1 es entonces: $c_1^* = \frac{5}{9}$. Por lo tanto, las estrategias de las firmas en el equilibrio perfecto por subjuegos son las siguientes.

Para la firma 1:

$$c_1 = \frac{5}{9}, \quad q_1(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_2 - 2c_1),$$

y para la firma 2:

$$c_2 = 1 - \frac{2}{5}c_1, \quad q_2(c_1, c_2) = \frac{1}{3}(2 + c_1 - 2c_2).$$

Por último el outcome del juego en equilibrio es:

$$c_1^* = \frac{5}{9}, c_2^* = \frac{7}{9}, q_1^* = \frac{5}{9}, q_2^* = \frac{1}{3}.$$

3. *a*) El único equilibrio de Nash del stage game G es el perfil (M, C). Por lo tanto, el único SPE del juego repetido finitas veces es jugar (M, C) en cada período.

   b) Considerar la estrategia según la cual los jugadores juegan (T, L) en el primer período. En el resto de los períodos juegan (T, L) si (T, L) ha sido jugado en cada uno de los períodos anteriores. De lo contrario, jugan (M, C). Para probar que el perfil es un SPE, aplicamos el "single deviation principle".

   En el estado castigo ningún jugador tiene incentivos a desviarse de (M, C), ya que este es un EN del stage game. Veamos que ningún jugador tiene incentivos a desviarse de jugar (T, L). El jugador 2 claramente no tiene incentivos ya que L es su mejor respuesta a T. Si el jugador 1 se desvía y juega M (claramente jugar D no es rentable), incrementa su pago en 1 pero pierde 2 desde el siguiente período en adelante. Por lo tanto, el desvío no es rentable si:

$$1 \geq 2\delta + 2\delta^2 + \ldots = \frac{2\delta}{1 - \delta},$$

   lo que es equivalente a $\delta \geq \frac{1}{3}$.

   Por lo tanto, el perfil anterior es un SPE para $\delta = \frac{1}{3}$.

4. El pago esperado del jugador i de enviar x_i es:

$$\mathbb{E}\left[\theta_i x_i - x_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_j(\theta_j)\right)\right] =$$

$$\theta_i x_i - x_i\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[x_j(\theta_j)]\right).$$

Como el jugador i conoce θ_i, entonces $\mathbb{E}[x_i(\theta_i)] = x_i$. Por lo tanto al derivar la expresión anterior con respect a x_i se obtiene:

$$\theta_i - 2x_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{E}[x_j(\theta_j)].$$

Ahora calculamos para cada j, la $\mathbb{E}[x_j(\theta_j)]$. Con probabilidad $1/2$, $\theta_j = 1$ y tenemos que $x_j(\theta_j = 1) = 0$. Con probabilidad $1/2$, $\theta_j = 2$ y por lo tanto $x_j(\theta_j = 2) = y$. En suma,

$$\mathbb{E}[x_j(\theta_j)] = \frac{y}{2}, \ \forall j \neq i.$$

Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene:

$$\theta_i - 2x_i - \frac{(n-1)y}{2}.$$

Igualando la expresión anterior a cero se obtiene:

$$x_i = \frac{\theta_i}{2} - \frac{(n-1)y}{4}.$$

Cuando $\theta_i = 2$, entonces debemos obtener $x_i = y$, por lo que:

$$1 - \frac{(n-1)y}{4} = y,$$

o lo que es equilvalente $y = \frac{4}{n+3}$.

Por último, cuando $\theta_i = 1$, tenemos una solución de esquina ($x_i = 0$), por lo que la derivada en ese punto debe ser negativa o cero (ya sustituimos y por el valor hallado):

$$1 - \frac{(n-1)2}{n+3} \leq 0,$$

o lo que es equivalente $n \geq 5$.