Examen Teoría de Juegos. Agosto 2018. Solución.

1. *a*) Los equilibrios de Nash en estrategias puras son los perfiles en los cuales sólo un participante invierte.

   b) Buscamos un EN en el cual el jugador 1 no invierte, y los otros dos lo hacen con probabilidad p: (n, p, p).
   El J1 obtiene en este perfil un pago de
   $$[p^2 + 2p(1-p)]2 + (1-p)^2.$$
   (Con probabilidad p^2 los otros dos jugadores invierten, y con probabilidad $2p(1-p)$ sólo uno de ellos lo hace. En ambos cases J1 gana 2. Con probabilidad $(1-p)^2$ ninguno de los otros dos invierte, y entonces tiene un pago de 1.)
   Lo anterior es igual a:
   $$-p^2 + 2p + 1.$$
   Por otro lado, si J1 decide invertir, entonces con probabilidad p^3 los 3 participantes invierten, obteniendo un pago de $\frac{1}{3}1.25+\frac{2}{3}2$. Con probabilidad $p(1-p)$ sólo uno de los otros dos participantes invierte, y por lo tanto el tiene un pago esperado de
   $$-\frac{1}{4}p^2 + \frac{3}{4}p + \frac{5}{4}.$$
   En equilibrio debemos tener que
   $$-p^2 + 2p + 1 \geq -\frac{1}{4}p^2 + \frac{3}{4}p + \frac{5}{4}. \tag{1}$$
   Veamos ahora el caso de los otros jugadores. Como juegan una estrategia mixta, deben ser indiferentes entre invertir y no invertir. Calculamos ambos pagos esperados, y los igualamos para hallar un p. El pago esperado de no invertir es $p+1$, mientras que el de invertir es $\frac{5}{4}+\frac{3}{8}p$. Igualando las expresiones, hallamos $p = \frac{2}{5}$. Sustituyendo este valor en (1) observamos que se verifica la condición.

   c) En los equilibrios del punto a) se invierte con probabilidad 1. En el equilibrio en el punto b), la probabilidad de que se invierta es $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{16}{25}$.

2. *a*) Los equilibrios de Nash en estrategias puras son: $\{(P_1, P_2), (R_1, R_2), (S_1, S_2)\}$.

   b) Primero notar que luego de cualquier historia, en el segundo período se juega un EN. Como el juego es simétrico, verificamos sólo para un jugador. El pago de seguir la estrategia es $4 + 2 = 6$, y el pago por desviarse (jugando P_i) en el primer período es x. Por lo tanto, el perfil de estrategias en un EN si $x \leq 6$.

3. Consideremos el siguiente perfil. El jugador 1 comienza jugando T y el jugador 2 L. Juegan lo mismo hasta que alguno se desvía, luego de lo cual juegan M y C de ahí en adelante.

   El perfil es un SNE. Luego del desvío juegan un NE para siempre. Por lo tanto, sólo queda probar que no hay incentivos a desviarse en el path de equilibrio. El jugador 1 claramente no tiene incentivos. El jugador 2 si se desvía obtiene 2 en ese período, y 0 de ahí en adelante. Si se mantiene en la estrategia, obtiene 1 para siempre. Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$\frac{1}{1-\delta} \geq 2 \iff \delta \geq \frac{1}{2}.$$

4. El conjunto de estrategias del jugador 1 es $\{e_1 \geq 0\}$. El conjunto de estrategias del jugador 2 es $\{(e_2^L \geq 0, e_2^H \geq 0)\}$, esto es, un esfuerzo para cada uno de los dos tipos posibles.

   Calculamos la función de mejor respuesta para cada uno de los dos tipos del jugador 2:

$$e_2^L(e_1) = \frac{1+e_1}{2},$$

$$e_2^H(e_1) = \frac{1+e_1}{4}.$$

   Ahora, vamos al jugador 1. Con probabilidad p sabe que el jugador 2 es de costo bajo y por lo tanto usará la primera función de respuesta, y con probabilidad $1-p$ es de costo alto y usará la segunda función de respuesta. Por lo tanto, el jugador 1 maximiza la siguiente función de pagos:

$$e_1\left[1 + p\left(\frac{1}{2}(1+e_1)\right) + (1-p)\left(\frac{1}{4}(1+e_1)\right) - e_1\right].$$

   Resolviendo el problema de maximización anterior y sustituyendo el valor de e_1^* hallado en e_2^L y e_2^H, se obtiene el equilibrio:

$$e_1^* = \frac{5+p}{2(3-p)},$$

$$e_2^* = \left(\frac{11-p}{4(3-p)}, \frac{11-p}{8(3-p)}\right).$$

5. Existe un único PBE dado por: $[(R, R), (u, d), p = 0.5, q \geq \frac{1}{3}]$, donde p es la probabilidad según el jugador 2 de estar en el nodo de arriba luego de observar R y q la probabilidad según el jugador 2 de estar en el nodo de arriba luego de observar L.