dECON
Facultad de Ciencias Sociales
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Examen Teoría de Juegos. Julio 2019

Instrucciones: El examen comprende 4 ejercicios y tiene una duración de tres horas. Todos los ejercicios tienen la misma ponderación. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas.¡Suerte!

1. Una contienda (*contest*). Dos individuos, A y B, compiten por un premio de valor $V > 0$. Si A hace un esfuerzo $x \geq 0$, y B hace un esfuerzo $y \geq 0$, entonces la probabilidad de que A gane es $\frac{x}{(x+y)}$, y la probabilidad de que B gane es $\frac{y}{(x+y)}$ (si no hay esfuerzo, entonces la probabilidad es 0). El esfuerzo tiene un costo. En particular, un nivel de esfuerzo x representa para el individuo A un costo de ax, mientras que un nivel de esfuerzo y representa para el individuo B un costo de by, $a, b > 0$. Supongamos que cada individuo maximiza la utilidad esperada (probabilidad de ganar el premio por V) menos el costo del esfuerzo: $\frac{x}{(x+y)}V - ax$ para A, y $\frac{y}{(x+y)}V - by$ para B.

   a) Hallar un EN del juego en estrategias puras. ¿Cómo depende el nivel de esfuerzo de equilibrio del valor de V, a y b?

   El único EN en estrategias puras es: $x^* = \frac{bV}{(a+b)^2}$, $y^* = \frac{aV}{(a+b)^2}$. Observar que si aumenta el valor del premio el esfuerzo en equilibrio es mayor. Si aumenta el costo del esfuerzo propio, disminuye el esfuerzo en equilibrio. Observar además que el individuo con menor costo es que el que realiza el mayor esfuerzo. Si $a > b$, B realiza más esfuerzo en equilibrio que A, y además un aumento de a produce una disminución del esfuerzo del individuo B.

   b) Consideremos el caso de $V = a = b = 1$. Hallar un EN. ¿Es el equilibrio Pareto eficiente?

   Para esos valores particulares tenemos: $x^* = y^* = \frac{1}{4}$. Observar que ambos están mejor si $x = y \in (0, \frac{1}{4})$.

2. Considera el juego G repetido infinitas veces ($G(\delta)$):

	C	D	E
C	$1,1$	$-1,2$	$-4,-4$
D	$2,-1$	$0,0$	$-4,-4$
E	$-4,-4$	$-4,-4$	$-5,-5$

Figura 1: G

a) Hallar un perfil de estrategias tipo gatillo (trigger) que produza (C, C) en cada período, y un rango de δ para el perfil sea un EN.

La idea del perfil es que cada jugador comienza jugando C*, y si alguno se desvía, ambos juegan* D *para siempre. Este es un* NE *si:*

$$\frac{1}{1-\delta} \geq 2 \iff \delta \geq \frac{1}{2}.$$

b) Considera la siguiente estrategia:

Fase Cooperación (Inicial): Jugar C. Seguir en esta fase si no hay ningún desvío. De lo contrario, moverse a la fase de castigo.

Fase Castigo: Jugar E. Moverse a la fase de cooperación si no hay desvío. De lo contrario, seguir en la fase de castigo.

¿Para qué valores de δ un perfil en el cual cada jugador sigue la estrategia anterior es un EN? Comparando con el punto anterior, ¿qué equilibrio se sostiene para más jugadores? Explicar y dar una intuición.

Hay que considerar los incentivos en cada fase. En la fase de cooperación, no hay incentivos a desviarse sii:

$$\frac{1}{1-\delta} \geq 2 + (-5)\delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots$$

lo que es equivalente a:

$$6\delta^2 - 7\delta + 1 \leq 0,$$

lo cual se cumple para $\delta \geq \frac{1}{6}$.

En la fase de castigo, no hay incentivos a desviarse sii:

$$-5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots \geq -4 - 5\delta + \delta^2 + \delta^3 + \ldots$$

lo que es equivalente a:

$$6\delta^2 - 7\delta + 1 \leq 0,$$

lo que es equivalente a $\delta \geq \frac{1}{6}$.

Por lo tanto, el perfil definido es un EN sii $\delta \geq \frac{1}{6}$. El número de jugadores para los cuales el perfil es un equilibrio es mayor en este caso que en punto anterior. Esto es, hay valores de δ para los cuales este perfil es un EN pero no lo es el perfil anterior. La intuición es que en el primer perfil la estrategia implica un mayor castigo, por lo que necesitamos que les importe el futuro más que en este punto, los incentivos a seguir la estrategia son "mayores" en este caso.

3. Supongamos una subasta en sobre cerrado y de primer precio (*a first-price sealed bid auction*), con dos jugadores. Consideremos los siguientes dos casos.

   a) La valoración del jugador i por el bien es: $v_i = t_i + \frac{1}{2}$. Cada jugador conoce t_i (y por lo tanto su propia valoración v_i), pero no la valoración del otro. Es de conocimiento común que cada t_i se distribuye de forma independiente según una distribución uniforme sobre $[0, 1]$.

   Encontrar un BNE (equilibrio bayesiano) en el cual cada jugador sigue una estrategia: $b_i(t_i) = at_i + c$, donde b_i es la oferta del jugador i, $a, c > 0$.

   Planteamos el pago esperado del jugador i:

$$U_i = (v_i - b_i)Prob(b_i > b_j) = (t_i + \frac{1}{2} - b_i)Prob(b_i > at_j + c) =$$
$$(t_i + \frac{1}{2} - b_i)Prob\left(t_j < \frac{b_i - c}{a}\right) = (t_i + \frac{1}{2} - b_i)\left(\frac{b_i - c}{a}\right).$$

   Maximizando la expresión anterior con respecto a b_i obtenemos:

$$b_i^*(t_i) = \frac{c + t_i + \frac{1}{2}}{2}.$$

   Para que $b_i(t_i) = at_i + c$ se óptima se debe cumplir: $a = c = \frac{1}{2}$. Por lo tanto el perfil:

$$(b_1(t_1), b_2(t_2)) = \left(\frac{t_1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{t_2}{2} + \frac{1}{2}\right) \text{ es un BNE.}$$

   b) Supongamos ahora que la valoración cada jugador por el bien es $v = t_1 + t_2$ (ambos jugadores tiene la misma valoración). Pero cada jugador i observa sólo t_i. Como antes, cada t_i se distribuye de forma independiente según una distribución uniforme sobre $[0, 1]$.

   Encontrar un BNE (equilibrio bayesiano) en el cual cada jugador sigue una estrategia: $b_i(t_i) = at_i$, donde b_i es la oferta del jugador i, $a > 0$.

   Observar que la valoración del bien en este caso ($t_1 + t_2$) no es conocida (el jugador i sólo observa t_i), por lo que se tiene que tomar su valor esperado condicional a ganar.
   Planteamos el pago esperado del jugador i: (observar que ahora la valoración no es conocida por los jugadores, lo único que observan es una señal t_i y por lo tanto tiene que tomar el valor esperado)

$$U_i = \mathbb{E}[v_i - b_i | b_i > b_j] Prob(b_i > b_j) = (t_i + \mathbb{E}[t_j | b_i > at_j] - b_i) Prob(b_i > at_j) =$$

$$\left(t_i + \mathbb{E}\left[t_j | t_j < \frac{b_i}{a}\right] - b_i\right) Prob(t_j < \frac{b_i}{a})$$

$$\left(t_i + \frac{b_i}{2a} - b_i\right) \frac{b_i}{a}$$

Maximizando la expresión anterior con respecto a b_i obtenemos:

$$b_i^*(t_i) = \frac{a}{2a-1} t_i.$$

Para que $b_i(t_i) = at_i$, se debe cumplir que $a = 1$.
Por lo tanto el perfil:

$$(b_1(t_1), b_2(t_2)) = (t_1, t_2) \text{ es un BNE.}$$

c) Comparar los equilibrios hallados en los puntos anteriores y comentar. En particular, ¿cuál es la diferencia entre las dos subastas?

En el equilibrio de la primera parte los jugadores ofrecen más que en la segunda parte: $\frac{t_i}{2} + \frac{1}{2} > t_i, \forall t_i \in [0, 1]$. *Esto se conoce como underbidding, y es un fenómeno de los subastas de common value. La razón es que el valor esperado del objeto es menor condicional a ganar en la subasta de common value, mientras que este valor no depende de ganar o no en la subasta de independent value.*

4. Considere el siguiente juego de señalización de la Figura 2.

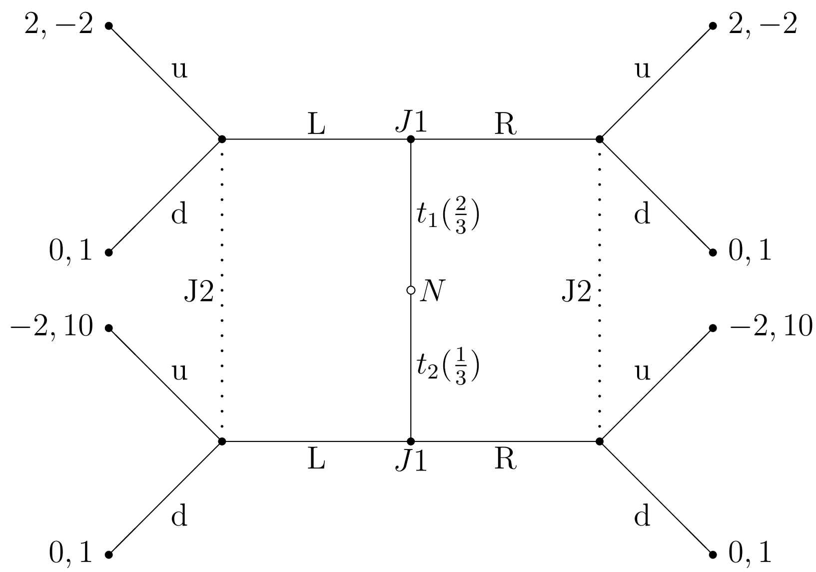

Figura 2: Juego de señalización

a) Probar que no existe un PBE separador.

b) Hallar un PBE pooling en el que ambos tipos jueguen L.

El PBE es $[(L, L), (u, u), Prob(t_1|L) = \frac{2}{3}, Prob(t_1|R) \leq \frac{3}{4}]$.