dECON
Facultad de Ciencias Sociales
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Examen Teoría de Juegos. Febrero 2020

Instrucciones: El examen comprende 4 ejercicios y tiene una duración de dos horas. Todos los ejercicios tienen la misma ponderación. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas.¡Suerte!

1. Hay $n \geq 1$ socios que tienen una firma. Cada socio i elige un nivel de esfuerzo $x_i > 0$, que resulta en un beneficio de la firma igual a $\ln(\sum_{i=1}^{n} x_i)$. Los beneficios de la firma se distribuyen en partes iguales entre los socios, y cada socio tiene un costo cuadrático por el esfuerzo. Por lo tanto, la utilidad de cada socio i es:

$$\frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{x_i^2}{2}.$$

   a) Supongamos que cada socio decide su esfuerzo x_i sin observar el esfuerzo de los otros. Hallar un equilibrio de Nash del juego. Â¿Cuál es el nivel de esfuerzo agregado en equilibrio? (Sugerencia: buscar un equilibrio simétrico.)
   Respuesta: $x_i = \frac{1}{n}\ \forall i$.

   b) Supongamos que los socios se pueden comprometer exante a un nivel de esfuerzo común $\hat{x}$. Sea $\hat{x}$ el nivel de esfuerzo individual que maximiza la suma se las utilidades de los socios. Hallar $\hat{x}$, y comparar con lo hallado en el punto anterior. Comentar.
   Respuesta: $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Considera el juego G con los siguientes pagos:

	C	D	E
C	$4, 4$	$5, 3$	$9, 3$
D	$3, 5$	$6, 6$	$9, 2$
E	$3, 9$	$2, 9$	$8, 8$

Figura 1: Juego G

a) Encontrar dos equilibrios de Nash en estrategias puras del juego G.
Respuesta: $(C, C), (D, D)$.

b) Suponga que el juego anterior se juega dos veces, y cada jugador tiene un factor de descuento de $\delta = 1$. Encontrar un equilibrio perfecto por subjuegos que tenga como resultado pagos de 14 para cada jugador.

Respuesta: La estrategia es: juego E en el primer período. Si el resultado del juego en el período $t = 1$ fue (E, E), entonces juego D, de lo contrario juego C. En el segundo período siempre se juega un EN por lo que no hay incentivos a desviarse. En el primer período: si siguen la estrategia tienen un pago de 14, y si se desvía un jugador obtiene 13, por lo tanto no tienen incentivos a desviarse.

3. Hay tres períodos en este juego: $t = 1, 2, 3$, y dos jugadores: el gobierno y un trabajador.

En $t = 1$ el trabajador realiza un esfuerzo para construir un nivel de capital $K \in [0, \infty)$ (el nivel de capital es igual al esfuerzo realizado).

En $t = 2$ el gobierno fija las tasas de impuesto $\tau_K \in [0, 1]$, $\tau_e \in [0, 1]$ al capital y al trabajo.

En $t = 3$ el trabajador elige el nivel de esfuerzo e_2 para producir Ke_2.

Los pagos para el gobierno y para el trabajador son:

$$U_G = \tau_K K + \tau_e K e_2,$$

$$U_W = (1 - \tau_e)Ke_2 + (1 - \tau_K)K - \frac{K^2}{2} - \frac{e_2^2}{2},$$

respectivamente.

Hallar un equilibrio perfecto por subjuegos usando inducción hacia atrás. ¿Es el equilibrio hallado Pareto eficiente? (Considerar $K = \frac{4}{3}, \tau_e = \frac{1}{2}, \tau_K = \frac{1}{4}, e_2 = \frac{2}{3}$). Explicar.

Respuesta: EL SPNE es $e_2^* = (1 - \tau_e)K, \tau_K = 1$, si $K > 0$ y cualquier tasa de lo contrario, $\tau_e = \frac{1}{2}$, si $K > 0$ y cualquier tasa de contrario, y $K = 0$. El equilibrio no es eficiente.

4. Supongamos que usted quiere comprar un auto usado, el cual puede ser bueno o malo. Un buen auto tiene un valor de H mientras que un mal auto de L. Usted no puede saber si el auto que le ofrecen es bueno o malo, pero cree que una proporción q de los autos del mercado son de buena calidad. El auto que le interesa tiene un precio fijo de p. El vendedor sabe la calidad del auto. El auto de mala calidad

requiere un gasto de c para que parezca bueno. El vendedor decide si lo vende o no, y usted decide si lo compra o no.

Suponga $H > p > L$.

Considere el juego de la Figura 2 que resume el problema anterior, donde $J1$ es el vendedor, $J2$, el comprador, C es comprar, NC no comprar.

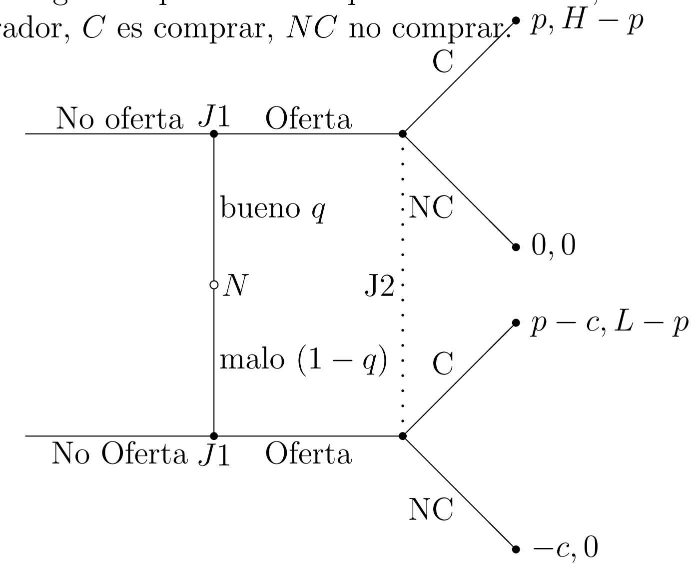

Figura 2: Ejercicio 4

a) ¿Bajo qué condiciones existe un PBE pooling en el que ambos tipos ofertan?

Respuesta: $p \geq c$, $V \geq 0$, siendo V el valor esperado del auto: $q(H-p)+(1-q)(L-p)$.

b) Suponga que $p \leq c$, hallar un PBE en el que sólo el de la calidad buena oferta.

c) ¿Bajo qué condiciones existe un PBE pooling en el ninguno de los dos tipos oferta? Explicar las condiciones intuitivamente.

Respuesta: $V < 0$.