dECON
Facultad de Ciencias Sociales
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Examen Teoría de Juegos. 20 Julio 2020

Instrucciones: El examen comprende 3 ejercicios y tiene una duración de dos horas. Todos los ejercicios tienen la misma ponderación. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas.¡Suerte!

1. Considera el juego G_1 con los siguiente pagos.

	D	E
A	$3,2$	$2,1$
B	$\gamma,3$	$\gamma+1,2$
C	$1,1$	$0,2$

Figura 1: Juego G_1

   a) Asumiendo que $\gamma = 3$, calcula los equilibrios de Nash.

   Respuesta: Existen 2 equilibrios de Nash en estrategias puras: (A, D) y (B, D).

   b) Considera el mismo juego pero ahora asume que γ es observada sólo por el jugador 1. En particular, asume que $\gamma \in \{2, 3\}$, y que la probabilidad que $\gamma = 3$ es igual a $p \in (0, 1)$. Describir las estrategias de cada jugador, y calcular los equilibrios bayesianos para cualquier p.

   Respuesta: existen dos equilibrios de bayesianos: (AA, D) y (AB, D), donde para el jugador 1 el primer componente es lo que juega si $\gamma = 2$.

2. Definimos el juego G_2 con los siguiente pagos.

   a) Considera el juego G_2 jugado dos veces, con factor de descuento δ, esto es, $G_2(2, \delta)$. Describir el conjunto de estrategias de cada jugador y hallar los SPE.

   Respuesta: El conjunto de estrategias de cada jugador es: $\{A, B, C\}\times\{A, B, C\}^9$, donde el primer conjunto especifica qué acción toma cada jugador $t = 1$, y el segundo especifica una acción para cada uno de los 9 resultados posibles del juego en $t = 1$. Ejemplo: $(C, A, A, A, A, B, B, B, C, A)$. El juego tiene un único equilibrio de Nash; (B, B), por lo que el único SPE es $(B, B, B, B, B, B, B, B, B, B)$.

	A	B	C
A	$4,4$	$0,5$	$1,0$
B	$5,0$	$3,3$	$0,0$
C	$0,1$	$0,0$	$-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$

Figura 2: Juego G_2

b) A partir del juego G_2, considera el juego en el que sólo las acciones A y B pueden ser jugadas, el cual se repite infinitas veces con factor de descuento δ. ¿Para qué valores de δ puede el vector de pagos $(4,4)$ sostenerse como los pagos de un SPE? Sugerencia: utilizar una estrategia de tipo gatillo con un castigo del cual no se vuelve (escribir el perfil de estrategias usadas por los jugadores).

Respuesta: Los jugadores no se desvían si: $4 \geq 5(1-\delta)+3\delta \iff \delta \geq \frac{1}{2}$.

c) Ahora supongamos que las tres acciones pueden jugarse. ¿Para qué valores de δ puede el vector de pagos $(4,4)$ sostenerse como los pagos de un SPE usando una estrategia gatillo en la cual el castigo es jugar C por sólo un período? Escribir el perfil de estrategias usadas por los jugadores.

Respuesta:

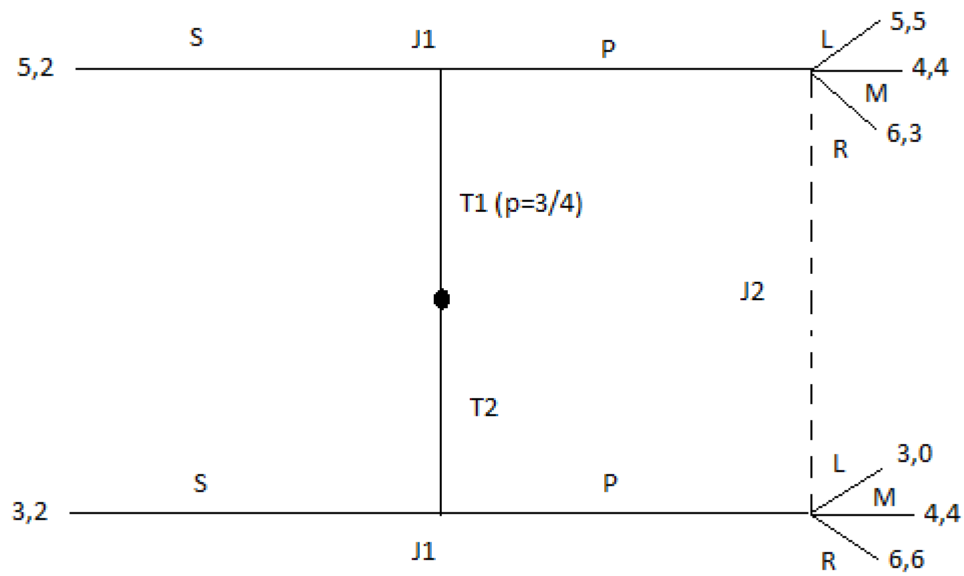
Cada jugador usa la siguiente estrategia definida por dos estados. Estado "cooperación": jugar A; y en cada período t, si el resultado del juego en el período anterior fue (A,A), jugar A. De lo contrario ir al estado de castigo. En el estado castigo, jugar C; y en cada t si en el período anterior el outcome fue (C,C) ir al estado de cooperación; de lo contrario seguir jugando C. Al inicio del juego, empezar en el estado cooperación.

Es óptimo seguir la estrategia en el path de equilibrio si $4 \geq 5(1-\delta)-\frac{1}{2}\delta(1-\delta)+4\delta^2 \iff \delta \geq \frac{2}{9}$.
Es óptimo seguir la estrategia en el la fase de castigo si $-\frac{1}{2}(1-\delta)+4\delta \geq 1(1-\delta)-\frac{1}{2}\delta(1-\delta)+4\delta^2 \iff \delta \geq \frac{1}{3}$.
Por lo tanto, es un SPE si $\delta \geq \frac{1}{3}$.

d) Si incrementamos el número de períodos del castigo, el vector $(4,4)$, ¿se sostendrá en SPE para mayores o menores valores de δ (los jugadores tienen que ser más o menos pacientes)? (No es necesario hacer más cuentas)

Respuesta: Observar que aumentar el número de períodos de castigo, aumenta los incentivos a no desviarse en el path de equilibrio, pero lo disminuye en la fase de castigo (como el castigo es más fuerte, tienen más incentivos a desviarse). Como la restricción activa según el punto anterior es la correspondiente al castigo, entonces se sostiene para mayores valores de δ.

3. Considere el juego de la siguiente figura, hallar todos los PBE en estrategias puras.



Respuesta: $[(P,S), L, Prob(T_1|P) = 1)]$, $[(S,S), L, Prob(T_1|P) \geq \frac{4}{5})]$.