dECON
Facultad de Ciencias Sociales
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Examen Teoría de Juegos. 12 Julio 2021

Instrucciones: El examen comprende 4 ejercicios y tiene una duración de dos horas. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas.¡Suerte!

1. Dos países están negociando un acuerdo para combatir el cambio climático. Si el país 1 invierte x_1 y el país 2 invierte x_2, sus pagos son:

$$u_1(x_1, x_2) = (3 + x_2)x_1 - 2(x_1)^2,$$

$$u_2(x_1, x_2) = (3 + x_1)x_2 - 2(x_2)^2.$$

a) ¿Cuál es el acuerdo que maximiza el bienestar agregado de los dos países $(u_1 + u_2)$?

$$x_1 = x_2 = \frac{3}{2}.$$

b) Supongamos ahora que antes del acuerdo los dos países deciden simultáneamente el monto a invertir. Hallar un EN.

$$x_1^* = x_2^* = 1.$$

c) ¿Por qué el valor hallado en a) no puede implementarse cuando las decisiones son tomadas simultáneamente?

La mejor respuesta a $\frac{3}{2}$ es $\frac{9}{8}$.

2. Considere el caso de dos firmas que compiten a lo Cournot en un mercado con función inversa de demanda $P = 30-(q_1+q_2)$, donde q_i es la cantidad producida por la firma i. La firma 1 tiene un costo margina constante $c_1 = 8$. El costo marginal de la firma 2 puede ser bajo $c_l = 0$ (con probabilidad $\frac{1}{2}$) o alto $c_h = 8$ (con probabilidad $\frac{1}{2}$). La firma 2 conoce su costo marginal y el de la firma 1. La firma 1 conoce su costo, pero sólo conoce la probabilidad de cada valor del costo de la firma 2.

   a) Describir el juego bayesiano definido por la situación anterior.

   b) Hallar la función de mejor respuesta de cada tipo de la firma 2.

$$BR_2(q_1|l) = 15 - \frac{1}{2}q_1.$$

$$BR_2(q_1|h) = 11 - \frac{1}{2}q_1.$$

   c) Hallar el pago esperado de la firma 1, y su función de mejor respuesta.

   El pago esperado de la firma 1 es:

$$\frac{1}{2}[(30 - q_1 - q_l)q_1] + \frac{1}{2}[(30 - q_1 - q_h)q_1] - 8q_1 = \frac{1}{2}q_1(60 - 2q_1 - q_l - q_h) - 8q_1.$$

   Derivando la expresión anterior con respecto a q_1 e igualando a cero, se obtiene:

$$BR_1(q_l, q_h) = 11 - \frac{1}{4}q_l - \frac{1}{4}q_h.$$

   d) Calcular un equilibrio bayesiano de Nash (BNE).

   Resolviendo el sistema anterior con tres ecuaciones y tres incógnitas, se obtiene:

$$q_1 = 6, q_l = 12, q_h = 8.$$

3. Considerar el juego de señalización de la Figura 1.

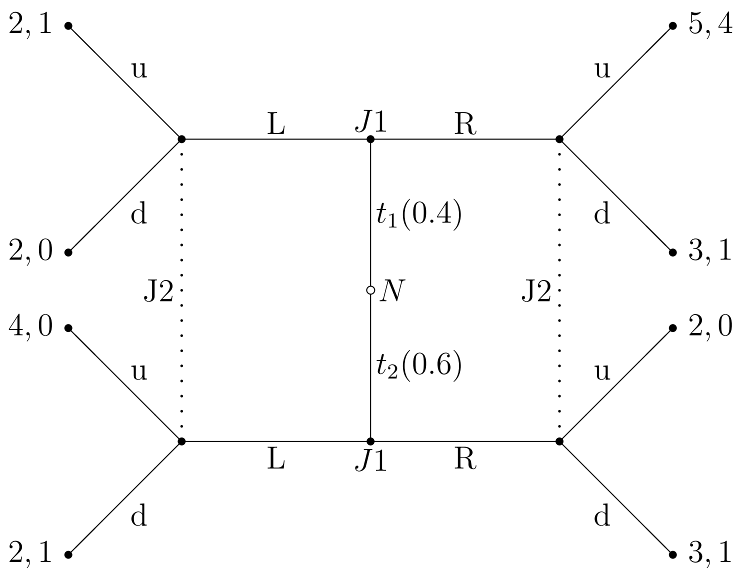

Figura 1: Ejercicio 3

a) Un tipo del jugador 1 tiene una acción dominante. ¿Cuál es?

Para t_1 R es una acción dominante.

b) Hallar todos los PBE separadores en estrategias puras (incluir las creencias del jugador 2).

$$PBE = [(R, L), (d, u), (Prob(t_1|L) = 0, Prob(t_2|L) = 1)].$$

Notación: (d, u) implica que J2 luego de L juega d y luego de R juega u.

c) Hallar todos los PBE pooling en estrategias puras (incluir las creencias del jugador 2).

$$PBE = [(R, R), (d, u), (Prob(t_1|L) = p, Prob(t_1|R) = 0.4)],$$

con $p \leq \frac{1}{2}$.

4. Considera el siguiente juego repetido infinitas veces con factor de descuento δ:

	D	H
D	$2,2$	$-1,3$
H	$3,-1$	$0,0$

Figura 2:

Definimos la siguientes estrategias:

- E_1: jugar siempre H.
- E_2: jugar siempre D.
- E_3: empezar jugando D. Jugar D hasta que el otro juegue H, después de lo cual jugar siempre H.
- E_4: empezar jugando D. Jugar D si el otro jugador jugó D en el último período, de lo contrario jugar H.

Notación: (E_i, E_j) representa el perfil en el cual el jugador 1 sigue la estrategia E_i y el jugador 2 la estrategia E_j.

a) Calcular los pagos de las estrategias (E_3, E_3) y (E_4, E_4).

Ambas estrategias tienen un pago promedio de 2 para cada jugador.

b) Mostrar que los siguientes perfiles NO son equilibrios de Nash: (E_1, E_4) y (E_1, E_3).

c) Mostrar que (E_1, E_1) es un EN.

d) Mostrar que (E_2, E_2) NO es un EN.

e) ¿Para qué valores de δ el perfil (E_3, E_3) es un EN?

Para que sea un EN debe cumplirse:

$$2 \geq (1-\delta)(3 + 0\delta + \ldots) \iff \delta \geq \frac{1}{3}.$$

f) ¿Es el perfil (E_3, E_3) un equilibrio de Nash perfecto por subjuegos?

No, basta considerar el subjuego que comienza luego de una historia que termina en (H, D), para el jugador 1. Si sigue la estrategia entonces el resultado del subjuego es $((D, H), (H, H), (H, H), \ldots)$. Si se desvía y juega H, entonces el resultado del juego es $((H, H), (H, H), \ldots)$.