dECON
Facultad de Ciencias Sociales
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Examen Teoría de Juegos. 8 Agosto 2022

Instrucciones: El examen comprende 4 ejercicios y tiene una duración de tres horas. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas. ¡Suerte!

1. Consideremos un mercado de energía eléctrica con $n \geq 1$ empresas productoras. El precio de 1 GWh de electricidad es p, el cual se fija en función de la producción total de electricidad en el mercado q, de la siguiente forma:

   $$p(q) = 50 - \frac{q}{1000},$$

   con $q = \sum_{i=1}^{n} q_i$

   El costo de cada empresa de producir 1 GWh de electricidad es 20. Cada empresa i, decide cuánto producir, q_i, de forma simultánea.

   a) Hallar un equilibrio de Nash del juego. (Sugerencia: buscar un equilibrio simétrico).

   $q_i^* = \frac{30000}{n+1}$, $i = 1, 2$.

   b) ¿Qué sucede con el precio cuando n aumenta? (Suponer que se sigue jugando el mismo equilibrio de Nash).

   El precio disminuye y tiende al costo marginal de cada empresa.

   c) Consideremos el caso $n = 2$. Hallar el precio y el beneficio que obtiene cada empresa en el equilibrio hallado antes. ¿Es el equilibrio de Nash encontrado en el punto anterior Pareto eficiente? Justificar.

   $q_i^* = 10000$, $i = 1, 2$, $p = 30$. Beneficio: 100000.

   No es eficiente: produciendo $q_i = 7500$, $i = 1, 2$, ambas empresas están mejor.

2. Dos empresas, 1 y 2, tienen que decidir si aumentar o no su capacidad productiva, y si lo hacen, si hacerlo a un nivel bajo (B) o alto (A). Los pagos está definidos en la Figura 1, donde N es no aumentar.

	N	B	A
N	$18, 18$	$15, 20$	$9, 18$
B	$20, 15$	$16, 16$	$8, 12$
A	$18, 9$	$12, 8$	$0, 0$

Figura 1: Pagos Ejercicio 2

a) Supongamos que cada empresa toma la decisión de forma simultánea. Hallar un equilibrio de Nash.

$EN = (B, B)$

b) Supongamos ahora que la empresa 1 toma la decisión primero, la empresa 2 observa la decisión tomada, y luego decide N, B o A. Representar este juego en forma extensiva y hallar un equilibrio de Nash perfecto por subjuegos.

$ENPS = [A, (B, B, N)]$

c) ¿Cómo cambia la respuesta anterior si la empresa 2 es la que decide primero? Justificar.

El resultado es el mismo, la empresa 2 juega A y la empresa 1 (B, B, N)

d) Si una empresa pudiera elegir cuándo decidir, ¿elegiría decidir primero o segundo? Justificar

Comparando los pagos de los puntos anteriores, es claro que elegiría mover primero.

3. Supongamos que hay dos hermanos que tienen que decidir simultáneamente si limpiar su cuarto (L) o no (NL) . El costo para el hermano $i \in \{1, 2\}$ de limpiar el cuarto es c_i. Si por lo menos uno limpia, el cuarto queda limpio y ambos obtienen un pago de 2. Si ninguno decide limpiar, entonces cada uno recibe un pago de 0 (ver Figura 2).

	L	NL
L	$2 - c_1, 2 - c_2$	$2 - c_1, 2$
NL	$2, 2 - c_2$	$0, 0$

Figura 2: Pagos Ejercicio 3

a) Supongamos que es de conocimiento común que $c_1 = \frac{3}{2}$ y $c_2 = 1$. Hallar los equilibrios de Nash del juego. ¿Son Pareto eficientes?

(L, NL) y (NL, L). Ambos son Pareto eficientes.

b) Supongamos que el costo c_i es información privada de cada hermano. Ambos conocen que cada costo c_i se distribuye de forma independiente de acuerdo a una distribución uniforme en $[1, 3]$.[1] Hallar un equilibrio Bayesiano en el cual cada hermano usa una estrategia de la forma:

$$s_i(c_i) = \begin{cases} \text{Limpia} & \text{si } c_i \leq a \\ \text{No Limpia} & \text{si } c_i > a \end{cases}$$

En particular, determinar el valor de a.

El hermano 1 decidirá limpiar el cuarto sii el pago esperado de limpiar es mayor o igual al pago de no limpiar, esto es:

$$2 - c_1 \geq Prob(c_2 \leq a)2 \iff 2 - c_1 \geq a - 1 \iff c_1 \leq 3 - a.$$

Por lo tanto, el umbral que usará el hermano 1 es $3 - a$. Como el equilibrio es simétrico, el a es el mismo para los dos hermanos, entonces se debería tener que:

$$3 - a = a \iff a = \frac{3}{2}.$$

c) Calcular en el equilibrio bayesiano anterior la probabilidad de tener ex-post una situación ineficiente.

Podemos calcular, por ejemplo, la probabilidad de que los dos limpien (esto es la probabilidad de que ambos costos sean menores a $\frac{3}{2}$): $\frac{1}{16}$.

Otra situación ineficiente es aquella en la que los dos deciden no limpiar, **y al menos un costo es menor a** 2.

4. Consideremos el siguiente juego de señalización con un votante y un representante. El representante puede ser de dos tipos posibles, honesto y deshonesto. La probabilidad del tipo honesto es p, mientras que la deshonesto es $1 - p$. El votante no conoce el tipo del representante. El representante mueve primero, y debe elegir entre extraer un monto de rentas positivo $r_1 > 0$, o no extraer $r_1 = 0$. Luego el votante observa si el representante extrajo o no rentas, y debe decidir entre reelegirlo o no. Los pagos son los siguientes.

   El representante **honesto** si extrae rentas $r_1 > 0$, obtiene un pago de $-r_1$, si no extrae obtiene 0. Además de lo anterior, si es reelegido obtiene un pago de $E > 0$, mientras que si no lo es, su pago es 0. El representante **deshonesto** si extrae rentas $r_1 > 0$, obtiene un pago de $r_1 > 0$ (le gustan las rentas), si no extrae obtiene 0. Además si es reelegido obtiene un pago de $E + r_2$ (porque podrá extraer rentas de nuevo), mientras que si no es reelegido, su pago es 0.

[1] Esto implica que la función de distribución de cada c_i es $F(x) = \frac{x-1}{2}$ para $x \in [1, 3]$.

Al votante no le gusta que el representante extraiga rentas. Si el representante extrae rentas r_1 el pago del votante es $-r_1$ y es r_1 si el representante no lo hace. Además de lo anterior, si el votante reelige a un representante honesto, su pago es $r_2 > 0$, mientras que si reelige a un representante deshonesto, su pago es $-r_2$ (porque el representante volverá a extraer rentas). Si el votante no reelige, entonces su pago es $p\ r_2 + (1-p)(-r_2)$ (con probabilidad p el nuevo representante será honesto y obtiene un pago de r_2, con la probabilidad complementaria el nuevo representante es deshonesto, extrae rentas y el votante obtiene $-r_2$).

a) Escribir el juego en forma extensiva.

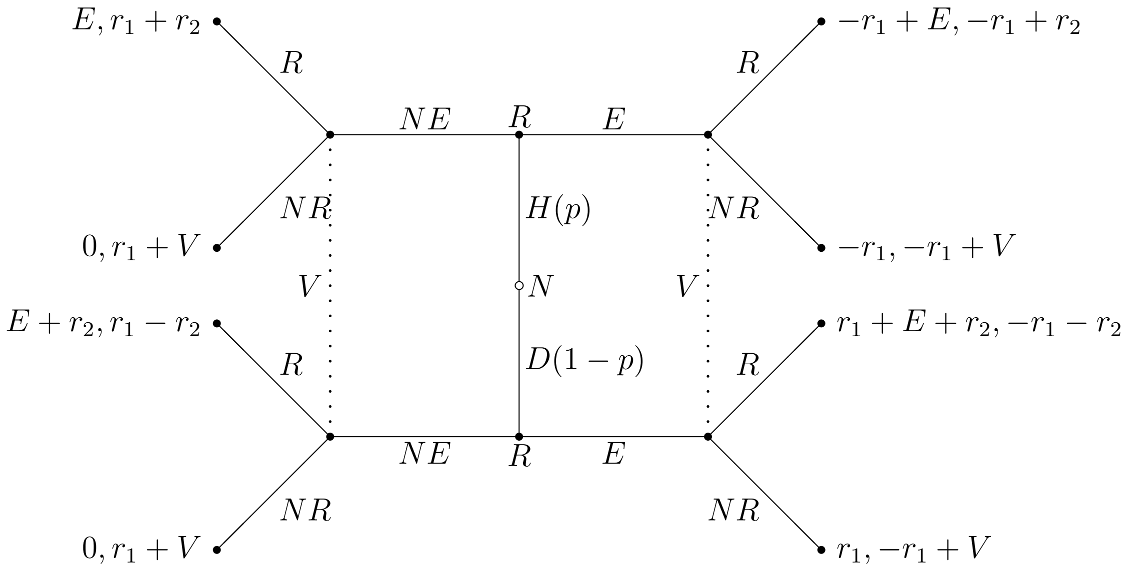

Figura 3: Ejercicio 3

H = honesto; D = deshonesto; R = representante; E = extraer rentas; NE = no extraer rentas; R = reelige; NR = no reelige; V = votante; $V = pr_2 + (1-p)(-r_2)$.

b) Probar que si r_1 (las rentas del período 1) son suficientemente altas, entonces existe un equilibrio Bayesiano perfecto separador en el cual el tipo deshonesto extrae rentas. Hallar la condición que debe cumplir r_1, y explicar el trade-off que enfrenta el representante deshonesto.

En el equilibrio propuesto el representante honesto no extrae rentas, y el representante deshonesto lo hace. En este caso el votante aprende el tipo del representante: $Prob(H|r_1 = 0) = 1$ y $Prob(H|r_1 > 0) = 0$.

Luego de observar $r_1 = 0$ el votante reelige ya que $V < r_2$. Cuando observa $r_1 > 0$, no reelige por la misma razón.

El representante honesto no tiene incentivos a desviarse ($E > -r_1$).

El representante deshonesto si no se desvía obtiene r_1; si lo hace, obtiene $E+r_2$. Para que no se desvíe, se necesita: $r_1 \geq E + r_2$.

El trade-off que enfrenta el representante deshonesto es entre rentas en el primer período, y reelección y rentas en el segundo período.

c) Hallar un equilibrio Bayesiano perfecto en el cual ambos tipos de representantes no extraen rentas y el votante reelige en ese caso. Hallar la condición que debe cumplir r_1 y la probabilidad fuera del sendero de equilibrio. Interpretar.

En este caso, el votante es indiferente entre reelegir o no luego de observar $r_1 = 0$. El representante honesto no tiene incentivos a desviarse. El representante deshonesto si no se desvía obtiene $E + r_2$. Si se desvía, o sea, si extrae rentas, se necesita que el votante juegue no reelección (de lo contrario el representante deshonesto se desvía seguro). En este caso, el representante deshonesto si se desvía obtendría r_1; por lo que necesitamos que $E + r_2 \geq r_1$.

Por último, necesitamos hacer que el votante elija no reelegir luego de $r_1 > 0$. Notación: $q = Prob(H|r_1 > 0)$. Si no reelige obtiene: $-r_1 + V$; si lo hace obtiene: $q(-r_1 + r_2) + (1-q)(-r_1 - r_2) = -r_1 + qr_2 + (1-q)(-r_2) = -r_1 + r_2(2q-1)$.

Por lo tanto, se debe verificar que:

$$-r_1 + V = -r_1 + r_2(2p-1) \geq -r_1 + r_2(2q-1) \iff p \geq q.$$

La intuición es que para que el votante no reelija luego de observar extracción de rentas, debe actualizar a la baja la probabilidad de que el representante sea honesto.