# Examen Teoría de Juegos. 2 Agosto 2023

INSTRUCCIONES: El examen comprende 3 ejercicios y tiene una duración de 3 horas. Sólo se valora una respuesta concreta a las preguntas planteadas. ¡Suerte!

1. (40 puntos) Una firma establecida (jugador 1) es o bien un tipo de bajo costo $\theta_1 = \theta_L$ o un tipo alto costo $\theta_1 = \theta_H$, cada uno con la misma probabilidad. En el periodo $t = 1$ la firma establecida es un monopolista y establece uno de dos precios: $p_A$ (alto) o $p_B$ (bajo) donde $p_A > p_B$. Sus ganancias en este período dependen de su tipo y el precio que elija, dado por la siguiente tabla:

| Tipo | Beneficio de $p_B$ | Beneficio de $p_A$ |
|---|---|---|
| $\theta_L$ | 6 | 8 |
| $\theta_H$ | 1 | 5 |

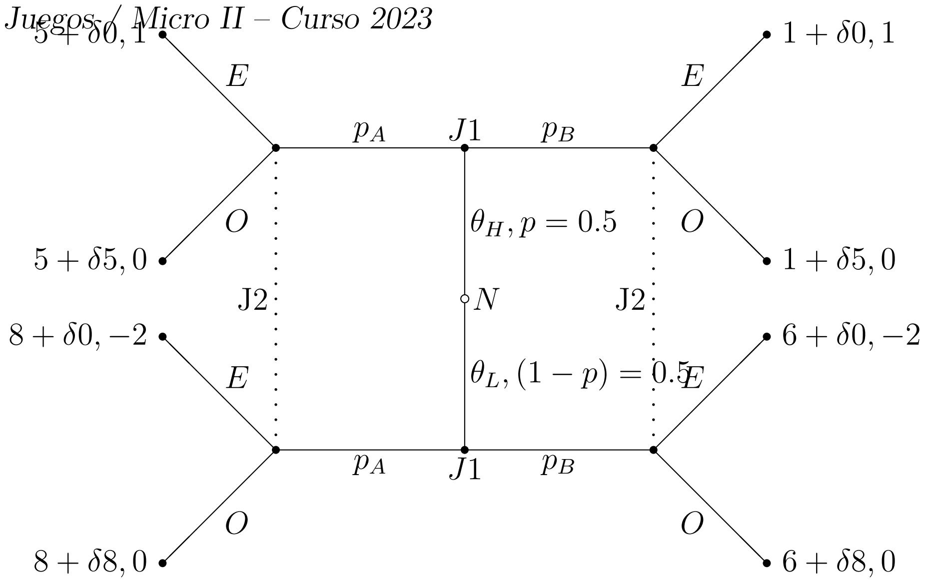
Después de observar el precio del período t = 1, un potencial competidor (jugador 2), que no conoce $\theta_1$ pero conoce la distribución de los tipos, puede elegir entrar al mercado ($E$) o permanecer fuera ($O$) en el periodo $t = 2$. Los pagos de ambos jugadores en el período 2 dependen de la elección del competidor y del tipo de firma establecida como muestra la siguiente tabla:

| Tipo de J1 | Acción de J2 | Pago de J1 | Pago de J2 |
|---|---|---|---|
| $\theta_L$ | E | 0 | -2 |
| $\theta_L$ | O | 8 | 0 |
| $\theta_H$ | E | 0 | 1 |
| $\theta_H$ | O | 5 | 0 |

La firma 1 descuenta los beneficios del periodo $t = 2$ con un factor de descuento $\delta \leq 1$.

*a*) Dibuje el árbol del juego (notar que los pagos del jugador 1 compenden dos términos, los pagos de ambos periodos. El pago del segundo periodo se descuenta por $\delta$).

**Solución**: Notación: $p$ es la probabilidad de que $\theta_1 = \theta_H$ ($1 - p$ de $\theta_1 = \theta_L$).




$b$) Encuentre un rango de valores de $\delta$ para los que existe un PBE separador (separating equilibrium).

**Solución**: Notar que si $J2$ sabe el tipo de $J1$ entraría si $\theta_1 = \theta_H$ y no entraría si $\theta_L$. La idea es que, para cierto $\delta$, el tipo con costo bajo $\theta_L$ pone un precio menor en $t = 1$ ($p_B$) señalando su tipo (y así, por tanto, evita que $J2$ entre en $t = 2$), mientras que $\theta_L$ prefiere obtener más en $t = 1$ poniendo $p_A$ pero luego no evita que $J2$ entre en $t = 2$.

Entonces el candidato al un PBE separador es $(p_A, p_B; E, 0)$. Notación: la primera y segunda entrada es lo que elige $J1$ cuando $\theta_H$ y $\theta_L$ respectivamente, y la tercera y cuarta entrada es la estrategia de $J2$ al observar la primera y segunda entrada respectivamente (ej. si observa $p_A$ juega $E$). Probémoslo:

$J2$ al ver $p_B$ en $t = 1$ sabe que es $\theta_L$, por tanto prefiere $O$ (pago 0) a $E$ (pago $-2$). Cuando observa $p_A$, sabe que $\theta_H$, se puede corroborar que prefiere $E$.

Veamos ahora a $J1$. Denotemos como $U(p_i, \theta_j)$ los pagos de $J1$ si elige $p_i$ cuando su tipo es $\theta_j$.

Incentivos de $\theta_H$ dado lo que hace $J2$ en el equilibrio propuesto:

$$U(p_A, \theta_H) = 5 + \delta 0 > 1 + \delta 5 = U(p_B, \theta_H) \quad \iff \quad \delta < 4/5$$

Incentivos de $\theta_L$ dado lo que hace $J2$ en el equilibrio propuesto:

$$U(p_B, \theta_L) = 6 + \delta 8 > 8 + \delta 0 = U(p_A, \theta_L) \quad \iff \quad \delta > 2/8$$

Por tanto si $\delta \in (2/8, 4/5)$ tenemos un equilibrio separador.

*c*) Para $\delta = 1$, encontrar los PBE pooling del juego (en estrategias puras). Comente si el/los equilibrios encontrados sobreviven el criterio intuitivo de Cho and Kreps.

**Solución**: Notación: En un pooling ambos tipos de $J1$ juegan lo mismo por lo que necesitamos definir creencias off-the-path (cuando $J2$ observa la acción de $J1$ que no propone el equilibio). Denotemos como $q$ a la probabilidad de que $\theta_1 = \theta_H$ al observar a la acción off-the-path.

Hay 8 candidatos: $(p_B, p_B; O, O)$, $(p_B, p_B; O, E)$, $(p_B, p_B; E, O)$, $(p_B, p_B; E, E)$, $(p_A, p_A; O, O)$, $(p_A, p_A; O, E)$, $(p_A, p_A; E, O)$, $(p_A, p_A; E, E)$, y hay que especificar $q$ para cada caso.

Encontré 3 pooling PBE:
i) $(p_B, p_B; O, E)$ con $q \geq 2/3$,
ii) $(p_A, p_A; O, E)$ con $q \geq 2/3$,
iii) $(p_A, p_A; O, O)$ con $q \leq 2/3$.

(i) sobrevive Cho-Kreps ya que si $J2$ elige $O$ ante $p_A$ cualquiera de los dos tipos de $J1$ se beneficiaría, por tanto las creencias de $J2$ que estipula el equilibrio $q \geq 2/3$ son razonables.

(ii) sobrevive Cho-Kreps ya que si $J2$ elige $O$ ante $p_B$ ninguno de los dos tipos de $J1$ se beneficiaría, por tanto las creencias de $J2$ que estipula el equilibrio $q \geq 2/3$ son razonables. Similar razonamiento con (iii).

*d*) Muestre que existe un SE (sequential equilibrium) donde ambos tipos de jugador 1 eligen $p_A$.

**Solución**: Por definición necesitamos encontrar una secuencia de estrategias mixtas para $J1$ y $J2$ y creencias consistentes con Bayes para el $J2$ que converjan a uno de los PBE planteados. Tomemos por ejemplo $(p_A, p_A; O, E)$ y veamos si es un SE. Vemos que para que este equilibrio exista, $J2$ elige $E$ al observar $p_B$, y esto es óptimo porque $J2$ cree con probabilidad alta ($q \geq 2/3$) que es $\theta_H$ quien elige $p_B$. Por tanto podemos construir una estrategia mixta para $J1$ de la siguiente manera: definamos como $\sigma_i(p_B)$ a la probabilidad que $\theta_i$ elija $p_B$, y por tanto elige $p_A$ con prob $1 - \sigma_i(p_B)$. Tenemos que definir una secuencia de $1 - \sigma_i(p_B)$ para $i \in \{H, L\}$ que converja a $p_A$. A su vez, tenemos que ser cuidadosos, al definir esto para que $\theta_H$ sea el tipo más probable que elija $p_B$ para así $J2$ elija $E$ al observar $p_B$. La siguiente opción cumple con estos requesitos:

$\sigma_H(p_B) = 3\epsilon/n$, $\sigma_L(p_B) = \epsilon/n$ (notar que $\sigma_i(p_B) = 0$ cuando $n \to \infty$). Creencias de $J2$ al observar $p_B$: $q_n = \frac{(0.5)3\epsilon/n}{(0.5)3\epsilon/n + (0.5)\epsilon/n} = 3/4 \ \forall \ n$. Notar que cuando $J2$ observa $p_A$, sus creencias sobre si es $\theta_H$ son

$$\frac{p5(1-\sigma_H(p_B))}{p(1-\sigma_H(p_B))+(1-p)(1-\sigma_L(p_B))}=\frac{1}{2}$$

para todo $n$ y por tanto $O$ es la mejor estrategia: ya que $0 > 0.5(-1) + (0.5)(-2) =$ pagos de elegir $E$. Luego para $J2$ podemos definir una estrategia mixta (notación, $\sigma_2(a \mid p_i)$ es la probabilidad de elegir $a$ cuando observa $p_i$) de la forma, $\sigma_2(E \mid p_A) = \epsilon/n$, $\sigma_2(E \mid p_B) = 1 - \epsilon/n$, que converje a 0 y 1 respectivamente cuando $n \to \infty$.

2. (40 puntos) Suponga un mercado con función de demanda dada por $Q(p) = 200 - p$ y dos firmas que eligen simultáneamente su precio $p_i \in [0, \infty)$, con función de costos idénticas $c_i(q_i) = 40q_i$. Suponga que los compradores (demanda) compran a la firma que cobra menor precio, y en caso de igual precio la demanda se divide mitad y mitad para cada firma. Los pagos de las firmas son:

$$\pi_i(p_i,p_j)=\begin{cases}(200-p_i)(p_i-40) & \text{si } p_i<p_j\\ \frac{(200-p_i)}{2}(p_i-40) & \text{si } p_i=p_j\\ 0 & \text{si } p_i>p_j\end{cases}$$

*a*) Hallar el equilibrio de Nash en estrategias puras.

**Solución**: $(p_i, p_j) = (40, 40)$.

*b*) Suponga que las firmas compiten ahora por 10 periodos. Encuentre el/los EN y SPE.

**Solución**: $(p_i, p_j) = (40, 40)$ en todos los periodos.

*c*) Suponga que las firmas compiten infinitamente y descuentan los pagos futuros con factor de descuento $\delta$. Encuentre valores de $\delta$ tal que exista un SPE donde las firmas se dividan en partes iguales los beneficios de un monopolista en cada periodo. (Explicite claramente el SPE, es decir, las estrategias. Si prefiere suponga que la firma puede elegir precios sólo en los números naturales $p \in \{1, 2, 3, ...\}$).

**Solución**: Precio monopolio 120. Beneficio 6400. Poniendo un precio de 120 ambos se reparten estos beneficios a la mitad. Para sostener esta cooperación ambos pueden jugar grim-trigger:

Estrategia: Empezar con $p_i = 120$, luego $p_i = 120$ si ambos jugadores eligieron $p_j = 120$ en el eperiodo anterior, de lo contrario jugar $p_i = 40$.

Si coopera obtiene $(1-\delta)\frac{3200}{1-\delta}$, y si se desvía a $p_i = 120 - \epsilon$ con $\epsilon \to 0$ obtiene $(1-\delta)(6400 - \epsilon + \delta\frac{0}{1-\delta})$. Para $\delta > 0.5$ cooperar es la mejor respuesta. Supongamos una subjuego que comienza luego de que algun jugador jugó $p \neq 120$. Como el otro va a jugar $= 40$, al seguir grim-trigger $p = 40$ obtiene beneficios nulos, lo mismo si se desvía de la estrategia. Por tanto es un SPE.

*d*) Proponga un SPE que alcance pagos de $\frac{140*20}{2}$ cuando $\delta \to 1$. (Notar que si las firmas fijan en un periodo $p_i = 60 < p_j$, $i$ alcanza un beneficio en el periodo de $140 * 20$).

**Solución**: Consideremos las siguientes estrategias.

J1: juega $p_1 = 60$ en $t = 1, 3, 5\dots$ y $p_1 = 70$ en $t = 2, 4, \dots$ siempre que la historia previa consista en $h = \{(60, 70), (70, 60), (60, 70)\dots\}$; $p_1 = 40$ en otro caso.

J2: jugar $p_2 = 70$ en $t = 1, 3, 5\dots$ y $p_2 = 60$ en $t = 2, 4, \dots$ siempre que la historia previa consista en $h = \{(60, 70), (70, 60), (60, 70)\dots\}$; $p_2 = 40$ en otro caso.

Notar que si juegan de esta forma, los pagos que obtiene J2 y J1 son respectivamente:

$$(1-\delta)\left(\frac{140*20}{1-\delta^2} + \frac{\delta 0}{1-\delta^2}\right) = \frac{140*20}{1+\delta} \text{ y } (1-\delta)\left(\frac{0}{1-\delta^2} + \frac{\delta(140*20)}{1-\delta^2}\right) = \frac{\delta 140*20}{1+\delta}$$

Que cuando $\delta \to 1$ converge a $(140 * 20/2, 140 * 20/2)$.

3. (20 puntos) Considere una subasta en la que el ganador es quien realiza la oferta más alta, y paga la tercera oferta más alta. Supongamos que hay 3 jugadores, cada jugador tiene una valoración $v_i$ y oferta $b_i$. Asuma $v_1 > v_2 > v_3$ (de conocimiento común). En el caso de un empate, el licitador con el índice más bajo $i$ gana. El pago del ganador $i$ es $v_i - p_i$, donde $p_i$ es el valor que tendrá que pagar $(\text{mín}(b_i))$. Los que pierden reciben un pago de cero. Encuentre los equilibrios de Nash.

**Solución**:

Gana *J1*: $\{b_1 \in [\text{máx}\{b_2, b_3\}, \infty); v_2 \leq \text{mín}\{b_2, b_3\} \leq v_1\}$
Gana *J2*: $\{b_2 \in [b_3, \infty); b_3 \geq v_1; b_1 \in [v_3, v_2]\}$