Lista Ejercicios 6: Juegos Bayesianos (información incompleta).

1. Considere un juego con los siguientes pagos:

	L	R
X	θ, γ	$1, 2$
Y	$-1, \gamma$	$\theta, 0$

Figure 1: Pagos

donde $\theta \in \{0, 2\}$ es conocido por el jugador 1, $\gamma \in \{1, 3\}$ es conocido por el jugador 2, y todos los pares (θ, γ)tienen probabilidad $\frac{1}{4}$.

   (a) Definir el juego como un juego bayesiano.
   (b) Describir las estrategias posibles de cada jugador.
   (c) Para el tipo $\theta = 0$, ¿Existe alguna acción dominante?
   (d) Para el tipo $\gamma = 3$, ¿Existe alguna acción dominante?
   (e) Usando los puntos anteriores, probar que hay una equilibrio bayesiano de Nash en el cual $s_1(\theta = 2) = X$, y $s_2(\gamma = 1) = R$.

2. Dos socios deben decidir simultáneamente hacer una inversión. Cada socio i elige un monto $x_i \geq 0$. El pago para el socio i, $i = 1, 2$, es

$$\theta_i x_i x_j - x_i^3.$$

Suponemos θ_i es información privada de i y que los dos conocen que θ_i, θ_j se distribuyen independiente y uniforme en $[0, 1]$.

Encontrar un equilibrio Bayesiano de Nash simétrico de la forma $s_i^*(\theta_i) = a + b\sqrt{\theta_i}$ para $i = 1, 2$.

Sugerencia: Hallar la inversión que maximiza el pago esperado del inversor i, suponiendo que el inversor j juega según $s_j^*(\theta_j)$. Luego comparar la solución encontrada con la propuesta de $s_i^*(\theta_i)$ para hallar a y b

3. (Una subasta en las que todos pagan). Considera el modelo de subasta que vimos en el curso, asumiendo que hay dos participantes: cada participante i tiene una valoración por el bien que se subasta de θ_i, y hacen una oferta b_i simultáneamente.

   Para $i = 1, 2$, θ_i se extrae de forma independiente de una distribución uniforme en $[0, 1]$.

   Supongamos que la oferta más alta obtiene el objeto que se subasta, pero todos los participantes pagan sus ofertas. Por lo tanto, los dos participantes pagan b_i al vendedor del objeto, sin importar si lo ganan o no.

   Verifica que las estrategias:

$$(b_1^*(\theta_1), b_2^*(\theta_2)) = \left(\frac{\theta_1^2}{2}, \frac{\theta_2^2}{2}\right)$$

   son un equilibrio bayesiano de Nash.

   Sugerencia, calcula el pago esperado del jugador 1, sabiendo que el jugador 2 sigue la estrategia $b_2^*(\theta_2)$ y que θ_2 se distibuye uniforme en $[0, 1]$. Luego, halla b_1 que maximiza el pago esperado, y verifica que obtienes $b_1^*(\theta_1)$).

4. Considerar la subasta "first-price, sealed-bid" que vimos en clase, pero ahora supongamos que las valoraciones de los compradores se distribuyen iid según una función de **densidad** definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

   Hallar un BNE simétrico y lineal (esto es, de la forma: $b_i = a + cv_i$, con $c > 0$). ¿Qué sucede cuando $n \to \infty$?

   Sugerencia: Si $x_1, \ldots, x_n$ son variables aleatorias distribuídas iid según una función de distribución F, entonces para todo ω se tiene: $Prob\{x_1 \leq \omega, \ldots, x_n \leq \omega\} = Prob\{x_1 \leq \omega\} \ldots Prob\{x_n \leq \omega\} = (F(\omega))^n$.

July 18, 2023