Lista Ejercicios 6: Algunas Soluciones

1. *a*) $N = \{1, 2\}$
   $T_1 = \{0, 2\}$, $T_2 = \{1, 3\}$
   $p(0,1) = p(0,3) = p(2,1) = p(2,3) = \frac{1}{4}$
   $A_1 = \{X, Y\}, A_2 = \{L, R\}$, and
   u_1 and u_2 are defined by the table.

   b) A strategy for player 1 associates an action in A_1 for each possible type. That is, a strategy for player 1 is a function s_1 such that $s_1(0) \in A_1$ and $s_1(2) \in A_1$. The same for player 2.

   c) Observe that when $\theta = 0$, action X strictly dominates action Y:

   $$u_1(X, a_2, \theta = 0, \gamma) > u_1(Y, a_2, \theta = 0, \gamma)$$

   for all actions $a_2 \in A_2$ and types $\gamma \in \{1, 3\}$ of Player 2. Hence, it must be that at equilibrium (player 1's type 0 should play X):

   $$s_1^*(0) = X.$$

   d) Similarly, when $= 3$, action L strictly dominates action R, and hence

   $$s_2^*(3) = L.$$

   e) Por los puntos anteriores sabemos que en equilibrio el jugador 1 cuando es del tipo $\theta = 0$ jugará X, mientras que el jugador 2 cuando es del tipo $\gamma = 3$ jugará L. Por lo tanto, vamos a probar que existe un equilibrio definido de la siguiente forma:

   $$s^* = (s_1^*; s_2^*) = (s_1^*(\theta = 0) = X, s_1^*(\theta = 2) = X; s_2^*(\gamma = 1) = R, s_2^*(\gamma = 3) = L).$$

   Fijemos la estratregia del jugador 2, y veamos si el jugador 1 tiene incentivos a desviarse. Ya sabemos que el tipo $\theta = 0$ no tiene incentivos a desviarse porque jugar X es una estrategia dominante. Veamos para el tipo $\theta = 2$. Los pagos de seguir la estrategia (jugar X) son:

$$\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}2 = \frac{3}{2},$$

esto es, con probabilidad $\frac{1}{2}$ el jugador 2 es del tipo $\gamma = 1$ y juega R, y con probabilidad $\frac{1}{2}$ el jugador 2 es del tipo $\gamma = 3$ y juega L. Los pagos de desviarse (jugar Y) son:

$$\frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2} < \frac{3}{2},$$

por lo que no tiene incentivos a desviarse.

Ahora fijamos la estrategia del jugador 1 y vemos los incentivos del jugador 2. Ya sabemos que el tipo $\gamma = 3$ no tiene incentivos a desviarse porque jugar L es una estrategia dominante. Veamos para el tipo $\gamma = 1$. El jugador 1 siempre juega X (los dos tipos juegan lo mismo), por lo tanto los pagos del jugador 2 cuando es del tipo $\gamma = 1$ de jugar la estrategia son 2, que es mayor al pago de desviarse, o sea, de jugar L, que es $\gamma = 1$.

Por lo tanto, s^* es un BNE.

2. El pago esperado para i es $\theta_i x_i E(s_j^*(\theta_j)) - x_i^3$. La condición de primer order nos da

$$\theta_i E(s_j^*(\theta_j)) = 3x_i^2,$$

entonces

$$x_i = \sqrt{\frac{\theta_i E(s_j^*(\theta_j))}{3}}$$

Entonces $a = 0$ y

$$E(s_j^*(\theta_j)) = bE\sqrt{\theta_j} = b\int_0^1 \sqrt{t}dt = b\frac{2}{3}x^{3/2}|_0^1 = 2b/3$$

Entonces

$$x_i = \sqrt{\frac{\theta_i 2b}{9}}$$

Recordar la forma funcional de la solución que estamos buscando: $s_i^*(\theta_i) = a + b\sqrt{\theta_i}$. Ya sabemos que $a = 0$, igualando la expresión anterior a x_i obtenemos:

$$b\sqrt{\theta_i} = \sqrt{\frac{2b}{9}}\sqrt{\theta_i},$$

Por lo tanto:

$$b = \sqrt{\frac{2b}{9}},$$

o lo que es equivalente,

$$b = \frac{2}{9}.$$

Por último, tenemos que el BNE que se pide es:

$$s_i^*(\theta_i) = \frac{2}{9}\sqrt{\theta_i},$$

para $i = 1, 2$.

3. Consider bidder 1: when her valuation is θ_1 and she bids b_1, her expected payoff is $\theta_1 \Pr\{(1/2)\tilde{\theta}_2^{\,2} \leq b_1\} - b_1$. So she wants to maximize $\theta_1\sqrt{2b_1} - b_1$. The first-order condition is

$$\theta_1 \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{2b_1}} - 1 = 0,$$

which has $s_1^*(\theta_1)$ as solution. The second-order condition is satisfied.

4. *a*) The expected payoff from bidding b_i with type v_i is:

$$\begin{aligned} U(b_i, v_i) &= (v_i - b_i)Prob\{b_i > a + bv_j, \forall j \neq i\} \\ &= (v_i - b_i)\prod_{j \neq i} Prob\{b_i > a + bv_j\} \\ &= (v_i - b_i)\prod_{j \neq i} Prob\{v_j < \frac{b_i - a}{c}\} \\ &= (v_i - b_i)\prod_{j \neq i} \left(\frac{b_i - a}{c}\right)^3 \\ &= (v_i - b_i)\left(\frac{b_i - a}{c}\right)^{3(n-1)} \end{aligned}$$

for $b_i \in [a, a + c]$. Taking the first order condition, we find:

$$b_i = \frac{a + 3(n-1)v_i}{3(n-1)+1}$$

Then we must have:

$$a = \frac{a}{3(n-1)+1}$$

which implies that $a = 0$, and

$$c = \frac{3(n-1)}{3(n-1)+1}.$$

b) As $n \to +\infty$, $b_i \to v_i$, and then each bidder bids his valuation, and the seller extracts all the gains from trade.

18 de julio de 2023